H. Haferkorn

OPTIK

Verlag Harri Deutsch

H. Haferkorn

OPTIK

Verlag Harri Deutsch · Thun · Frankfurt/M.

H. Haferkorn Optik

Optik

Physikalisch-technische Grundlagen und Anwendungen

von H. Haferkorn

Verlag Harri Deutsch · Thun · Frankfurt/M.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Haferkorn, Heinz:
Optik : physikal.-techn. Grundlagen u. Anwendungen / von H. Haferkorn. — Thun, Frankfurt/M. : Deutsch, 1981.
ISBN 3-87144-570-3

ISBN 3 87144 570 3

Lizenzausgabe für den Verlag Harri Deutsch, Thun
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, 7400 Altenburg

Vorwort

Das vorliegende Buch beruht auf den langjährigen Lehr- und Forschungserfahrungen am Lehrstuhl für Technische Optik der Technischen Hochschule Ilmenau und löst die in den Jahren 1965 bis 1967 von der TH Ilmenau zum internen Gebrauch herausgegebenen Lehrbriefe über Optik desselben Verfassers ab.

Die Aufgabe dieses Buches soll darin bestehen, das physikalische Grundlagenwissen aufzufrischen und zu ergänzen, Voraussetzungen für die Beschäftigung mit den Spezialgebieten zu schaffen sowie Unterstützung bei der praktischen Anwendung der Optik zu geben. Deshalb galt es, bei einem vertretbaren Umfang des Buches die Funktion eines Lehrbuchs mit der eines Nachschlagewerkes zu vereinen, d. h. ein ausgewogenes Verhältnis von methodischem Rüstzeug und praktisch notwendigen Kenntnissen über grundlegende optische Elemente zu finden sowie die Wechselbeziehungen zwischen den physikalischen und den technischen Aspekten zu erfassen. Daraus ergibt sich auch, daß kein Platz für rechnerische Aufgaben und umfassende kommerzielle Angaben über Geräte vorhanden ist.

Während in einigen Abschnitten über den Stoff einer Grundlagenvorlesung hinausgegangen wird, mußte auf gewisse Teilgebiete der Spezialausbildung in technischer Optik bzw. Physik verzichtet werden. So konnten vor allem die systematische Theorie der optischen Abbildung einschließlich der Bewertung und der Synthese optischer Systeme, die optische Meßtechnik, die Strahlungsquellen und -empfänger, die Spektroskopie, die Holographie, die nichtlineare Optik, die integrierte Optik und die Laserphysik nur eingeschränkt dargeboten werden. Besonders ausführlich wurden hingegen solche Gebiete behandelt, die erfahrungsgemäß in der Ausbildung größere Schwierigkeiten bereiten.

Die Darstellungsweise ist vorwiegend dem Lehrbuchcharakter angepaßt. Ein Teil der Ableitungen von Gleichungen ist aus dem Text herausgelöst und in Tabellen zusammengefaßt worden, meistens in Form von Flußbildern. Dadurch soll die Übersichtlichkeit beim Nachschlagen erhöht werden. Grundlagenkenntnisse in Mathematik und Physik werden vorausgesetzt.

Die Formelzeichen und Vorzeichenregeln der technischen Optik werden konsequent angewendet. Da es sich aber nicht vermeiden läßt, die einzelnen Buchstaben mehrfach zu gebrauchen, wird die Bedeutung jeweils bei der erstmaligen Verwendung erklärt.

An der Erarbeitung des Stoffes über viele Jahre hinweg haben die Mitarbeiter des Lehrstuhls für technische Optik der Technischen Hochschule Ilmenau Anteil. Mein Dank gilt besonders Frau Dr. Henke, Frau Dr. Reschke und Herrn Dr. Eichler für die Vorbereitung einzelner Abschnitte sowie Herrn Dipl.-Ing. Herrig

für die Anfertigung der Fotografien. Ich danke auch meiner Frau und Frl. KOCH für das Schreiben eines Teiles des Manuskripts. Den Herren Professoren KLEBE, SCHMUTZER und WILHELMI danke ich recht herzlich für die kritische Durchsicht des gesamten Manuskripts und einige wertvolle Hinweise zu dessen Verbesserung.

Dem Verlag bin ich sehr dankbar für das Interesse, das er dem Buchvorhaben entgegengebracht hat. Der Verlagslektorin, Frau Dipl.-Phys. HAMMIG, habe ich für die große Unterstützung bei dessen Realisierung und für die sehr gute Zusammenarbeit zu danken.

Ilmenau, im März 1979

HEINZ HAFERKORN

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Arbeitsgebiet Optik

1.1.1. Sichtbares Licht

Die Optik ist die Disziplin der Physik, in der die Eigenschaften des Lichtes untersucht werden. Das Licht stellt eine Erscheinung der materiellen Welt dar, deren Wesen erst nach einem gründlichen Studium ihrer Wirkungen erfaßt werden kann.

Zunächst werden wir das Licht als Strahlung ansehen, die von den Lichtquellen ausgeht oder von den Gegenständen reflektiert wird und auf die das menschliche Auge anspricht. Das Bestreben, Weiteres über das Licht zu erfahren, führt zur experimentellen Untersuchung seiner Ausbreitungseigenschaften.

Die Beobachtung der Lichtausbreitung im Vakuum — oder auch in der Luft bei nicht zu großen Strecken — legt das Modell des Lichtstrahls nahe (Abb. 1.1). Wir

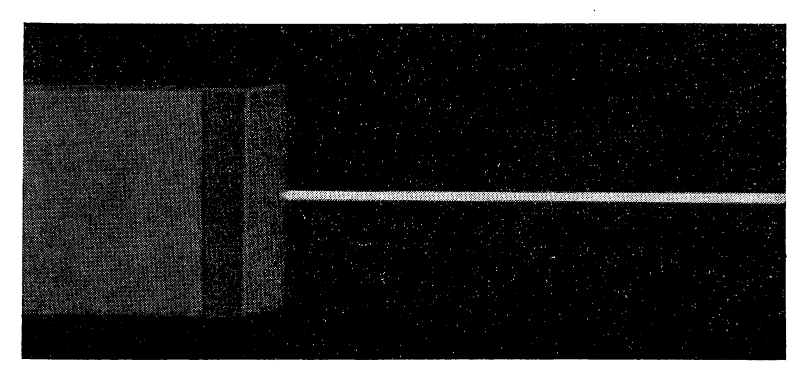


Abb. 1.1
Lichtstreuung an Staubteilchen — Eindruck eines Lichtstrahls

kommen so zur rein geometrischen Behandlung des Lichtweges. Einem einzelnen Lichtstrahl kann jedoch keine physikalische Realität zukommen. Allein die Tatsache, daß Licht eine Energieform darstellt, schließt die Konzentration längs irgendwelcher Strecken aus. Das Strahlenmodell kann deshalb über das reale Wesen des Lichtes nichts aussagen und hat nur eng begrenzte Gültigkeit.

Unter geeigneten Versuchsbedingungen werden Interferenz (Abb. 1.2), Beugung (Abb. 1.3) und Polarisation (Abb. 1.4) des Lichtes beobachtet. Interferenzerscheinungen lassen sich nur mit einem Wellenmodell beschreiben. Eine wesentliche Seite des Lichtes muß also sein Wellencharakter sein. Die Polarisierbarkeit des Lichtes beweist, daß die Lichtwellen transversal sind.

Weitere Experimente, wie z. B. der Faraday-Effekt (Abb. 1.5) und der Kerr-

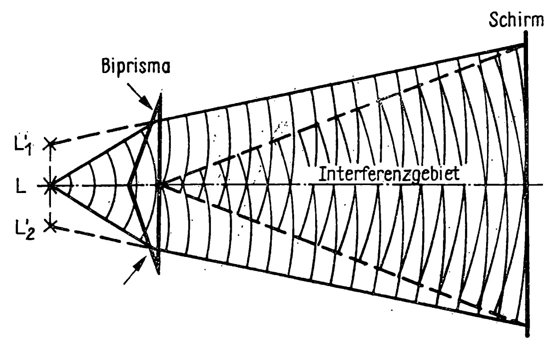


Abb. 1.2
Interferenz des Lichtes am Fresnelschen Biprisma

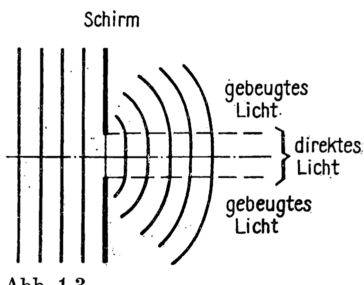


Abb. 1.3
Beugung des Lichtes am Spalt

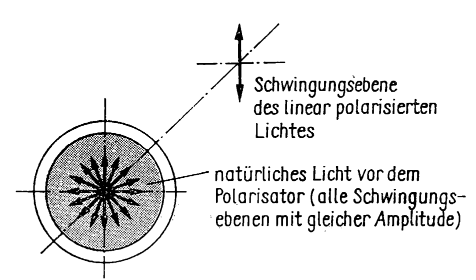


Abb. 1.4
Polarisation des Lichtes durch ein Filter

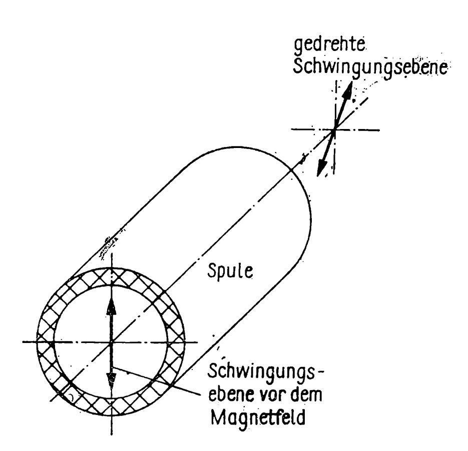


Abb. 1.5
Faraday-Effekt (schematisch)

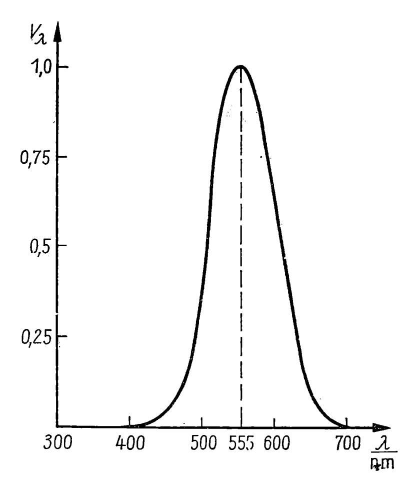


Abb. 1.6
Relative spektrale Hellempfindlichkeit des Auges

Effekt, zeigen, daß es sich um elektromagnetische Wellen handeln muß, also um elektromagnetische Feldenergie.

Bei der Ablenkung des Lichtes durch ein Dispersionsprisma wird weißes Licht in die Spektralfarben zerlegt. Jeder Farbe kann ein kleines Frequenzintervall bzw. im homogenen Stoff ein Wellenlängenintervall zugeordnet werden. Das menschliche Auge spricht auf Licht unterschiedlicher Wellenlänge verschieden stark an. Nach zahlreichen Messungen ist man übereingekommen, als Grundlage für fotometrische Messungen eine Konvention über die relative spektrale Hellempfindlichkeit des Auges V_λ einzuführen. Die größte Hellempfindlichkeit liegt im Gelbgrünen bei der Wellenlänge $\lambda = 555$ nm. Sie ist gleich Eins gesetzt. V_λ als Funktion von λ zeigt Abb. 1.6. Unser Auge nimmt im wesentlichen den Bereich von $\lambda = 400$ nm bis $\lambda = 760$ nm wahr. (In Abb. 1.6 kommt der Anteil oberhalb $\lambda = 700$ nm nicht zum Ausdruck, weil die relative spektrale Hellempfindlichkeit zu klein ist.)

Nun sind wir in der Lage, für die Naturerscheinung Licht im engsten Sinne, nämlich als auf unser Auge einwirkende Energie, den physikalischen Charakter anzugeben, der wesentliche Ausbreitungseigenschaften erfaßt.

> Eine wesentliche Seite des Lichtes ist seine Erscheinungsform als elektromagnetische Welle. Die Wellenlängen liegen für sichtbares Licht zwischen $\lambda = 400$ nm und $\lambda = 760$ nm. Die Energieverteilung auf die einzelnen Frequenzintervalle bestimmt die Farbzusammensetzung und damit den Farbeindruck.

1.1.2. Das elektromagnetische Spektrum

Die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes stellen nur einen schmalen Ausschnitt aus dem gesamten Wellenlängenbereich dar, den die elektromagnetischen Wellen umfassen. An das rote Ende des sichtbaren Teils des Spektrums schließt sich der infrarote, an das violette Ende der ultraviolette Bereich an. Noch größere Wellenlängen als das Infrarot haben die schlechthin als elektrische Wellen bezeichneten Erscheinungen der drahtlosen Nachrichtentechnik. In Richtung kürzerer Wellenlängen folgen auf Ultraviolett die Röntgenstrahlen, die Gammastrahlen und die Höhenstrahlen. Einen Überblick über die Verteilung der einzelnen Bereiche vermittelt die logarithmische Wellenlängenskale der Abb. 1.7.

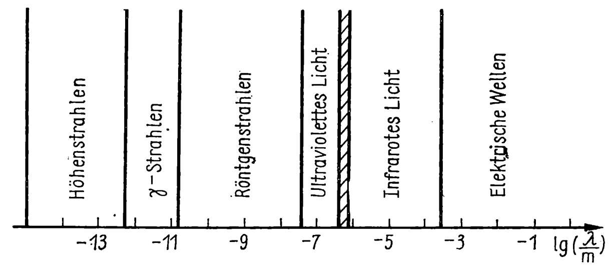


Abb. 1.7
Elektromagnetisches Spektrum (schraffiert: sichtbares Licht)

Die genannte Einteilung des elektromagnetischen Spektrums ist relativ willkürlich vorgenommen worden. Die einzelnen Bereiche überschneiden sich außerdem teilweise. Der wesentliche Gesichtspunkt der Gliederung sind die unterschiedlichen Methoden, mit denen die Wellen erzeugt werden, d. h. die verschiedenen Prinzipien der Strahlungsquellen.

Es erhebt sich nun die Frage, wodurch sich die Wellenlängenbereiche vom physikalischen Gesichtspunkt aus voneinander unterscheiden. Außerdem erscheint es angebracht, das Gebiet „Optik" von einer speziellen Bindung an die relative spektrale Hellempfindlichkeit des Auges zu befreien. Wie weit sollen wir aber dabei gehen? Diese Frage läßt sich nur beantworten, wenn die zweite wesentliche Seite des Lichtes, sein Quantencharakter, in die Betrachtung einbezogen wird.

1.1.3. Lichtquanten

Bei der theoretischen Behandlung von Experimenten, bei denen das Licht in Wechselwirkung mit Stoff tritt, mit dem Wellenmodell ergeben sich Widersprüche grundsätzlicher Natur. Deutlich tritt das Versagen des Wellenmodells bei der Deutung des äußeren lichtelektrischen Effektes hervor. Wir erläutern kurz den experimentellen Befund (Abb. 1.8).

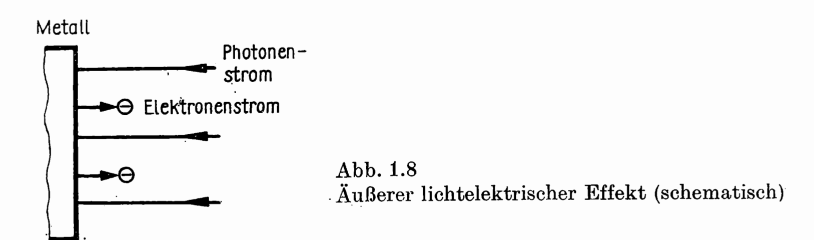


Abb. 1.8
Äußerer lichtelektrischer Effekt (schematisch)

Bei der Bestrahlung einer Metalloberfläche mit Licht können Elektronen ausgelöst werden. Die Messungen ergeben:

- Die Anzahl der austretenden Elektronen ist proportional der Lichtintensität.
- Die kinetische Energie der Elektronen ist proportional der Frequenz des Lichtes.

Die kinetische Energie der Elektronen hängt also nicht von der Lichtintensität ab, wie es mit dem Wellenmodell zu erwarten wäre.

Einstein erkannte 1905, daß die experimentellen Befunde des äußeren lichtelektrischen Effektes mit der Annahme von Lichtquanten der Energie $W = h\nu$ zwanglos erklärt werden können. Es gilt:

- Jedes Quant kann ein Elektron auslösen, so daß die Anzahl der Elektronen von der Anzahl der Lichtquanten abhängt.
  Diese ist durch die Lichtintensität bestimmt.

— Die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen muß gleich der um die Austrittsarbeit W_0 verminderten Energie eines Lichtquants sein. Es ist also

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W_0.$$

Damit ist experimentell eindeutig nachgewiesen:

Eine wesentliche Seite des Lichtes ist sein Quantencharakter.

Wir sind auf einen echten dialektischen Widerspruch geführt worden. Das Licht, als eine Erscheinung der materiellen Welt, hat zwei wesentliche Seiten, die im klassischen Sinne unvereinbar sind, den Wellen- und den Quantencharakter. Deshalb wenden wir oftmals zur Beschreibung der Eigenschaften des Lichtes zwei Modelle an, von denen jedes für sich nur eine wesentliche Seite widerspiegelt.

Die Erscheinungsform als elektromagnetische Welle wird mit dem Wellenmodell beschrieben, das sich besonders eignet, wenn die Ausbreitung des Lichtes zu behandeln ist.

Die Erscheinungsform als Gesamtheit von Lichtquanten wird mit dem Quantenmodell beschrieben, das sich besonders bei der Behandlung der Wechselwirkung des Lichtes mit Stoff bewährt.

Die elektromagnetische Theorie des Lichtes hat von den Maxwellschen Gleichungen auszugehen. Die Eigenschaften der Stoffe werden modellmäßig einbezogen. Die Modelle können rein klassisch angesetzt werden, oder sie werden quantentheoretisch begründet. Eine relativ umfassende Gültigkeit hat die Vorgehensweise der Wellenmechanik, bei der die Stoffe quantentheoretisch, die Felder klassisch dargestellt werden (semiklassische Theorie). Aber auch in dieser nichtrelativistischen Quantentheorie existieren Wellen- und Quantenmodell nebeneinander.

Das Lichtquant wird auch als Photon bezeichnet. Die Photonen stellen Elementarteilchen mit dem Spin Null, der Ruhemasse Null, der Energie $W = h\nu$, der Masse $m = (h\nu)/c^2$ und dem Impuls $p = (h\nu)/c$ dar. Bereits wegen der verschwindenden Ruhemasse muß eine konsequente Theorie der Photonen eine relativistische Theorie sein.

Eine formale Vereinigung von Wellen- und Quantenmodell wird in der Quantenelektrodynamik vorgenommen. Diese ist ein Spezialfall der Quantenfeldtheorie, in der grundsätzlich die Elementarteilchen aus einer Quantelung der zugeordneten Wellenfelder hervorgehen.

Die Anzahl der Lichtquanten, die auf die Energieeinheit entfallen, beträgt

$$z = \frac{1}{h\nu} = \frac{\lambda}{hc}.$$

Mit $h = 6{,}6252 \cdot 10^{-34}$ W · s² und $c = 2{,}99792 \cdot 10^8$ m · s⁻¹ erhalten wir die Quantenanzahl pro Wattsekunde, die der Abb. 1.9 zu entnehmen ist.

Mit abnehmender Quantenanzahl pro Energieeinheit oder pro Volumeneinheit tritt der Quantencharakter gegenüber dem Wellencharakter stärker in den Vordergrund. Im elektromagnetischen Spektrum liegt das sichtbare Licht bei mittleren

Quantenanzahlen pro Energieeinheit. Quanten- und Wellencharakter kommen also weitgehend gleichwertig zur Geltung. Wir vereinbaren deshalb:

> Als Licht im erweiterten Sinne bezeichnen wir den Teil des elektromagnetischen Spektrums, in dem Wellen- und Quantencharakter gleichrangig zu berücksichtigen sind.

Scharfe Grenzen können nicht gezogen werden. Die eine Grenze liegt innerhalb des infraroten Bereichs, die andere im Gebiet der Röntgenstrahlen. Die Mittelstellung des Lichtes im elektromagnetischen Spektrum bedingt die Vielfalt an Erscheinungen und Methoden der Optik.

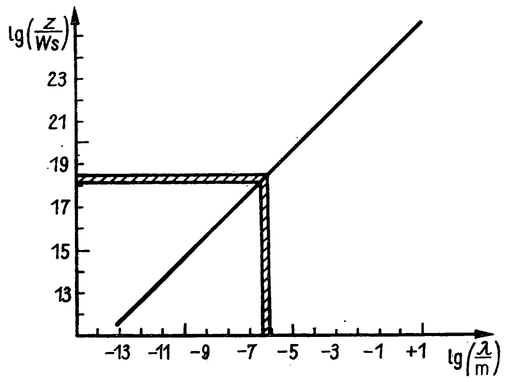


Abb. 1.9
Quantenanzahl pro Wattsekunde im elektromagnetischen Spektrum

Im Sinne der Lichttechnik wird nur für den sichtbaren Teil des elektromagnetischen Spektrums der Begriff „Licht" verwendet. Die Anteile vom Ultravioletten (UV) über das Licht (VIS, von engl. *visible* = sichtbar) bis zum Infraroten (IR) werden als optische Strahlung bezeichnet.

1.1.4. Gliederung und Entwicklung des Arbeitsgebietes

Optik als physikalische Disziplin. Eine Gliederung der Optik vom physikalischen Standpunkt aus ist durch die Modelle gegeben, mit denen die Eigenschaften des Lichtes behandelt werden können. Wir unterscheiden:

— Geometrische Optik (Strahlenmodell)
— Wellenoptik (Wellenmodell)
— Quantenoptik (Quantenmodell).

Die Mittelstellung des Lichtes innerhalb des elektromagnetischen Spektrums bringt enge Beziehungen zu anderen physikalischen Disziplinen mit sich. Im langwelligen Bereich überschneiden sich die Arbeitsgebiete Optik und Mikrowellenphysik, im kurzwelligen Bereich ist der Übergang zur Röntgenphysik fließend.

Das Wellenmodell bewährt sich auch in der Elektrophysik. Das Quantenmodell erfaßt die direkte Verbindung zur Molekül-, Atom-, Festkörper- und Elementarteilchenphysik.

Die Beschäftigung mit der Optik als physikalischer Disziplin dient vorwiegend der Erkenntnis und der Bereitstellung von neuen Prinzipien für die technische Anwendung.

Optik als technische Disziplin. In bestimmten technischen Systemen werden die optischen Gesetze und Erscheinungen, also optische Wirkprinzipien, genutzt. Diese technisch-optischen Systeme lösen im wesentlichen zwei Aufgabenkomplexe:

- Aufgaben der Informationstechnik
- Aufgaben der Energietechnik.

Den weitaus umfassendsten Einsatzbereich stellen die Aufgaben der Informationstechnik, also die Aufgaben Informationserfassung, -übertragung, -wandlung, -speicherung und -auswertung, dar.

Die Informationstechnik befaßt sich mit Informationen über

- Erscheinungen, Prozesse und Systeme in der materiellen Welt, deren gesetzmäßige Zusammenhänge und mathematische Beschreibung im Rahmen der Einzelwissenschaften zum Zweck der Erkenntnis
- technische Prozesse und Systeme zum Zweck ihrer Weiterentwicklung, ihrer meßtechnischen Erfassung, ihrer Regelung und Steuerung
- gesellschaftliche, natürliche und technische Prozesse und Systeme zum Zweck der Nachrichtenübertragung.

Technische Systeme zur Lösung der genannten Aufgaben werden Geräte genannt.

> Die Gerätetechnik ist die technische Disziplin, deren Gegenstand die Vorstufen der Produktion, die Produktion und die Konsumtion von Geräten ist.

Die Technische Optik ist damit vorwiegend mit der Gerätetechnik verbunden.

Aufgaben der Energietechnik, also Aufgaben der Energieübertragung, -wandlung, -speicherung, -regelung und -steuerung, werden zum gegenwärtigen Zeitpunkt nur in geringem Umfang mit technisch-optischen Systemen gelöst. Beispiele sind die Beleuchtungstechnik, die Energieübertragung mittels Laser zur Materialbearbeitung und die Versuche zur Energieerzeugung über die gesteuerte Kernfusion, bei denen das Plasma mit Laserbündeln erhitzt wird.

Entwicklungstendenzen. In der Entwicklung der optischen Geräte zeichnen sich folgende prinzipielle Tendenzen ab:

- Im Zuge der Rationalisierung von Konstruktion und Fertigung sowie zur Verbesserung des Kundenservices werden optische Geräte mit gleicher Grundfunktion zu Gerätesystemen zusammengefaßt.
- Die optischen Geräte werden aus optimierten Baugruppen gebildet und damit

selbst optimiert. Die geringere Komplexität der Baugruppen wird in vielen Fällen die mathematische Modellierung der Funktion und ihrer Analyse ermöglichen, so daß die Optimierung der Baugruppen quantitativ erfaßbar wird. Optimierte Baugruppen können zu Einheitssystemen zusammengefaßt werden.

— Die Koppelung von Optik und Elektronik wird weiterhin wachsende Tendenz zeigen. Elektronische Baugruppen erweitern und ergänzen die Leistungsfähigkeit der technisch-optischen Systeme, indem sie das optische Signal wandeln, registrieren und auswerten. Die klassische Kombination Feinmechanik — Optik wird verstärkt übergehen in die Kombination Feinmechanik — Optik — Elektronik. Dazu werden besonders die Optoelektronik und die Mikroelektronik beitragen. Durch den Einsatz von Mikrorechnern ist es möglich, auch in optischen Systemen Regel- und Steuerprozesse in größerem Umfang zu realisieren.

— In den Bauelementen können neue optische Wirkprinzipien und neue optische Werkstoffe eingesetzt sein. In wachsendem Umfang werden die Ergebnisse der Laserphysik, der nichtlinearen Optik, der Kohärenzoptik und der Optik der Wellenleiter, z. B. in Form der integrierten Optik, in die technische Anwendung übergeführt.

1.2. Bezeichnungsgrundsätze

1.2.1. Formelzeichen

Für die geometrische Optik sind die Bezeichnungsrichtlinien und die Formelzeichen unabhängig von den anderen Gebieten der Optik festgelegt worden.

Die Standards zur Vereinheitlichung der Formelzeichen der geometrischen Optik entwickelten sich in den letzten Jahren folgendermaßen:

DIN 1335	(1958), letztes für die DDR gültiges DIN-Blatt,
TGL 34-5	(1959), erstes für die DDR gültiges TGL-Blatt,
RS 1182-67	(1967), RGW-Empfehlung für das sozialistische Wirtschaftsgebiet,
TGL 20249	(1970), Neufassung unter Berücksichtigung der RGW-Empfehlung.

Den weiteren Ausführungen liegt der Standard TGL 20249 zugrunde. In Einzelfällen werden aus methodischen Gesichtspunkten von TGL 20249 abweichende Festlegungen getroffen. Die Festlegungen in DIN 1335 entsprechen weitgehend denjenigen in TGL 20249.

Die grundlegenden Richtlinien sind in der Tab. 1.1, ausgewählte Formelzeichen in der Tab. 1.2 enthalten.

Abweichungen der in den Tabellen angegebenen Regeln gegenüber TGL 20249. Dimensionslose Größen, die als Quotient aus Bildraum- und Objektraumgrößen gebildet werden, werden nach TGL mit ungestrichenen Buchstaben; die Pfeilhöhe wird mit p; die Entfernung axialer Pupillenpunkt — axialer Objektpunkt wird mit k bezeichnet.

Für den halben Öffnungswinkel wird nach TGL nicht u, für den halben Feldwinkel nicht w verwendet.

Tabelle 1.1
Grundsätze für die Auswahl von Formelzeichen

Element	Darstellung	Beispiel
Punkte	lateinische Großbuchstaben	Objektpunkt A
Strecken	lateinische Kleinbuchstaben	Objektgröße y
Winkel	griechische Kleinbuchstaben	Zentriwinkel φ
Größen des Bildraumes	gestrichen	Bildgröße y'
nichtkonjugierte Größen	überstrichen (bei Bedarf)	Brennpunkt $\overline{F}$
dimensionslose Größen	griechische Buchstaben	Abbildungsmaßstab $\beta' = \frac{y'}{y}$
Pupillengrößen	mit Index p	Zentriwinkel φ_p für den Hauptstrahl

Tabelle 1.2
Ausgewählte Formelzeichen

Punkte	
Objektpunkt	A
Krümmungsmittelpunkt	C
Brennpunkt	F
Hauptpunkt	H
Knotenpunkt (Nodus)	N
Achsenpunkt der Pupille	P
Scheitelpunkt (Vertex)	V
Strecken und andere Größen	
Entfernung Hauptpunkt — axialer Objektpunkt (Objektweite)	a
Entfernung axialer Objektpunkt — beliebiger Achsenpunkt	b
Entfernung Krümmungsmittelpunkt — axialer Objektpunkt	c
Linsendicke	d
Abstand zweier benachbarter Flächenscheitel	e
Brennweite	f
Pfeilhöhe	g
Durchstoßhöhe eines Strahls	h
Hauptpunktspanne	i
Öffnungszahl	k
Strahllänge	l
Brechzahl	n
Entfernung axialer Pupillenpunkt — axialer Objektpunkt	p
Krümmungsradius	r
Schnittweite	s

Tabelle 1.2 Fortsetzung

Strecken	
Optisches Intervall	t
Halber Öffnungswinkel	u
Halber Feldwinkel	w
Querkoordinate eines Objektpunktes	x
Querkoordinate eines Objektpunktes	y
Entfernung Brennpunkt — axialer Objektpunkt	z
Winkel	
Ablenkung eines Lichtstrahls	δ
Winkel zwischen Lichtstrahl und Einfallslot (Einfallswinkel)	ε
Winkel zwischen Flächennormale und optischer Achse (Zentriwinkel)	φ
Winkel zwischen Lichtstrahl und optischer Achse (Schnittwinkel)	σ
Azimut	ψ
Dimensionslose Größen	
Tiefenmaßstab	α'
Abbildungsmaßstab	β'
Winkelverhältnis	γ'
Relative Teildispersion	ϑ
Abbesche Zahl	ν
Höhenverhältnis	ω
Numerische Apertur	A
Vergrößerung	Γ'

1.2.2. Vorzeichenregeln

Bei der Anwendung von Beziehungen der geometrischen Optik in der Optik-Konstruktion werden Strecken und Winkel nach bestimmten Grundsätzen mit Vorzeichen versehen. Vorausgesetzt wird der Standardfall rotationssymmetrischer optischer Systeme.

Ein rotationssymmetrisches optisches System hat eine Symmetrieachse, die als optische Achse bezeichnet wird.

Die Funktion der optischen Systeme ist die optische Abbildung. Die optische Abbildung transformiert Größen des Objektraums in Größen des Bildraums.

Die Punkte des Objekt- und des Bildraums sind durch ihre Koordinaten festgelegt. Im allgemeinen verwendet man rechtshändige kartesische Koordinatensysteme.

Vereinbarungen: Die Koordinaten des Objektraumes werden mit x, y, z bezeichnet; die Koordinaten des Bildraumes werden mit x', y', z' bezeichnet. Die z-Achse und die z'-Achse fallen mit der optischen Achse zusammen. Die objektseitige Lichtrichtung wird in Zeichnungen im allgemeinen von links nach rechts angenommen (Abb. 1.10).

Definition (Abb. 1.11). Ein außeraxialer Objektpunkt und die optische Achse spannen die Meridionalebene auf. Eine Sagittalebene steht senkrecht auf der Meridionalebene und enthält einen ausgewählten Lichtstrahl.

Vereinbarung: Die Meridionalebene wird im allgemeinen in die Zeichenebene gelegt und als y-z-Ebene verwendet.

Vorzeichenvereinbarungen: Eine Strecke ist positiv, wenn der für die Vorzeichenfestlegung ausgewählte Bezugspunkt am linken Ende der Strecke liegt.

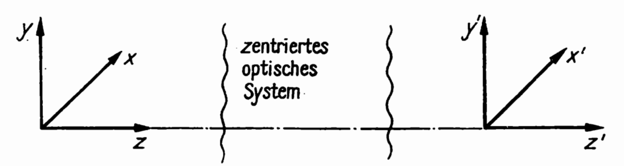


Abb. 1.10
Koordinatensysteme bei einer zentrierten optischen Abbildung

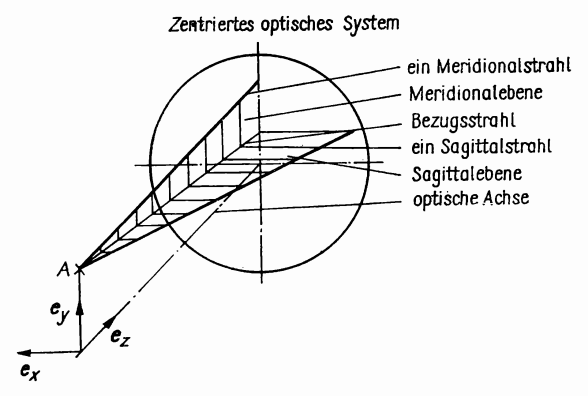


Abb. 1.11
Meridional- und Sagittalebene

Zur Bestimmung des Vorzeichens eines Winkels zwischen einem Lichtstrahl und einer Bezugsgeraden dreht man in Gedanken den Lichtstrahl auf dem kürzesten Weg in den Bezugsschenkel. Bei Drehung im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeiger) ist der Winkel positiv.

Das Vorzeichen von Strecken und Winkeln wird in die Zeichnungen mit eingetragen. Der Drehsinn zur Bestimmung des Vorzeichens von Winkeln kann in Zeichnungen durch Anbringen von nur einem Maßpfeil gekennzeichnet werden.

Beispiele für die brechende Fläche (Abb. 1.12) enthält die Tab. 1.3.

Anmerkung: In TGL 20249 ist festgelegt, daß die Vorzeichen der Strecken und Winkel in Zeichnungen einzuklammern sind. Davon wird hier abgewichen.

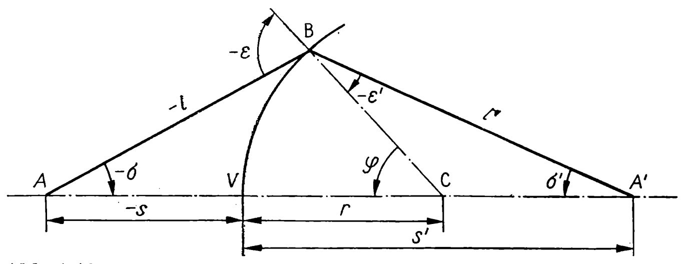


Abb. 1.12
Brechende Kugelfläche

Tabelle 1.3
Bezugsgrößen für die Vorzeichenfestlegung

Element	Formelzeichen	Bezugspunkt bzw. -schenkel
Schnittweite	s	Flächenscheitel V
Flächenradius	r	Flächenscheitel V
Strahllänge	l	Flächendurchstoßpunkt B
Schnittwinkel	σ	Optische Achse
Zentriwinkel	φ	Optische Achse
Einfallswinkel	ε	Einfallslot (Flächennormale)
Brechungswinkel	ε'	Einfallslot (Flächennormale)

2. Physikalische Grundlagen

2.1. Lichtwellen und -strahlen

2.1.1. Elektromagnetische Wellen

Das Modell der ebenen Welle. Im Abschnitt 1.1.1. haben wir erläutert, daß eine wesentliche Seite des Lichtes seine Erscheinungsform als elektromagnetische Welle ist. In einer elektromagnetischen Welle sind die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ gesetzmäßig zeitlich und örtlich veränderlich. Die elektromagnetische Welle transportiert elektrische und magnetische Feldenergie.

> Die elektromagnetische Welle ist die Ausbreitungsform der elektromagnetischen Feldenergie.

Für theoretische Untersuchungen über die Eigenschaften der Lichtwelle wird in vielen Fällen das Modell der ebenen periodischen elektromagnetischen Welle verwendet. Bei einer ebenen Welle ist die Schwingungsphase auf zueinander parallelen Ebenen, den Wellenflächen, konstant. In einer periodischen elektromagnetischen Welle sind die elektrische und magnetische Feldstärke zeitlich und örtlich periodisch Es gilt:

> In einer ebenen elektromagnetischen Welle schwingen die elektrische und die magnetische Feldstärke in je einer Ebene zeitlich und örtlich periodisch. Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$, die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ und der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung $\boldsymbol{s}$ bilden ein Rechtssystem. Die Wellenflächen sind eben (Abb. 2.1).

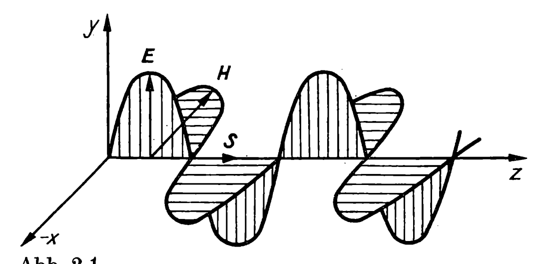


Abb. 2.1
Darstellung der Feldstärken in einer elektromagnetischen Welle

Die optischen Wirkungen der elektromagnetischen Welle werden vorwiegend durch den elektrischen Anteil bestimmt. Wir beschränken deshalb die weiteren Beziehungen zunächst auf die elektrische Feldstärke.

Die reelle Darstellung der ebenen Welle. Die Beschreibung der Welle zu einer bestimmten Zeit $t =$ const ergibt eine periodische Funktion des Weges l. Wir

Länge einer Periode	Wellenlänge λ	$c = \frac{\lambda}{T}$	Dauer einer Periode	Schwingungsdauer T
Anzahl der Perioden pro Längeneinheit	Wellenzahl $k = \frac{1}{\lambda}$	$c = \frac{\nu}{k}$	Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit	Frequenz $\nu = \frac{1}{T}$
Anzahl der Perioden auf 2π Längeneinheiten	Kreiswellenzahl $w = 2\pi k$	$c = \nu\lambda$	Anzahl der Perioden in 2π Zeiteinheiten	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$

Anfangsphase δ

Amplitude A

Abb. 2.2a)
Darstellung der sinusförmigen Welle (t = const)

$$E = A \cos (wl - \omega t + \delta)$$

$$E = A \cos [2\pi(kl - \nu t) + \delta]$$

Abb. 2.2b)
Darstellung der sinusförmigen Welle (l = const)

nehmen an, daß diese Funktion sinusförmig ist (Abb. 2.2a). Auch die Darstellung der Schwingung der elektrischen Feldstärke an einem festen Ort $l = \text{const}$ ergibt dann eine sinusförmige Kurve (Abb. 2.2b).

Räumliche und zeitliche Periodizität werden mit den Größen beschrieben, die in der Tab. 2.1 zusammengestellt sind. Die Anfangsphase δ ist die Schwingungsphase, die den Zustand der Welle zur Zeit $t = 0$ am Ort $l = 0$ bestimmt. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Schwingungsphasen ausbreiten, nennen wir Phasengeschwindigkeit c. Nach Tab. 2.1 gilt:

$$c = \nu\lambda. \tag{2.1}$$

Die sinusförmige Welle kann mit einer Sinus- oder einer Kosinusfunktion mathematisch beschrieben werden. Weil die genannten Winkelfunktionen die Periode 2π haben, ist

$$E = A \sin(wl - \omega t + \delta) \quad \text{oder} \quad E = A \cos(wl - \omega t + \delta) \qquad (2.2\text{a, b})$$

zu setzen. (In die Tab. 2.1 wurden am Beispiel der Kosinusfunktion weitere Schreibweisen eingetragen, die durch das Umrechnen der Schwingungsgrößen entstehen.)

Die Vorzeichen von wl und ωt müssen entgegengesetzt gewählt werden, wenn die Gleichungen (2.2a, b) eine Welle beschreiben sollen, die sich in positiver l-Richtung ausbreitet.

Oftmals ist das Verhalten mehrerer Wellen unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung zu untersuchen. Dazu ist es notwendig, die Ausbreitungsrichtung durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{s}$ und einen beliebigen Punkt des Wellenfeldes durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ anzugeben. Für den vom Ursprung aus durch die Welle zurückgelegten Weg gilt nach Abb. 2.3: $l = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}$. (Das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ gibt die Länge der Projektion des Vektors $\boldsymbol{r}$ auf die Richtung des Vektors $\boldsymbol{s}$ an.)

Damit gehen die Gl. (2.2a) und Gl. (2.2b) über in

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \sin[w(\boldsymbol{rs}) - \omega t + \delta] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \cos[w(\boldsymbol{rs}) - \omega t + \delta]. \qquad (2.3\text{a, b})$$

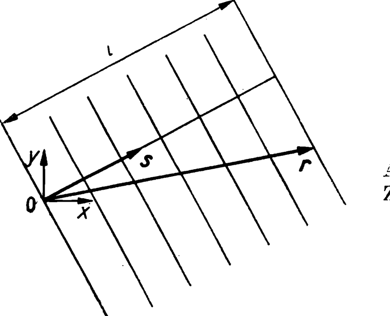


Abb. 2.3
Zur Ableitung der Gl. (2.3)

Komplexe Darstellung der ebenen Welle. Die elektrische Feldstärke als eine beobachtbare Größe muß durch reelle Funktionen dargestellt werden. Gl. (2.3a) und Gl. (2.3b) beschreiben also den physikalischen Sachverhalt unseres Modells der ebenen Welle. Zur rechnerischen Vereinfachung theoretischer Ableitungen ist

manchmal die komplexe Schreibweise der elektrischen Feldstärke formal anwendbar. Es gilt zunächst:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\ \mathrm{Im}\,\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}[w(\boldsymbol{rs})-\omega t+\delta]}\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\ \mathrm{Re}\,\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}[w(\boldsymbol{rs})-\omega t+\delta]}\}.$$

Beide Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}[w(\boldsymbol{rs})-\omega t+\delta]}. \tag{2.4}$$

Von den unter Anwendung von Gl. (2.4) erhaltenen Ergebnissen hat dann nur der Realteil oder der Imaginärteil physikalische Bedeutung.

Die komplexe Amplitude. Mit der Anfangsphase δ und dem Betrag der Amplitude A kann die komplexe Amplitude

$$a = A\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} \tag{2.5}$$

gebildet werden. Setzen wir noch

$$w = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

ein, dann erhalten wir aus Gl. (2.4) mit Gl. (2.5)

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}\ \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)}. \tag{2.6}$$

Die komplexe Amplitude a stellt die formale Zusammenfassung des Betrags der Amplitude A und der Anfangsphase δ der Welle dar.

Wellengleichung. Die Gl. (2.6) für die ebene periodische Welle ist eine Lösung der aus den Maxwellschen Gleichungen für homogene isotrope Nichtleiter

$$\dot{\boldsymbol{B}} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0, \qquad -\dot{\boldsymbol{D}} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0 \tag{2.7a, b}$$

folgenden Wellengleichung ($\boldsymbol{B}$ magnetische Induktion, $\boldsymbol{H}$ magnetische Feldstärke, $\boldsymbol{D}$ elektrische Verschiebung, $\boldsymbol{E}$ elektrische Feldstärke). In isotropen Stoffen gilt außerdem

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_r\mu_0}\boldsymbol{B}. \tag{2.8a, b}$$

Darin sind ε_0 und μ_0 die elektrische bzw. magnetische Feldkonstante, ε_r die relative Dielektrizitätskonstante, μ_r die relative Permeabilität. ε_r und μ_r sollen orts- und zeitunabhängig sein. Aus Gl. (2.7b) geht mit Gl. (2.8b)

$$-\varepsilon_r\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{\mu_r\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.7c}$$

hervor. Wir differenzieren nach der Zeit und setzen $\dot{\boldsymbol{B}}$ aus Gl. (2.7a) ein. Wir erhalten

$$\varepsilon_r\varepsilon_0\ddot{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{\mu_r\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0.$$

Es ist

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{E} = \text{grad div}\,\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E}$$

mit

$$\Delta\boldsymbol{E} = \text{div grad}\,E_x \cdot \boldsymbol{e}_x + \text{div grad}\,E_y \cdot \boldsymbol{e}_y + \text{div grad}\,E_z \cdot \boldsymbol{e}_z \qquad \text{und}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{und} \qquad \text{div}\,\boldsymbol{E} = 0.$$

Damit geht aus Gl. (2.7c)

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 \ddot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \Delta\boldsymbol{E}$$

hervor. Wir führen die Abkürzung

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \doteq \frac{1}{c^2}$$

ein und erhalten

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\,\ddot{\boldsymbol{E}}. \tag{2.9}$$

Gl. (2.9) ist die partielle Differentialgleichung zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke im homogenen isotropen Nichtleiter, in dem keine Überschußladungen enthalten sind. Sie wird Wellengleichung genannt.

Für das Vakuum ist $\varepsilon_r = \mu_r = 1$. Die absolute Brechzahl des Nichtleiters, die durch $n = c_0/c$ definiert ist, ist also mittels

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tag{2.10}$$

auf elektromagnetische Stoffgrößen zurückzuführen. Im allgemeinen sind die Stoffe, die das Licht nicht absorbieren, nicht ferromagnetisch, so daß mit guter Näherung $\mu_r = 1$ ist und $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ gilt.

Für die ebene periodische Welle nach Gl. (2.6) ist

$$\text{grad}\,E_x = \frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}\,E_x \cdot \mathbf{s} \qquad \text{und} \qquad \text{div grad}\,E_x = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,E_x,$$

also

$$\Delta\boldsymbol{E} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,\boldsymbol{E}.$$

Da auch

$$\frac{1}{c^2}\,\ddot{\boldsymbol{E}} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,\boldsymbol{E}$$

gilt, erfüllt die Gl. (2.6) die Wellengleichung. Es gibt aber noch eine Vielzahl weiterer Lösungen der Wellengleichung, u. a. auch die der Kugelwelle.

Intensität der ebenen Welle. Die magnetische Feldstärke der ebenen Welle läßt sich aus der elektrischen Feldstärke mit der Gl. (2.7a) unter Berücksichtigung von Gl. (2.8b) berechnen. Mit Gl. (2.6) erhalten wir wegen rot $\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u}$ rot $\boldsymbol{v}$ + grad $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$

$$\mathrm{rot}\left\{\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)}\right\} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} + \left[\mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)}\right]\times \boldsymbol{a}.$$

Bei der ebenen Welle ist rot $\boldsymbol{a} = 0$, so daß

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{s}\times \boldsymbol{E})$$

wird. Integration nach der Zeit ergibt für die periodische Welle

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu_r\mu_0}\int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\mu_r\mu_0 c}(\boldsymbol{s}\times \boldsymbol{E})$$

bzw.

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,(\boldsymbol{s}\times \boldsymbol{E}). \tag{2.11}$$

Die Energiestromdichte, also die sekundlich durch eine senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende Flächeneinheit hindurchgehende Feldenergie, folgt aus

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times \boldsymbol{H}. \tag{2.12}$$

$\boldsymbol{S}$ ist der Poyntingvektor.

Für die ebene Welle gilt mit Gl. (2.11)

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,[\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{s}\times \boldsymbol{E})].$$

Nach dem Entwicklungssatz für doppelte Vektorprodukte und mit $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s} = 0$ ($\boldsymbol{E}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{s}$) ergibt sich

$$\boldsymbol{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{s}. \tag{2.13}$$

Wir haben bereits betont, daß nur der Realteil oder der Imaginärteil der komplexen Feldstärke physikalisch sinnvoll ist. Diese Aussage wird bei der Produktbildung wesentlich. Für die Summe zweier komplexer Zahlen gilt:

Realteil der Summe = Summe der Realteile beider Summanden.

Deshalb dürfen komplexe Feldstärken addiert werden. Für das Produkt zweier komplexer Zahlen gilt aber:

Realteil des Produktes $\neq$ Produkt aus den Realteilen der Faktoren.

Der Realteil des Produktes zweier komplexer Zahlen beschreibt demnach nicht den physikalischen Vorgang, der durch das Produkt aus den Realteilen der Faktoren gegeben ist. Wir können trotzdem die komplexe Schreibweise verwenden, wenn wir

statt $\boldsymbol{E}^2$ den Ausdruck

$$\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*)\right]^2$$

einsetzen ($\boldsymbol{E}^*$ ist zu $\boldsymbol{E}$ konjugiert komplex). Wegen $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^* = 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{E})$ ist gesichert, daß nur die physikalisch sinnvollen Realteile multipliziert werden. Damit erhalten wir

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*)^2\,\boldsymbol{s}.$$

Durch die Periodizität der elektrischen Feldstärke schwankt auch die Energiestromdichte zeitlich und räumlich. Die Lichtdetektoren registrieren jedoch den Mittelwert über eine größere Anzahl an Perioden. Diesen Mittelwert berechnen wir aus

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\left\{a^2\cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)} + a^{*2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{4\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)} + 2aa^*\right\}\boldsymbol{s}.$$

Die beiden ersten Summanden sind periodische Funktionen, deren Mittelwert über eine Periode verschwindet. Der dritte Summand ist zeitlich konstant, so daß

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,aa^*\boldsymbol{s} \tag{2.14}$$

gilt. Der Betrag des Zeitmittelwertes des Poyntingvektors $|\langle \boldsymbol{S}\rangle|$ wird als Intensität der Welle bezeichnet. Mit $\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0 = 1/c^2$ ergibt sich für die Intensität I

$$I = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 c}{2}\,aa^*. \tag{2.15}$$

2.1.2. Polarisationsarten

Die Lichtwelle ist eine transversale Welle, so daß sie polarisiert werden kann. In einer polarisierten Welle beschreibt der Vektor der elektrischen Feldstärke in jeder zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene eine bestimmte Bahn. Diese ist, wie wir noch beweisen werden, eine gerade Strecke, ein Kreis oder eine Ellipse. Dementsprechend unterscheidet man verschiedene Polarisationsarten.

Die Lichtwelle kann linear, zirkular oder elliptisch polarisiert werden.

Die linear polarisierte Welle hat eine raumfeste Ebene, in der die elektrische Feldstärke schwingt. In der senkrecht dazu liegenden Ebene muß dann die magnetische Feldstärke schwingen. Historisch hat sich folgende Bezeichnungsweise eingebürgert:

Die elektrische Feldstärke schwingt in der Schwingungsebene; die magnetische Feldstärke schwingt in der Polarisationsebene.

Es ist auch möglich, daß sich linear polarisierte Wellen gleicher Phase, aber verschiedener Schwingungsrichtung in der gleichen Richtung ausbreiten. In solchem Licht, das partiell linear polarisiert heißt, ist eine Schwingungsrichtung bevorzugt enthalten. Im theoretischen Grenzfall, bei dem alle Schwingungsrichtungen vorkommen und alle Amplituden gleich sind, wird von natürlichem Licht gesprochen.

Eine linear polarisierte Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, wird nach Gl. (2.2a) in reeller Form durch

$$E = A \sin (wz - \omega t + \delta)$$

beschrieben. Wir erhalten experimentell linear, zirkular oder elliptisch polarisiertes Licht, wenn wir zwei phasenverschobene, senkrecht zueinander schwingende Wellen gleicher Frequenz überlagern. Diesen Vorgang wollen wir theoretisch untersuchen.

Wir nehmen die x- bzw. die y-Richtung als Schwingungsrichtung an. Die elektrischen Feldstärken der Wellen lauten

$$E_x = A_x \sin (wz - \omega t + \delta_x) \quad \text{und} \quad E_y = A_y \sin (wz - \omega t + \delta_y).$$

Wir untersuchen die resultierende Feldstärke und deren Schwingung am festen Ort $z = z_0$. Die Anteile wz_0 in den Argumenten der Sinusfunktionen gehen dann in die Anfangsphase am Ort $z = z_0$ ein. Wir setzen

$$wz_0 + \delta_x = \delta_x', \qquad wz_0 + \delta_y = \delta_y'$$

und erhalten

$$E_x = A_x \sin (-\omega t + \delta_x'), \qquad E_y = A_y \sin (-\omega t + \delta_y').$$

Die Phasendifferenz zwischen den Wellen beträgt

$$\delta = \delta_y' - \delta_x'. \tag{2.16}$$

Abbildung 2.4 demonstriert das Entstehen einer zirkular polarisierten Schwingung für den Sonderfall

$$A_x = A_y, \quad \delta_x' = -90°, \quad \delta_y' = 0°, \quad \delta = 90°.$$

E
E_x
E_x
E
E_y
E
E_y
E_x
E_y
E
$t = 0$
$t = \frac{\pi}{4\omega}$
$t = \frac{\pi}{2\omega}$
$t = \frac{3\pi}{4\omega}$

Abb. 2.4
Entstehung der zirkular polarisierten Welle

Für den allgemeinen Fall ist in der Tab. 2.2 die Kurvengleichung

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2E_xE_y}{A_xA_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \tag{2.17}$$

abgeleitet worden.

Tabelle 2.2
Ableitung der Gleichung für die Schwingungsellipse

Komponenten der elektrischen Feldstärke $E_x = A_x \sin(-\omega t + \delta'_x)$, $E_y = A_y \sin(-\omega t + \delta'_y)$
Auflösen nach $-\omega t$ $-\omega t = \arcsin \frac{E_x}{A_x} - \delta'_x$, $\quad -\omega t = \arcsin \frac{E_y}{A_y} - \delta'_y$
Gleichsetzen der rechten Seiten $\arcsin \frac{E_y}{A_y} = \arcsin \frac{E_x}{A_x} + \delta'_y - \delta'_x$
Einführen der Phasendifferenz $\delta = \delta'_y - \delta'_x$ und Umformen $\frac{E_y}{A_y} = \sin\left(\arcsin \frac{E_x}{A_x} + \delta\right)$
Anwenden der Additionstheoreme $\frac{E_y}{A_y} = \frac{E_x}{A_x} \cos \delta + \cos\left(\arcsin \frac{E_x}{A_x}\right) \cdot \sin \delta$
Anwenden von $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ $\frac{E_y}{A_y} = \frac{E_x}{A_x} \cos \delta + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2} \sin \delta$
Umformen $\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2E_xE_y}{A_xA_y} \cos \delta = \sin^2 \delta$

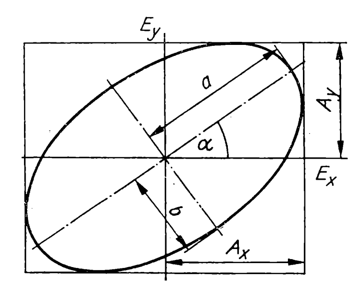


Abb. 2.5
Schwingungsellipse

Die quadratische Gleichung (2.17) stellt einen Kegelschnitt dar (Abb. 2.5). Weil die Bahnkurve des Feldstärkevektors innerhalb des durch $2A_x$ und $2A_y$ aufgespannten Rechtecks bleiben muß, kann es nur ein Kreis, eine Ellipse oder eine gerade Linie sein.

In Tab. 2.3a und Tab. 2.3b sind außerdem die Beziehungen enthalten, mit denen die Lage der Bahnkurven und das Achsenverhältnis der Ellipsen bestimmt werden

Tabelle 2.3 a)
Ableitung der Gleichung zur Berechnung der Achsenlage der Ellipse

Hauptachsentransformation der Kurvengleichung

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\cos\delta}{\frac{A_y}{A_x} - \frac{A_x}{A_y}}$$

Einführung der Abkürzung

$$\tan\psi = \frac{A_y}{A_x}$$

Einsetzen und Anwenden eines Additionstheorems

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\cos\delta}{\tan\psi - \frac{1}{\tan\psi}} = 2\cos\delta\cdot\tan 2\psi$$

Tabelle 2.3 b)
Ableitung der Gleichung zur Berechnung des Hauptachsenverhältnisses der Ellipse

Parameterdarstellung der Ellipsenfläche

$$F = \frac{1}{2}\oint (E_x\dot{E}_y - E_y\dot{E}_x)\,\mathrm{d}t$$

Differentiation der Komponenten der elektrischen Feldstärke

$$\dot{E}_x = -\omega A_x\cos(-\omega t + \delta'_x), \qquad \dot{E}_y = -\omega A_y\cos(-\omega t + \delta'_y)$$

Einsetzen in die Flächengleichung, Anwenden von Additionstheoremen

$$F = -\frac{1}{2}\,\omega A_x A_y \sin(\delta'_x - \delta'_y)\int_0^{(2\pi)/\omega}\mathrm{d}t$$

Einführen von $\delta = \delta'_y - \delta'_x$ und Integrieren

$$F = \pi A_x A_y \sin\delta$$

Ausdrücken der Ellipsenfläche mit den Halbachsen

$$F = \pi ab$$

Gleichsetzen der Flächengleichungen und Beachten, daß A_x, A_y, a, b positiv sind

$$ab = \pm A_x A_y \sin\delta$$

Intensität der ebenen Wellen (Amplituden A_x und A_y)

$$I = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 c}{2}(A_x^2 + A_y^2)$$

Intensität der ebenen Wellen (Amplituden a und b)

$$I = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 c}{2}(a^2 + b^2)$$

Tabelle 2.3b (Fortsetzung)

Gleichsetzen der Intensitäten $a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2$
Division durch ab $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \pm\left(\frac{A_y}{A_x} - \frac{A_x}{A_y}\right)\frac{1}{\sin\delta}$
Abkürzungen $\tan\gamma = \frac{b}{a}, \quad \tan\psi = \frac{A_y}{A_x}$
Einsetzen $\left(\frac{1}{\tan\gamma} + \tan\gamma\right)\sin\delta = \pm\left(\tan\psi + \frac{1}{\tan\psi}\right)$
Anwenden von $\frac{\tan^2\gamma + 1}{\tan\gamma} = \frac{2}{\sin 2\gamma}$
Einsetzen $\sin 2\gamma = \pm\sin 2\psi \cdot \sin\delta$

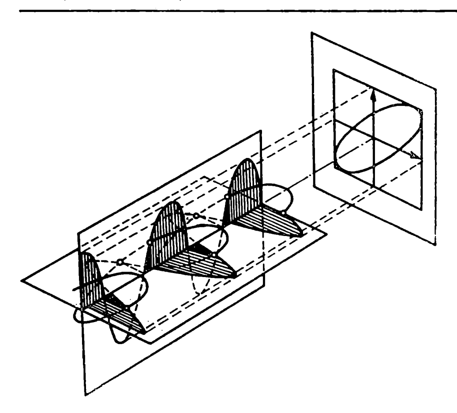


Abb. 2.6
Elliptisch polarisierte Welle in einem Zeitmoment

können. Es gilt für die Lage (Abb. 2.5)

$$\tan 2\alpha = \tan 2\psi \cdot \cos\delta, \quad \tan\psi = \frac{A_y}{A_x}; \tag{2.18a, b}$$

für das Hauptachsenverhältnis (Abb. 2.5)

$$\sin 2\gamma = \pm\sin 2\psi \cdot \sin\delta, \quad \tan\gamma = \frac{b}{a}. \tag{2.19a, b}$$

Tabelle 2.4 faßt die Schwingungsformen bei verschiedenen Werten der Phasendifferenz zusammen. Die Abb. 2.6 veranschaulicht den räumlichen Zustand einer elliptisch polarisierten Welle zu einer festen Zeit.

Tabelle 2.4
Schwingungsformen in Abhängigkeit von der Phasendifferenz

Phasen-differenz	Kurvengleichung	Schwingungsform		Schwingungsform	
		$A_x \neq A_y$	Bezeichnung	$A_x = A_y$	Bezeichnung
$\delta = 0°$	$E_y = \frac{A_y}{A_x} E_x$		linear polarisiert		linear polarisiert
$0° < \delta < 90°$	$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\delta = \sin^2\delta$		links-elliptisch polarisiert		links-elliptisch polarisiert
$\delta = 90°$	$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 = 1$		links-elliptisch polarisiert		links-zirkular polarisiert
$90° < \delta < 180°$	$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\lvert\cos\delta\rvert = \sin^2\delta$		links-elliptisch polarisiert		links-elliptisch polarisiert
$\delta = 180°$	$E_y = -\frac{A_y}{A_x} E_x$		linear polarisiert		linear polarisiert
$180° < \delta < 270°$	$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 + \frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\lvert\cos\delta\rvert = \sin^2\delta$		rechts-elliptisch polarisiert		rechts-elliptisch polarisiert
$\delta = 270°$	$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 = 1$		rechts-elliptisch polarisiert		rechts-zirkular polarisiert
$270° < \delta < 360°$	$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - \frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\delta = \sin^2\delta$		rechts-elliptisch polarisiert		rechts-elliptisch polarisiert

Polarisationsarten (Umlaufsinn entgegen der Lichtrichtung gesehen)

2.1.3. Huygenssches Prinzip

Die Ausbreitung des Lichtes kann als Überlagerung von Lichtwellen gedeutet werden. Wir erläutern diese Aussage am Beispiel einer Lichtwelle, die von einer punktförmigen Lichtquelle ausgesendet wird.

Die Lichtquelle ist dadurch ausgezeichnet, daß an ihrem Ort primär eine elektromagnetische Schwingung eingeleitet wird. Die Schwingung überträgt sich durch die radiale Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes von Volumenelement zu Volumenelement. In der Umgebung der Lichtquelle beobachten wir die zeitlich und räumlich veränderliche elektromagnetische Feldenergie als elektromagnetische Welle. Das Huygenssche Prinzip stellt eine Möglichkeit dar, die Ausbreitung dieser Welle allgemein zu verstehen.

In der Abb. 2.7 ist eine Kugelwelle durch die Wellenflächen veranschaulicht. Die Wellenfront ist verstärkt eingezeichnet. In einem Punkt P′, der auf der Wellenfront liegt, beginnt gerade die Schwingung. Für das übrige Gebiet hat der Punkt P′ also mit der Lichtquelle gemeinsam, daß eine Schwingung eingeleitet wird. Der Unterschied zwischen der Lichtquelle P und dem Punkt P′ besteht darin, daß am Ort der

Lichtquelle Energie, z. B. Wärmeenergie, in elektromagnetische Feldenergie umgewandelt wird, während die Schwingungsenergie im Punkt P' aus der Welle selbst stammt. Die Schwingung sollte sich nun vom Punkt P' aus ebenfalls radial ausbreiten und der Punkt P' damit zum Zentrum einer Kugelwelle werden. Da der Punkt P' beliebig ausgewählt ist, gilt dieselbe Überlegung für jeden Punkt des Wellenfeldes. Diese theoretische Erwartung wird im ersten Teil des Huygensschen Prinzips postuliert.

> Jeder Punkt eines Wellenfeldes ist Erregungszentrum einer Kugelwelle, die Elementarwelle genannt wird.

Wir beobachten jedoch keine Elementarwellen, sondern eine Kugelwelle, die von der Lichtquelle P ausgeht. Diese Tatsache wird durch die Überlagerung der Elementarwellen erklärt. In Richtung der Normalen zu den Gesamtwellenflächen können sich die Elementarwellen ungestört ausbreiten. In allen anderen Richtungen heben sie sich durch Interferenz gegenseitig auf. Daraus ergibt sich eine radiale Verschiebung der Wellenfront, die als Einhüllende der Elementarwellen erscheint. (In der Abb. 2.7 ist ein Teil der neuen Wellenfront gebrochen eingezeichnet.)

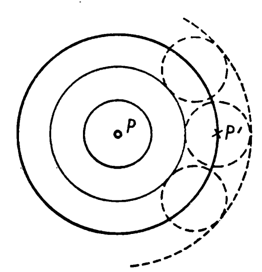


Abb. 2.7
Zum Huygensschen Prinzip

Zum Verständnis dieses Vorgangs sei noch darauf hingewiesen, daß die Erregungszentren infinitesimal benachbart sind und die Elementarwellen in kleinsten Bereichen interferieren. In der Abb. 2.7 mußten der Abstand der Zentren und die Elementarwellen stark vergrößert dargestellt werden. Wir formulieren den zweiten Teil des Huygensschen Prinzips:

> Die Elementarwellen überlagern sich so, daß nur ihre Einhüllende, die Wellenfront, beobachtet werden kann. Parallel zur Wellenfront verlaufen die Flächen gleicher Phase, die Wellenflächen.

Das Huygenssche Prinzip, also die Beschreibung der Wellenausbreitung mit Hilfe der Überlagerung von Elementarwellen, bewährt sich bei der Deutung sämtlicher Ausbreitungseigenschaften der Lichtwellen.

2.1.4. Lichtstrahlen

In der geometrischen Optik werden die Ausbreitungseigenschaften des Lichtes mittels der Lichtstrahlen beschrieben. Der Verlauf der Lichtstrahlen wird mit mathematischen Methoden untersucht. Es gilt also:

> Die geometrische Optik bedient sich des Strahlenmodells des Lichtes.

Die Beschreibung der Ausbreitung von Lichtwellen geht im allgemeinen in die Beschreibung des Lichtweges mit Lichtstrahlen über, wenn die Wellenlänge des Lichtes gegen Null geht. Die geometrische Optik versagt aber auch im Grenzfall $\lambda \to 0$, wenn die Verhältnisse in der Umgebung der Schattengrenze und an Orten hoher Energiedichte untersucht werden sollen. Trotzdem wenden wir die geometrische Optik an, um die Begrenzung von Strahlenbündeln und die Konzentration von Lichtstrahlen in einem Punkt oder dessen unmittelbarer Umgebung zu behandeln. Wir müssen uns aber darüber klar sein, daß wir dann im Rahmen der geometrischen Optik selbst für kleine Wellenlängen nur Näherungsaussagen erhalten. Die feineren Einzelheiten, die mit der Bündelbegrenzung und der Vereinigung von Licht in der Umgebung von Bildpunkten verbunden sind, gehen dabei verloren. Wir fassen zusammen:

Das Strahlenmodell beschreibt den Lichtweg, wie er im Grenzfall verschwindender Wellenlänge außerhalb von Stellen hoher Energiedichte und in einer gewissen Entfernung von der Schattengrenze vorhanden wäre. Von sämtlichen weiteren Eigenschaften des Lichtes wird abstrahiert.

Bestimmte Eigenschaften der Lichtwelle können dem Lichtstrahl formal — ohne physikalische Begründung — zugeordnet werden, damit einige zusätzliche wellenoptische Aspekte in die geometrisch-optische Beschreibung einbezogen sind (z. B. Zuordnung einer Wellenlänge).

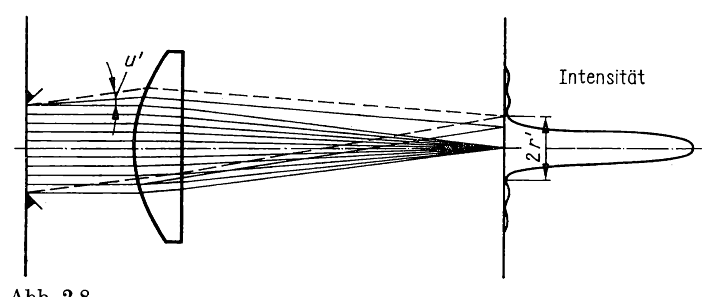


Abb. 2.8
Intensitätsverteilung durch Beugung an der kreisförmigen Öffnung

Die Anwendung des Strahlenmodells auf Fälle, die nicht den theoretischen Voraussetzungen entsprechen (z. B. die Anwendung für $\lambda \gg 0$), führt zu Näherungsaussagen.

Das Strahlenmodell des Lichtes wirft noch eine weitere Frage auf, die seine Anwendbarkeit auf praktische Probleme betrifft. Ein einzelner Lichtstrahl und sein Verlauf lassen sich mathematisch abstrakt behandeln. Experimentell ist ein einzelner Lichtstrahl nicht zu realisieren. Wir erläutern den Prozeß des Ausblendens eines Lichtbündels abnehmenden Durchmessers am Beispiel einer kreisförmigen Lochblende.

Wir erzeugen ein Parallelbündel, das wir senkrecht auf einen undurchsichtigen Schirm mit einer kreisförmigen Öffnung treffen lassen. Geometrisch-optisch ergibt

sich hinter dem Schirm ein Parallelbündel mit dem Lochdurchmesser und damit einer scharfen Schattengrenze. Verringern wir den Lochdurchmesser stetig, dann sollte sich das Bündel schließlich auf einen Lichtstrahl zusammenziehen. Praktisch wird dieser Prozeß durch den Wellencharakter des Lichtes begrenzt. Mit kleiner werdender Lochblende tritt die Beugung stärker in den Vordergrund. Im Bündel liegt eine Intensitätsverteilung nach Abb. 2.8 vor. Im Inneren der ersten Nullstelle befindet sich der Hauptanteil der Energie (ca. 84%).

Abbildung 2.9 enthält den auf die Brennweite f' einer abbildenden Linse bezogenen Radius r' des ersten dunklen Rings und den halben Öffnungswinkel u' des Bündels. Die in die Abb. 2.8 eingezeichnete Strahlenvereinigung hinter der Linse ist also nicht geeignet, das Verhalten des Lichtes bei enger Blende richtig zu beschreiben.

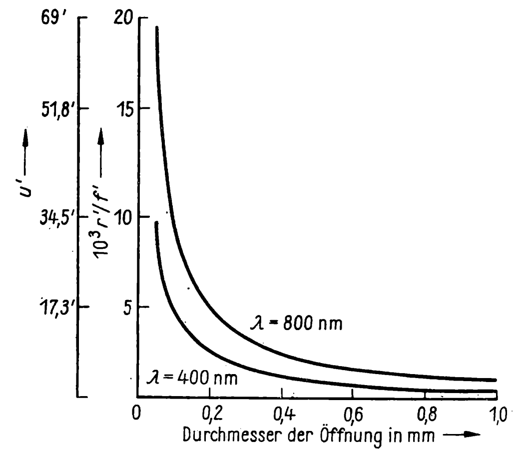


Abb. 2.9
Radius der ersten Nullstelle bei der Beugung an der kreisförmigen Öffnung

Bei $\lambda = 500$ nm und 0,1 mm Lochdurchmesser ist

$$\frac{r'}{f'} = 6{,}1 \cdot 10^{-3} \quad \text{und} \quad u' = 21'.$$

In der Brennebene einer Sammellinse mit der Brennweite $f' = 50$ mm beträgt also der Durchmesser des hellen Zentrums $2r' = 0{,}61$ mm. Wir halten fest:

> Ein einzelner Lichtstrahl ist eine mathematische Abstraktion. In der Praxis müssen wir stets das Verhalten von Lichtbündeln untersuchen.

Axiome der geometrischen Optik. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, zu den Gesetzen der geometrischen Optik zu gelangen. Wir werden zwar einige wellenoptische Aspekte zur Veranschaulichung und Begründung der grundlegenden Gesetze heranziehen, grundsätzlich wollen wir sie jedoch axiomatisch an die Spitze stellen.

Axiome sind Sätze, die im Rahmen der dargestellten Theorie nicht beweisbar sind. Sie folgen aus der Erfahrung, indem sie empirisch festgestellte Zusammenhänge

verallgemeinern. Auf die Axiome wird das Gebäude der Folgerungen und theoretischen Aussagen aufgebaut. Das Brechungsgesetz z. B. soll ursprünglich von Snellius durch Messungen gefunden worden sein. Die Meßfehler gestatten natürlich nicht, das Gesetz in aller Strenge experimentell zu bestätigen. Die Abstraktion liegt in der mathematischen Fassung, die exakt für sämtliche im Rahmen der Voraussetzungen liegende Fälle gelten soll.

Wir formulieren die Axiome der geometrischen Optik.

1. Axiom: Im homogenen Stoff sind die Lichtstrahlen gerade.

2. Axiom: An der Grenzfläche zweier homogener isotroper Nichtleiter wird das Licht im allgemeinen nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und nach dem Brechungsgesetz gebrochen.

3. Axiom: Der Strahlengang ist umkehrbar, d. h., die Lichtrichtung auf einem Lichtstrahl ist belanglos.

4. Axiom: Lichtbündel durchkreuzen einander, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Die Axiome 1, 3 und 4 sind für sich verständlich. Der Inhalt des 2. Axioms wird Gegenstand des nächsten Abschnitts sein. Zunächst definieren wir noch einige Begriffe, die im Zusammenhang mit Gesamtheiten von Lichtstrahlen auftreten.

Jede räumliche Gesamtheit von Lichtstrahlen nennen wir ein Strahlenbündel; jede in einer Ebene liegende Gesamtheit von Lichtstrahlen nennen wir ein Strahlenbüschel.

In der geometrischen Optik kommen nicht beliebige Strahlenbündel vor. Die Lichtstrahlen müssen vom wellenoptischen Standpunkt aus senkrecht zu den Wellenflächen stehen.

Ein Bündel, dessen Strahlen sämtlich Normalen zu einem Flächensystem darstellen, heißt orthotom.

In der geometrischen Optik werden also orthotome Strahlenbündel untersucht.

Da längs des gesamten Lichtweges die Wellenflächen senkrecht zu den Strahlen verlaufen, gilt der *Satz von* Malus:

Durch Reflexionen und Brechungen des Lichtes geht die Orthotomie der Strahlenbündel nicht verloren.

Der Satz von Malus ist wellenoptisch evident. Wir verzichten deshalb auf den umständlichen Beweis mit rein geometrisch-optischen Mitteln.

2.1.5. Fermatsches Prinzip

Das Huygenssche Prinzip erklärt die Lichtausbreitung mittels der Überlagerung von Elementarwellen. Seine Basis ist das Wellenmodell des Lichtes. Das Fermatsche Prinzip ist eine weitere Grundlage für die Ausbreitung des Lichtes. Es führt auf die

dem Strahlenmodell des Lichtes zugeordneten Axiome, die wir im Abschnitt 2.1.4. angegeben haben. Der *Satz von* FERMAT läßt sich damit als allgemeines Prinzip für den Zugang zur geometrischen Optik verwenden. Er lautet:

> Ein Lichtstrahl verbindet zwei Punkte des Raumes auf einem Weg, dessen optische Länge, verglichen mit der Länge von Nachbarwegen, einen Extremwert darstellt. Im allgemeinen handelt es sich um einen minimalen Weg.

Das Fermatsche Prinzip gilt demnach für die optische Weglänge L, die auch kurz Lichtweg genannt wird. Dieser ist gegeben durch

$$L = nl. \tag{2.20}$$

Verglichen werden dürfen nur der wirkliche Lichtweg und mögliche Nachbarwege.

Abbildung 2.10a zeigt, daß beim ebenen Spiegel der wirkliche Lichtweg zwischen A und A′ kürzer ist als der gestrichelte Nachbarweg. Der direkte Weg zwischen A und A′ ist zwar kürzer, er stellt aber keinen Nachbarweg dar.

Abbildung 2.10b enthält ein Beispiel dafür, daß der wirkliche Lichtweg zwischen A und A′ länger ist als der gestrichelte Nachbarweg. Das geht daraus hervor, daß der Lichtweg über den zum Vergleich eingezeichneten Ellipsenspiegel mit den Brennpunkten A und A′ unabhängig vom Auftreffpunkt des Strahls konstant ist.

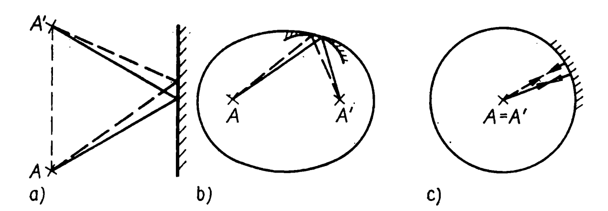


Abb. 2.10
Fermatsches Prinzip, wirklicher Lichtweg ist ein Minimum (a) bzw. Maximum (b) bzw. gehört zu einem Wendepunkt (c)

Abbildung 2.10c demonstriert den Sonderfall gleicher Länge aller Lichtwege zwischen A und A′, wie er beim Kugelspiegel möglich ist. (A und A′ fallen im Krümmungsmittelpunkt zusammen.)

Bei stückweise konstanter Brechzahl (Abb. 2.11), dem praktisch wichtigsten Fall, lautet die mathematische Fassung des Fermatschen Prinzips

$$\sum_k n_k l_k = \text{Extremum}. \tag{2.21}$$

Die absolute Brechzahl n_k des Stoffes k ist durch

$$n_k = \frac{c_0}{c_k}$$

gegeben. c_0 bzw. c_k sind die Lichtgeschwindigkeiten im Vakuum bzw. im Stoff k.

Damit gilt nach Gl. (2.21)

$$c_0 \sum_k \frac{l_k}{c_k} = \text{Extremum.}$$

c_0 ist eine Konstante, und $T_k = l_k/c_k$ ist die Zeit, in der das Licht die Strecke l_k zurücklegt. Eine mit (2.21) gleichwertige Formulierung lautet also

$$\sum_k T_k = \text{Extremum.} \tag{2.22}$$

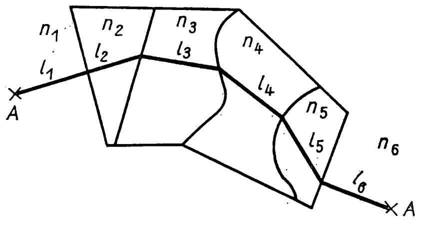


Abb. 2.11
Lichtweg bei stückweiser konstanter Brechzahl

In Worten:

> Das Licht legt zwischen zwei Punkten denjenigen Lichtweg zurück, der gegenüber Nachbarwegen eine extremale Zeit erfordert.

In den sogenannten inhomogenen Stoffen ist die Brechzahl eine stetige Funktion des Ortes. Der Lichtweg zwischen den Punkten A und A′ ist mit der Beziehung

$$L = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A'}} n \, \mathrm{d}l \tag{2.23}$$

zu berechnen. Das Fermatsche Prinzip ist in die Form

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A'}} n \, \mathrm{d}l = \text{Extremum} \tag{2.24}$$

zu bringen.

Die Berechnung des Verlaufs der Lichtstrahlen mit Gl. (2.24) ist eine Aufgabe der Variationsrechnung, denn Gl. (2.24) ist gleichwertig mit

$$\delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A'}} n \, \mathrm{d}l = 0. \tag{2.25}$$

Die auf Gl. (2.25) bezogene Formulierung des Fermatschen Prinzips lautet:

> Die erste Variation des Lichtweges verschwindet.

Das Problem läßt sich auf die Lösung von Differentialgleichungen, den Eulerschen Gleichungen der Variationsrechnung, zurückführen.

2.2. Reflexion und Brechung

2.2.1. Brechungsgesetz

Wellenoptische Begründung des Brechungsgesetzes. Wir untersuchen das Verhalten des Lichtes an einer unendlich ausgedehnten, ebenen Grenzfläche, die zwei homogene, isotrope und nichtabsorbierende Stoffe voneinander trennt.

An dieser Stelle nennen wir einen Stoff „homogen", wenn die Phasengeschwindigkeit des Lichtes an jeder Stelle den gleichen Betrag hat; wir nennen ihn „isotrop", wenn die Phasengeschwindigkeit des Lichtes unabhängig von der Ausbreitungsrichtung ist.

Eine ebene Lichtwelle treffe unter dem Einfallswinkel ε auf die Grenzfläche auf. Der hindurchgehende Anteil wird gebrochen und verläßt die Grenzfläche unter dem Brechungswinkel ε'. Die Brechung des Lichtes ist eine Folge des Huygensschen Prinzips, nach dem die Ausbreitung der Wellenfront als Ausbreitung der Einhüllenden von Elementarwellen erklärt wird (Abb. 2.12).

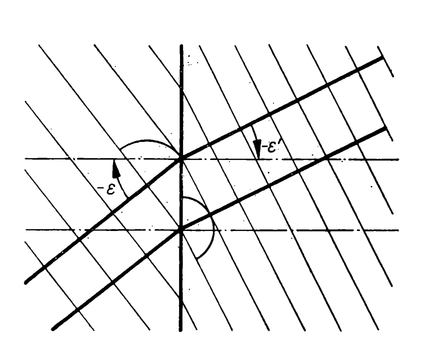


Abb. 2.12
Brechung an einer Grenzfläche

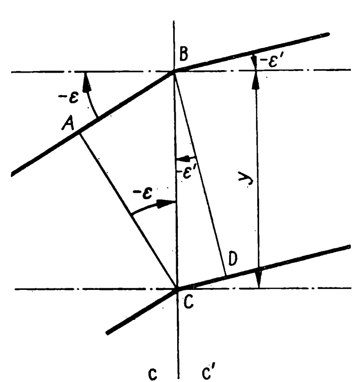


Abb. 2.13
Zur Ableitung des Brechungsgesetzes mit dem Huygensschen Prinzip

In der Abb. 2.13 stellt die Ebene AC eine Wellenfläche dar. In der Zeit, in der die Wellenfront im Stoff 1 vom Punkt A aus bis zur Grenzfläche gelangt, breitet sich die Wellenfront im Stoff 2 vom Punkt C bis zum Punkt D aus. Die Ebene BD ist ebenfalls eine Wellenfläche.

Für die Ausbreitungszeit gilt (c und c' sind die Phasengeschwindigkeiten des Lichtes)

$$t = -\frac{y \sin \varepsilon}{c} \quad \text{und} \quad t = -\frac{y \sin \varepsilon'}{c'}. \tag{2.26}$$

Gleichsetzen der rechten Seiten und Umformen ergibt

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{c'}{c}. \tag{2.27}$$

Für $\frac{c' < c}{c' > c}$ wird das Licht $\frac{\text{zum}}{\text{vom}}$ Einfallslot $\frac{\text{hin}}{\text{weg}}$ gebrochen.

Die Richtung der Wellennormalen gibt im isotropen Stoff zugleich die Richtung der Lichtstrahlen an, so daß auch in der geometrischen Optik das Brechungsgesetz (2.27) gilt. Theoretisch exakt ist diese Aussage jedoch nur für die unendlich ausgedehnte Grenzfläche. An einer durch Kanten begrenzten Fläche eines Körpers tritt Beugung auf. In vielen praktischen Fällen kann jedoch davon abgesehen werden.

Auch bei nichtebenen Wellenflächen wenden wir das Brechungsgesetz (2.27) an. Gebrochen wird die Wellennormale, also der Strahl.

Absolute und relative Brechzahl. Für den Übergang des Lichtes aus dem Vakuum in einen Stoff gilt das Brechungsgesetz (2.27) in der Form

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{c_0}{c} = n. \tag{2.28}$$

Das Verhältnis aus der Phasengeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum c_0 und der Phasengeschwindigkeit des Lichtes in einem Stoff c ist dessen absolute Brechzahl n.

Für zwei verschiedene Stoffe ist

$$n = \frac{c_0}{c} \quad \text{und} \quad n' = \frac{c_0}{c'}, \tag{2.29}$$

so daß

$$\frac{c}{c'} = \frac{n'}{n} \tag{2.30}$$

gilt.

Das Brechungsgesetz (2.27) läßt sich mit (2.30) als

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{n}{n'}$$

oder

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon' \tag{2.31}$$

schreiben. Das Produkt $n \sin \varepsilon$ kann also mit den vor der Fläche gültigen Größen oder mit den hinter der Fläche gültigen Größen gebildet werden. Es ergibt sich beide Male der gleiche Wert.

Das Produkt $n \sin \varepsilon$ ist eine Invariante der Brechung.

In der technischen Optik wird zur Kennzeichnung des Stoffes im allgemeinen die Brechzahl gegenüber Luft verwendet. Weil aus Gl. (2.30) nach Erweitern

$$\frac{c'}{c} = \frac{n}{n_{\mathrm{Luft}}} \cdot \frac{n_{\mathrm{Luft}}}{n'} \mathrel{\hat{=}} \frac{n}{n'}, \quad \text{mit} \quad \frac{n}{n_{\mathrm{Luft}}} \mathrel{\hat{=}} n \quad \text{und} \quad \frac{n'}{n_{\mathrm{Luft}}} \mathrel{\hat{=}} n',$$

folgt, gilt Gl. (2.31) auch dann, wenn die Brechzahlen n und n' auf Luft bezogen sind.

Zusammengefaßt ergibt sich als Inhalt des Brechungsgesetzes für die Brechung an der Grenzfläche zwischen zwei homogenen, isotropen und nichtabsorbierenden Stoffen:

> Der Lichtstrahl bleibt in der Einfallsebene.
> Einfalls- und Brechungswinkel sind verknüpft durch
>
> $n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$.

Zeichnerische Ermittlung der Richtung des gebrochenen Strahls. Die Richtung des gebrochenen Strahls läßt sich mit einem einfachen zeichnerischen Verfahren bestimmen. Wir geben zunächst die Zeichenvorschrift an und beweisen anschließend deren Richtigkeit.

1. Zeichne zwei konzentrische Kreise, deren Radien sich wie die Brechzahlen beiderseits der Grenzfläche verhalten!
2. Zeichne durch den Mittelpunkt der Kreise eine Parallele zur Strahlrichtung vor der Grenzfläche! Diese schneide den Kreis, dessen Radius der Brechzahl vor der Grenzfläche proportional ist, im Punkt A.
3. Zeichne durch den Punkt A eine Parallele zum Einfallslot! Diese schneide den Kreis, dessen Radius der Brechzahl hinter der Grenzfläche proportional ist, im Punkt B.
4. Verbinde den Mittelpunkt der Kreise mit dem Punkt B! Diese Verbindungslinie ist der Strahlrichtung hinter der brechenden Fläche parallel.

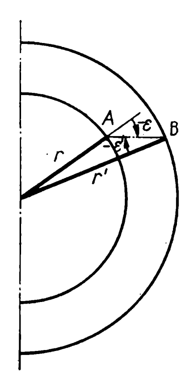


Abb. 2.14
Zur Konstruktion der Richtung des gebrochenen Strahls

Beweis (Abb. 2.14). Anwenden des Sinussatzes im Dreieck ABC:

$$\frac{\sin(-\varepsilon')}{\sin(180^\circ + \varepsilon)} = \frac{r}{r'}.$$

Anwenden von $\sin(-\varepsilon') = -\sin \varepsilon'$, $\sin(180^\circ + \varepsilon) = -\sin \varepsilon$ und Vergleich mit dem Brechungsgesetz ergibt

$$\frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

also das vorausgesetzte Radienverhältnis.

Die Hilfskonstruktion wird zweckmäßig außerhalb des eigentlichen Strahlenverlaufs und in einem vergrößerten Maßstab ausgeführt. Das Verfahren ist nicht nur bei Planflächen anwendbar.

Vektorielles Brechungsgesetz. Sowohl das Brechungsgesetz (2.31) wie auch die zeichnerische Konstruktion der Richtung des gebrochenen Lichtes sind einfach anwendbar, wenn die Strahlen in einer Ebene bleiben. Bei der Brechung an mehreren Flächen bleibt ein Lichtstrahl zwar an jeder Einzelfläche in der Einfallsebene; die Einfallsebenen verschiedener Flächen fallen im allgemeinen jedoch nicht zusammen. Es ist dann der Strahlenverlauf im Raum zu untersuchen. Dabei sind oft komplizierte räumliche Winkelbeziehungen zu betrachten.

Ein räumlicher Strahlenverlauf läßt sich rationell behandeln, wenn die Flächenlagen und die Strahlrichtungen durch Vektoren beschrieben werden.

Die Richtung des Lichtstrahls vor bzw. nach der Brechung ist durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{s}$ bzw. $\boldsymbol{s}'$ gegeben (Abb. 2.15).

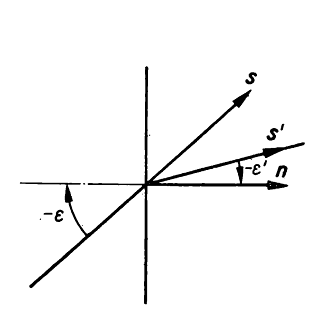


Abb. 2.15
Einheitsvektoren für das vektorielle Brechungsgesetz

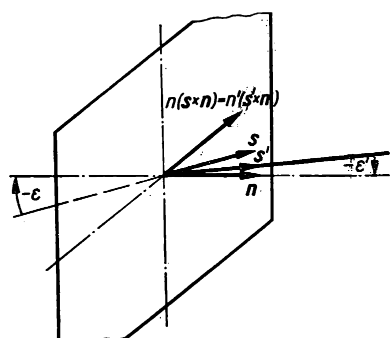


Abb. 2.16
Vektorielles Brechungsgesetz

Die Lage der Fläche bezüglich des einfallenden Lichtstrahls ist durch die Richtung der Flächennormalen im Auftreffpunkt charakterisiert. Wir verwenden dazu den Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$.

Das vektorielle Brechungsgesetz hat die Vektoren $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ und $\boldsymbol{n}$ so miteinander zu verknüpfen, daß $n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$ gilt. Es liegt nahe, die Sinusfunktionen durch die Beträge von Vektorprodukten zu ersetzen. Es gilt (Abb. 2.15)

$$\sin \varepsilon = |\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}| \quad \text{und} \quad \sin \varepsilon' = |\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n}|. \tag{2.32}$$

Weil der Lichtstrahl bei der Brechung in der Einfallsebene bleibt, stehen die Vektoren $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n}$ senkrecht auf der Einfallsebene. In der Abb. 2.15 weisen beide Vektoren in die Zeichenebene hinein (vgl. Abb. 2.16). Wir dürfen also auch

$$n(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}) = n'(\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n}) \tag{2.33}$$

setzen. Gl. (2.33) ist das vektorielle Brechungsgesetz (Abb. 2.16).

Im allgemeinen sind die Flächenlage und die Richtung des einfallenden Lichtstrahls bekannt, d. h., die Vektoren $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{s}$ sind vorgegeben. Die Aufgabe besteht dann darin, aus dem vektoriellen Brechungsgesetz (2.33) den Einheitsvektor $\boldsymbol{s}'$ in Richtung des gebrochenen Strahls zu berechnen. Die Auflösung von Gl. (2.33) nach $\boldsymbol{s}'$ ist in der Tab. 2.5 enthalten. Das Ergebnis lautet

$$\boldsymbol{s}' = \frac{n}{n'}\,\boldsymbol{s} - \boldsymbol{n}\left\{\frac{n}{n'}\,(\boldsymbol{ns}) - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 [1 - (\boldsymbol{ns})^2]}\right\}. \tag{2.34}$$

Tabelle 2.5
Ableitung des vektoriellen Brechungsgesetzes

	Anwenden des vektoriellen Brechungsgesetzes $n(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}) = n'(\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n})$
	Vektorielle Multiplikation mit $\boldsymbol{n}$ $n[\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n})] = n'[\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n})]$
Entwicklungssatz für doppelte Vektorprodukte $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{AC})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C}$	Anwenden des Entwicklungssatzes $n[\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{s} - (\boldsymbol{ns})\,\boldsymbol{n}] = n'[\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{s}' - (\boldsymbol{ns}')\,\boldsymbol{n}]$
Definition des skalaren Produktes $\boldsymbol{ns}' = \cos\varepsilon' = \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon'}$	Anwenden von $\boldsymbol{n}^2 = 1$, Auflösen nach $\boldsymbol{s}'$ $\boldsymbol{s}' = \frac{n}{n'}\,[\boldsymbol{s} - (\boldsymbol{ns})\,\boldsymbol{n}] + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{ns}')$
Anwenden des Brechungsgesetzes $\boldsymbol{ns}' = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2\varepsilon}$	
Anwenden von $\cos\varepsilon = (\boldsymbol{ns})$ und $\sin^2\varepsilon = 1 - \cos^2\varepsilon$ $\boldsymbol{ns}' = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 [1 - (\boldsymbol{ns})^2]}$	
	Einsetzen $\boldsymbol{s}' = \frac{n}{n'}\,\boldsymbol{s} - \boldsymbol{n}\left\{\frac{n}{n'}\,(\boldsymbol{ns}) - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 [1 - (\boldsymbol{ns})^2]}\right\}$
	Komponentendarstellung $s_i' = \frac{n}{n'}\,s_i - n_i\left\{\frac{n}{n'}\,(\boldsymbol{ns}) - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 [1 - (\boldsymbol{ns})^2]}\right\}$

Die Komponenten von $\boldsymbol{s}'$ folgen aus

$$s_i' = \frac{n}{n'} s_i - n_i \left\{ \frac{n}{n'} (\boldsymbol{ns}) - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 [1 - (\boldsymbol{ns})^2]} \right\}, \quad i = x, y, z. \tag{2.35}$$

Die Rechenvorschriften (2.35) für die Komponenten von $\boldsymbol{s}'$ wertet man am besten in einem Rechenschema aus. Mit den Abkürzungen

$$\frac{n}{n'} = N, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 [1 - (\boldsymbol{ns})^2]} = W, \quad \frac{n}{n'} (\boldsymbol{ns}) - W = M, \qquad (2.36\text{a}\cdots\text{c})$$

von denen N und W in Nebenrechnungen bestimmt werden, erhalten wir z. B. das Schema nach Tab. 2.6.

Tabelle 2.6
Rechenschema für das vektorielle Brechungsgesetz

n_x	n_y	n_z	
s_x	s_y	s_z	
$n_x s_x$	$+n_y s_y$	$+n_z s_z$	$(\boldsymbol{ns})$
$-n_x M$	$-n_y M$	$-n_z M$	$N(\boldsymbol{ns})$
$+s_x N$	$+s_y N$	$+s_z N$	$-W$
s_x'	s_y'	s_z'	M

2.2.2. Reflexionsgesetz

An einer Grenzfläche, die zwei Stoffe unterschiedlicher Brechzahl voneinander trennt, wird stets ein Teil des Lichtes reflektiert. Das Reflexionsgesetz, das wir wie das Brechungsgesetz mit dem Huygensschen Prinzip begründen könnten, lautet:

> Der Lichtstrahl bleibt in der Einfallsebene.
> Einfalls- und Reflexionswinkel sind durch
>
> $\varepsilon = -\varepsilon'$
>
> miteinander verknüpft.

Der Reflexionswinkel ε' wird analog zum Einfallswinkel ε gegenüber der Flächennormalen, also gegenüber dem Einfallslot, gemessen. In der Schreibweise

$$\varepsilon = -\varepsilon' \tag{2.37}$$

drückt sich die Vorzeichenregel für Winkel aus, die natürlich auch für den Reflexionswinkel gilt. Wir können die Tatsache, daß der Reflexions- und der Einfallswinkel entgegengesetzt gleich sind, auch dadurch veranschaulichen, daß bei der Reflexion beide Strahlen auf derselben Seite der Grenzfläche liegen. Der Lichtstrahl „kehrt sich im wesentlichen um“.

Der Vergleich des Brechungsgesetzes (2.31) und des Reflexionsgesetzes zeigt, daß das Reflexionsgesetz formal als Sonderfall des Brechungsgesetzes für

$$n = -n' \tag{2.38}$$

aufgefaßt werden kann. Die Folge davon ist, daß Beziehungen, die für die Brechung abgeleitet worden sind, unter Anwendung von Gl. (2.38) für die Reflexion spezialisiert werden können.

Vektorielles Reflexionsgesetz. Auch das Reflexionsgesetz läßt sich in eine vektorielle Form bringen. Wir legen fest, daß der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ in die reflektierende Fläche hinein und der Strahlvektor $\boldsymbol{s}'$ in Richtung des reflektierten Strahls weist (Abb. 2.17).

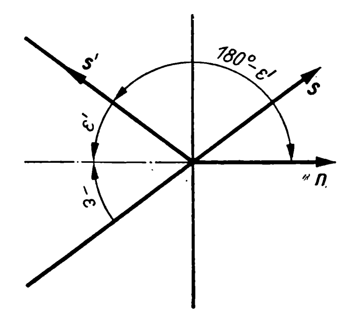


Abb. 2.17
Einheitsvektoren für das vektorielle Reflexionsgesetz

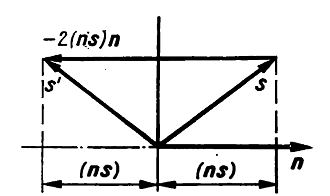


Abb. 2.18
Zur Ableitung des vektoriellen Reflexionsgesetzes

Das vektorielle Reflexionsgesetz geht aus dem vektoriellen Brechungsgesetz hervor, wenn $n' = -n$ gesetzt und

$$\boldsymbol{s}' \text{ in } -\boldsymbol{s}' \tag{2.39}$$

überführt wird. Letzteres ist zu erkennen, wenn man den Spezialfall $\varepsilon = 0$ betrachtet. Das vektorielle Brechungsgesetz ergibt

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s} \quad (\varepsilon = 0),$$

während das Reflexionsgesetz mit der festgelegten Richtung von $\boldsymbol{s}'$

$$\boldsymbol{s}' = -\boldsymbol{s} \quad (\varepsilon = 0) \tag{2.40}$$

ergeben muß.

Aus Gl. (2.33) folgt mit Gl. (2.38) und Gl. (2.39) das vektorielle Reflexionsgesetz

$$\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{n}. \tag{2.41}$$

Entsprechend geht Gl. (2.34) mit Gl. (2.38) und Gl. (2.39) über in

$$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s} - 2(\boldsymbol{n}\boldsymbol{s})\,\boldsymbol{n}. \tag{2.42}$$

Gl. (2.42) ist auch an Hand von Abb. 2.18 auf einfache Weise anschaulich abzuleiten.

Die Komponenten des Strahlvektors $\boldsymbol{s}'$ lauten

$$s_i' = s_i - 2(\boldsymbol{ns})\, n_i, \quad i = x, y, z.$$

Auch für die Auswertung dieser Rechenvorschriften sei ein Rechenschema vorgeschlagen (Tab. 2.7.).

Tabelle 2.7
Rechenschema für das vektorielle Reflexionsgesetz

$n_x s_x$	n_x	n_y	n_z
$+n_y s_y$	$-2(\boldsymbol{ns})\, n_x$	$-2(\boldsymbol{ns})\, n_y$	$-2(\boldsymbol{ns})\, n_z$
$+n_z s_z$	$+s_x$	$+s_y$	$+s_z$
$(\boldsymbol{ns})$	s_x'	s_y'	s_z'

2.2.3. Polarisation durch Reflexion und Brechung

Reflexions- und Brechungsgesetz sind eine unmittelbare Folge der Forderung, daß die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Grenzfläche zweier Dielektrika stetig ist:

$$\boldsymbol{E}_{t_1} = \boldsymbol{E}_{t_2}$$

($\boldsymbol{E}_{t_1}$ Tangentialkomponente unmittelbar vor, $\boldsymbol{E}_{t_2}$ unmittelbar hinter der Grenzfläche). Die Gleichungen der elektrischen Feldstärken an der Grenzfläche lauten nach Gl. (2.6)

einfallende Welle $\quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs} - ct)}$,

reflektierte Welle $\quad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{a}' \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda'}(\boldsymbol{rs}' - ct)}$,

gebrochene Welle $\quad \boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{a}'' \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda''}(\boldsymbol{rs}'' - c''t)}$.

Die Grenzfläche liege in der x-y-Ebene, also bei $z = 0$. Die Stetigkeitsforderung führt auf

$$E_x + E_x' = E_x'' \quad \text{und} \quad E_y + E_y' = E_y''.$$

Diese Gleichungen müssen für beliebige Zeit t und Punkte der Grenzfläche gelten. Das ist nur möglich, wenn die variablen Exponentialfunktionen in jedem Summanden gleich sind. Diese Forderung bedeutet

$$\frac{1}{\lambda}(\boldsymbol{rs} - ct) = \frac{1}{\lambda'}(\boldsymbol{rs}' - ct) = \frac{1}{\lambda''}(\boldsymbol{rs}'' - c''t). \tag{2.43}$$

Gleichheit des Koeffizienten von t liegt vor, wenn

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c''}{\lambda''},$$

also

$$\lambda = \lambda' \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{\lambda''} = \frac{c}{c''} = \frac{n''}{n}$$

ist. Wegen $c = \nu\lambda$ ist

$$\nu = \nu' = \nu''.$$

Die Frequenz des Lichtes ändert sich bei der Reflexion und Brechung nicht.

Wenn die Einfallsebene die x-z-Ebene ist, gilt $s_y = 0$, so daß wegen Gl. (2.43) auch $s'_y = s''_y = 0$ sein muß. Das ist der Beweis dafür, daß die Normalen des reflektierten und des gebrochenen Lichtes in der Einfallsebene liegen.

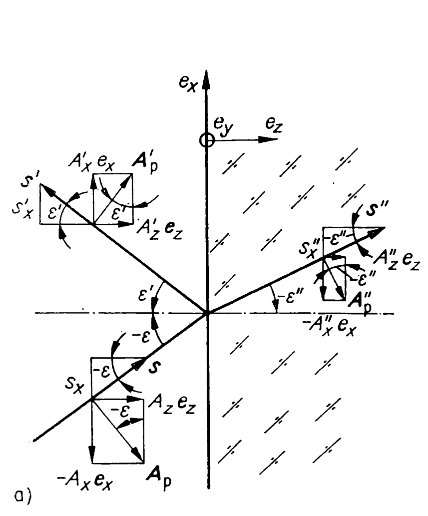


Abb. 2.19a)
Vektoren und ihre Zerlegung bei Reflexion und Brechung

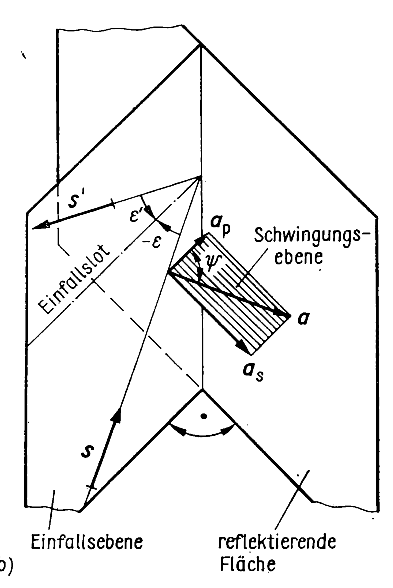


Abb. 2.19b)
Zerlegung der Feldstärkevektoren. Azimut

Für die x-Komponenten ist

$$s_x = s'_x \quad \text{und} \quad s_x = \frac{\lambda}{\lambda''} s''_x = \frac{n''}{n} s''_x$$

zu fordern. Aus Abb. 2.19a ist abzulesen, daß

$$s_x = -\sin\varepsilon, \qquad s'_x = \sin\varepsilon', \qquad s''_x = -\sin\varepsilon'' \tag{2.44a\cdots c}$$

ist. Damit ergeben sich das Reflexionsgesetz $\varepsilon' = -\varepsilon$ und das Brechungsgesetz $n \sin\varepsilon = n'' \sin\varepsilon''$ direkt aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke an der Grenzfläche.

Fresnelsche Formeln. Wir lassen eine linear polarisierte ebene Lichtwelle auf die Grenzfläche zwischen zwei homogenen und isotropen Nichtleitern auftreffen. Ein Teil der Lichtenergie wird reflektiert, ein Teil geht durch die Grenzfläche hindurch.

Für die Amplituden der reflektierten und gebrochenen Lichtwelle erhalten wir relativ einfache Gleichungen, wenn wir sie in eine Komponente parallel zur Einfallsebene $\boldsymbol{a}_p$ und eine Komponente senkrecht zur Einfallsebene $\boldsymbol{a}_s$ zerlegen (Abb. 2.19b). Den Winkel zwischen der Einfallsebene und der Schwingungsrichtung bezeichnen wir als Azimut. Für die Azimute gilt:

$$\tan \psi = \frac{a_s}{a_p}, \quad \tan \psi' = \frac{a_s'}{a_p'}, \quad \tan \psi'' = \frac{a_s''}{a_p''}. \tag{2.45}$$

Aus Abb. 2.19a lesen wir

$$\begin{aligned} a_x &= -a_p \cos \varepsilon & a_x' &= a_p' \cos \varepsilon' & a_x'' &= -a_p'' \cos \varepsilon'' \\ a_y &= a_s & a_y' &= a_s' & a_y'' &= a_s'' \\ a_z &= -a_p \sin \varepsilon & a_z' &= a_p' \sin \varepsilon' & a_z'' &= -a_p'' \sin \varepsilon'' \end{aligned} \tag{2.46}$$

ab. Da die Grenzfläche die x-y-Ebene, die Einfallsebene die x-z-Ebene ist, hat der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ keine y- und z-Komponente. Es ist also

$$\boldsymbol{s}\boldsymbol{r} = s_x x, \quad \boldsymbol{s}'\boldsymbol{r} = s_x' x, \quad \boldsymbol{s}''\boldsymbol{r} = s_x'' x.$$

Mit den Gleichungen (2.44a···c) für die Komponenten von $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ und $\boldsymbol{s}''$, dem Reflexions- und dem Brechungsgesetz wird

$$\frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{r}}{c} = -\frac{x \sin \varepsilon}{c}, \quad \frac{\boldsymbol{s}'\boldsymbol{r}}{c} = -\frac{x \sin \varepsilon}{c}, \quad \frac{\boldsymbol{s}''\boldsymbol{r}}{c''} = -\frac{x \sin \varepsilon}{c}.$$

Es ist also $\boldsymbol{s}\boldsymbol{r}/c = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{r}/c = \boldsymbol{s}''\boldsymbol{r}/c''$, und die Exponentialfunktionen in den Gleichungen für die elektrischen Feldstärken an der Grenzfläche sind gleich.

Die Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke gelten für die komplexen Amplituden:

$$a_x + a_x' = a_x'', \quad a_y + a_y' = a_y'',$$

bzw. mit den Gleichungen (2.46)

$$(a_p - a_p') \cos \varepsilon = a_p'' \cos \varepsilon'', \quad a_s + a_s' = a_s''. \tag{2.47a, b}$$

Die Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}_{t_1} = \boldsymbol{H}_{t_2}$ lauten wegen

$$\boldsymbol{H} = n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{E})$$

unter Beachtung der Gleichheit der Exponentialfunktionen in $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}'$ und $\boldsymbol{E}''$

$$n(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{a})_x + n(\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{a}')_x = n''(\boldsymbol{s}'' \times \boldsymbol{a}'')_x \quad \text{und}$$

$$n(\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{a})_y = n(\boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{a}')_y + n''(\boldsymbol{s}'' \times \boldsymbol{a}'')_y.$$

Die Komponenten der Vektorprodukte folgen aus

$$\mathbf{s} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\sin\varepsilon & 0 & \cos\varepsilon \\ -a_p\cos\varepsilon & a_s & -a_p\sin\varepsilon \end{vmatrix}, \quad \mathbf{s}' \times \boldsymbol{a}' = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\sin\varepsilon & 0 & -\cos\varepsilon \\ a'_p\cos\varepsilon & a'_s & -a'_p\sin\varepsilon \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{s}'' \times \boldsymbol{a}'' = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -\sin\varepsilon'' & 0 & \cos\varepsilon'' \\ -a''_p\cos\varepsilon'' & a''_s & -a''_p\sin\varepsilon'' \end{vmatrix},$$

so daß sich

$$n(a_s - a'_s)\cos\varepsilon = n''a''_s\cos\varepsilon'' \quad \text{und} \quad n(a_p + a'_p) = n''a''_p \tag{2.48a, b}$$

ergibt.

Das Auflösen der Gleichungen (2.47) und (2.48) nach den Unbekannten a'_s, a'_p, a''_s, a''_p führt auf die Fresnelschen Formeln (die Brechzahlen wurden mit dem Brechungsgesetz eliminiert):

$$a'_s = a_s\frac{\sin(\varepsilon'' - \varepsilon)}{\sin(\varepsilon'' + \varepsilon)}, \quad a'_p = -a_p\frac{\tan(\varepsilon'' - \varepsilon)}{\tan(\varepsilon'' + \varepsilon)}, \tag{2.49a, b}$$

$$a''_s = a_s\frac{2\sin\varepsilon''\cdot\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon'' + \varepsilon)}, \quad a''_p = a_p\frac{2\sin\varepsilon''\cdot\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon'' + \varepsilon)\cdot\cos(\varepsilon'' - \varepsilon)}. \tag{2.50a, b}$$

Die Fresnelschen Formeln beschreiben die Abhängigkeit der senkrecht und parallel zur Einfallsebene liegenden Amplituden-Komponenten vom Einfallswinkel für das reflektierte und das gebrochene Licht.

Reflexionsvermögen und Durchlässigkeit. Die Amplituden eignen sich zur Beschreibung des Polarisationszustandes des Lichtes. Wir registrieren aber mit Lichtempfängern die Lichtintensität. Wir definieren:

$\dfrac{\text{Das Reflexionsvermögen } R}{\text{Die Durchlässigkeit } D}$ ist das Verhältnis aus

$\dfrac{\text{reflektierter Intensität } I'}{\text{hindurchgelassener Intensität } I''}$ und auffallender Intensität pro Flächeneinheit der Grenzfläche.

In Formeln:

$$R = \frac{I'}{I} \quad \text{und} \quad D = \frac{I''}{I}. \tag{2.51a, b}$$

Wenn wir nichtabsorbierende Stoffe voraussetzen, dann muß wegen des Energieerhaltungssatzes

$$R + D = 1 \tag{2.51c}$$

gelten. Es genügt also, das Reflexionsvermögen explizit anzugeben.

Das Intensitätsverhältnis (2.51a), für das nach Gl. (2.15)

$$\frac{I'}{I} = \frac{|a'|^2}{|a|^2}$$

gilt, läßt sich mit den Fresnelschen Formeln berechnen. Einsetzen von Gl. (2.49a) und Gl. (2.49b) ergibt:

$$R_s = \frac{\sin^2(\varepsilon'' - \varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon'' + \varepsilon)}, \tag{2.52}$$

$$R_p = \frac{\tan^2(\varepsilon'' - \varepsilon)}{\tan^2(\varepsilon'' + \varepsilon)}. \tag{2.53}$$

Für kleine Winkel, für die die Winkelfunktionen gleich den Winkeln selbst gesetzt werden können, gilt unabhängig von der Schwingungsrichtung

$$R = \frac{(\varepsilon'' - \varepsilon)^2}{(\varepsilon'' + \varepsilon)^2}.$$

Mit dem Brechungsgesetz für kleine Winkel $n\varepsilon = n''\varepsilon''$ geht daraus

$$R = \left(\frac{n'' - n}{n'' + n}\right)^2 \tag{2.54}$$

hervor.

Abbildung 2.20 enthält die Funktionen $R_s(\varepsilon)$ und $R_p(\varepsilon)$ sowie das Reflexionsvermögen

$$R(\varepsilon) = \frac{R_s + R_p}{2} \tag{2.55}$$

für den Fall, daß natürliches Licht einfällt (für dieses ist $A_s = A_p$). Die Kurven gelten für $n = 1$ und $n'' = 1{,}5$. Bei $\varepsilon = 0°$ beträgt das Reflexionsvermögen $R = 0{,}04$.

Abbildung 2.21 zeigt die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens für senkrechten Lichteinfall bei $n = 1$ und variablem n''.

Wir betrachten eine Grenzfläche, auf die natürliches Licht variablen Einfallswinkels trifft. Im reflektierten Licht fehlt die parallel zur Einfallsebene schwingende Komponente, wenn

$$R_p = \frac{\tan^2(\varepsilon'' - \varepsilon)}{\tan^2(\varepsilon'' + \varepsilon)} = 0 \tag{2.56}$$

ist (Abb. 2.20). Gleichung (2.56) ist erfüllt, wenn

$$\tan(\varepsilon'' + \varepsilon) \to \infty \tag{2.57}$$

oder

$$\varepsilon'' + \varepsilon \to \frac{\pi}{2} \tag{2.58}$$

gilt. (Zu beachten ist, daß R nicht verschwindet, wenn der Zähler gleich Null ist. Dies ist nämlich für $\varepsilon'' = \varepsilon = 0$ der Fall, so daß auch der Nenner verschwindet. Der Grenzwert ergibt Gl. (2.54).)

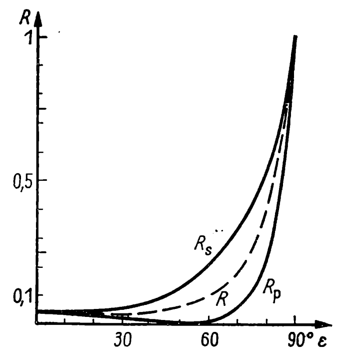


Abb. 2.20
Reflexionsvermögen als Funktion des Einfallswinkels

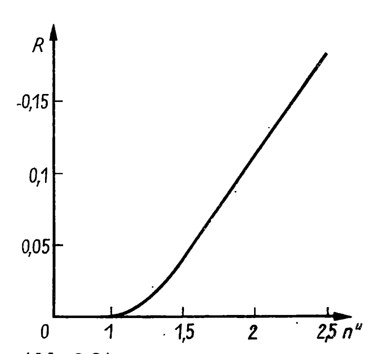


Abb. 2.21
Reflexionsvermögen als Funktion der Brechzahl

Wir verwenden das Reflexionsgesetz $\varepsilon' = -\varepsilon$ und erhalten

$$\varepsilon'' - \varepsilon' = \frac{\pi}{2}. \tag{2.59}$$

Das bedeutet: Das reflektierte Licht enthält nur eine senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente der elektrischen Feldstärke, ist also linear polarisiert, wenn reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen. Diese Aussage wird als Brewstersches Gesetz bezeichnet (Abb. 2.22).

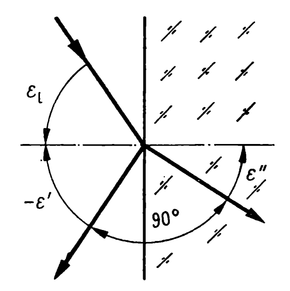


Abb. 2.22
Zum Brewsterschen Gesetz

Den Einfallswinkel, bei dem das reflektierte Licht linear polarisiert ist, bezeichnen wir als Polarisationswinkel ε_l. Dieser folgt aus dem Brechungsgesetz, wenn wir Gl. (2.58) berücksichtigen. Aus

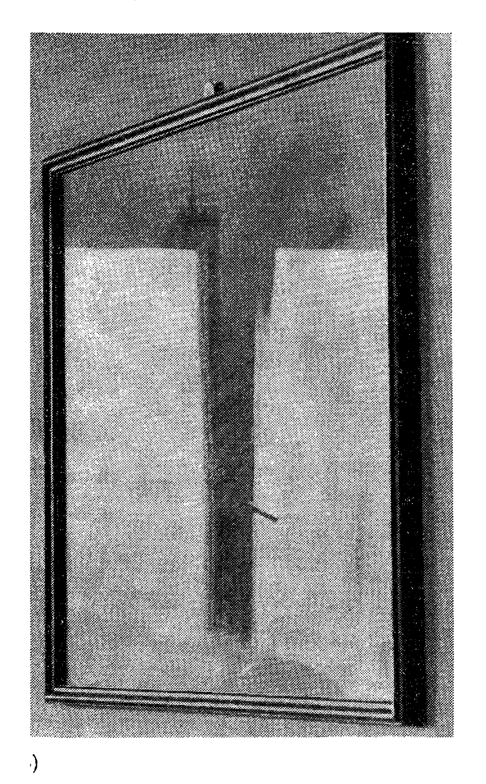
$$\frac{\sin \varepsilon_l}{\sin (90° - \varepsilon_l)} = \frac{n''}{n} \tag{2.60}$$

ergibt sich

$$\tan \varepsilon_l = \frac{n''}{n}. \tag{2.61}$$

Die numerische Auswertung der Gl. (2.61) ist in der Tab. 2.8 enthalten.

Das an Glasplatten reflektierte Licht erzeugt in manchen Fällen unerwü
Reflexe. Diese machen z. B. das Fotografieren einer Schaufensterdekoratio
ines mit Glas abgedeckten Bildes unmöglich. Durch Vorschalten eines Polaris
ilters lassen sich die Reflexe weitgehend unterdrücken, wenn die Aufnahme
inem geeigneten Winkel gegenüber der Glasplatte erfolgt und die Durchla
ung des Filters senkrecht zur Schwingungsrichtung des polarisierten Lichtes
Abb. 2.23).



)



b)

Abb. 2.23
Unterdrückung von Reflexen mittels Polarisationsfilter
) ohne, b) mit Filter

Polarisationsgrad. Wird der Polarisationswinkel nicht eingehalten, dann is
Licht partiell (teilweise) linear polarisiert. Im reflektierten Licht ist die senk
ur Einfallsebene stehende Schwingungsrichtung bevorzugt enthalten. Zwi
len Amplituden der einzelnen Schwingungsrichtungen besteht aber keine Ph
lifferenz. Wir definieren den Polarisationsgrad des reflektierten Lichtes durch

$$\alpha_l = \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}.$$

Bei senkrechtem Lichteinfall sind R_s und R_p nach Gl. (2.54) gleich. Dasselbe gilt nach (2.52) und (2.53) für $\varepsilon = 90°$. In beiden Fällen wird $\alpha_l = 0$. Bei $\varepsilon = \varepsilon_l$ ist $R_p = 0$ und $\alpha_l = 1$. Für beliebige Einfallswinkel an einer Fläche mit $n = 1$ und $n'' = 1{,}5$ entnehmen wir den Polarisationsgrad aus Abb. 2.24.

Tabelle 2.8
Polarisationswinkel

$\frac{n''}{n}$	ε_l
1,4910	56° 09′
1,5237	56° 43′
1,6281	58° 27′
1,7036	59° 35′
1,8270	61° 18′

Reflexion von linear polarisiertem Licht. Auf eine Grenzfläche treffe linear polarisiertes Licht auf. Das Azimut des reflektierten Lichtes beträgt

$$\tan \psi' = \frac{a_s'}{a_p'} = -\frac{\cos(\varepsilon - \varepsilon'')}{\cos(\varepsilon + \varepsilon'')} \tan \psi .$$

Da stets $\cos(\varepsilon - \varepsilon'') > \cos(\varepsilon + \varepsilon'')$ gilt, wird das Azimut bei der Reflexion vergrößert.

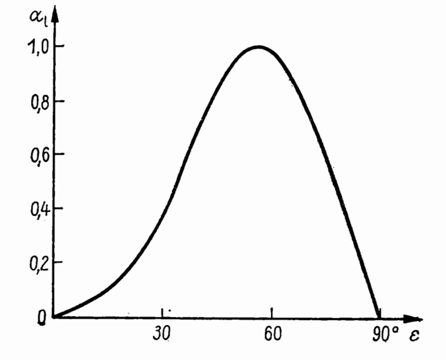


Abb. 2.24
Polarisationsgrad als Funktion des Einfallswinkels

Für das Azimut des gebrochenen Lichtes gilt nach Gl. (2.45) und Gl. (2.50)

$$\tan \psi'' = \frac{a_s''}{a_p''} = \cos(\varepsilon'' - \varepsilon) \cdot \tan \psi .$$

Wegen $\cos(\varepsilon'' - \varepsilon) < 1$ verkleinert sich das Azimut bei der Brechung.

Die berechneten Änderungen des Azimutes bei der Reflexion und bei der Brechung entsprechen einer Drehung der Schwingungsebene; das Licht bleibt linear polarisiert.

2.2.4. Totalreflexion

Wir formen das Brechungsgesetz (2.31) um in $\sin \varepsilon' = (n/n') \cdot \sin \varepsilon$. Für $n' < n$ geht das Licht vom optisch dichteren in den optisch dünneren Stoff über. Die rechte Seite im Brechungsgesetz ist kleiner als Eins oder gleich Eins, wenn $\sin \varepsilon \leqq n'/n$ gilt. Nur dann ergibt sich ein reeller Brechungswinkel ε'.

Für Einfallswinkel, die größer als der aus

$$\sin \varepsilon_G = \frac{n'}{n} \tag{2.62}$$

folgende Grenzwinkel ε_G sind, ist das Brechungsgesetz nicht erfüllbar. Bei solchen Einfallswinkeln erhalten wir keinen gebrochenen Lichtstrahl, sondern nur reflektiertes Licht (Abb. 2.25a).

> Das Licht wird an der Grenzfläche zweier Stoffe vollständig reflektiert, wenn die Brechzahl auf niedrigere Werte springt und der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion ε_G ist. Diese Erscheinung heißt Totalreflexion, und es gilt das Reflexionsgesetz.

Abb. 2.25b enthält die Funktion $\varepsilon_G = f(n'/n)$ für den praktisch interessierenden Brechzahlbereich und $n' = 1$.

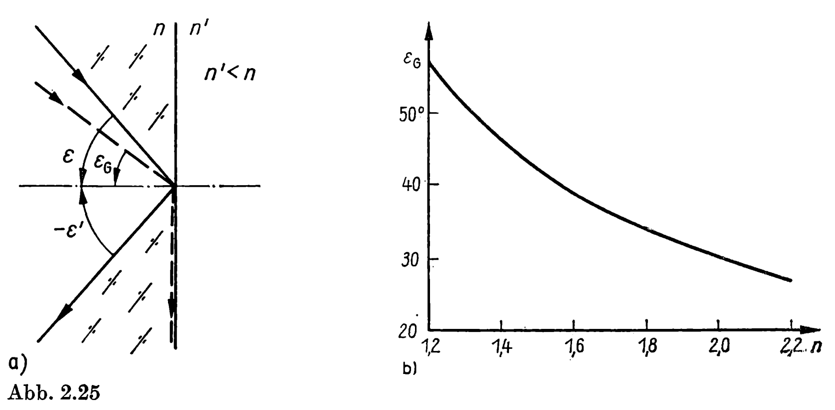


Abb. 2.25
a) Totalreflexion an der Grenzfläche mit $n' < n$
b) Grenzwinkel der Totalreflexion als Funktion der Brechzahl

Fresnelsche Formeln. Das Brechungsgesetz schreiben wir mit Gl. (2.62)

$$\sin \varepsilon'' = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_G}, \tag{2.63a}$$

für den Kosinus des Brechungswinkels erhalten wir

$$\cos \varepsilon'' = \frac{1}{\sin \varepsilon_G} \sqrt{\sin^2 \varepsilon_G - \sin^2 \varepsilon}.$$

Für $\sin \varepsilon > \sin \varepsilon_G$ ist

$$\cos \varepsilon'' = \frac{\mathrm{j}}{\sin \varepsilon_G} \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}. \tag{2.63b}$$

> Das formale Anwenden des Brechungsgesetzes auf die Totalreflexion erfordert einen komplexen Brechungswinkel.

Bei formaler Einführung des komplexen Brechungswinkels dürfen wir sämtliche für die Brechung abgeleiteten Gleichungen der Wellenoptik auf die Totalreflexion übertragen. In den Feldstärkegleichungen für die einfallende Welle und für die reflektierte Welle kommt ε'' nicht vor. Für die gebrochene Welle beträgt die elektrische Feldstärke (Einfallsebene ist die x-z-Ebene)

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{a}'' \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\nu\left(\frac{x \sin \varepsilon}{c} + \frac{z \cos \varepsilon''}{c''}\right)}.$$

Mit Gl (2.63b) entsteht daraus

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{a}'' \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\nu z}{c'' \sin \varepsilon_G}\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\nu\left(\frac{x \sin \varepsilon}{c} - t\right)}.$$

Die zweite Exponentialfunktion allein würde eine periodische Welle beschreiben, die sich in x-Richtung ausbreitet. Durch die erste Exponentialfunktion ist die Welle nicht periodisch. Die Amplitude nimmt in z-Richtung exponentiell ab. Da die x-y-Ebene die Grenzfläche darstellt, läuft im optisch dünnen Stoff eine Welle längs der Grenzfläche. Die Eindringtiefe ist jedoch wegen der exponentiellen Amplitudenänderung gering. Längs einer Strecke

$$z_e = \frac{c'' \sin \varepsilon_G}{2\pi\nu \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}} = \frac{\lambda'' \sin \varepsilon_G}{2\pi \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}} \tag{2.64}$$

klingt die Amplitude auf den e-ten Teil ab. Im günstigsten Fall $\varepsilon = 90°$ wird $z_e = (\lambda''/2\pi) \cdot \tan \varepsilon_G$. Bei optischen Gläsern mit $\varepsilon_G < 45°$ ist $z_e < \lambda''/2\pi$.

> Bei der Totalreflexion breitet sich im optisch dünneren Stoff eine Welle längs der Grenzfläche aus. Die Amplitude nimmt senkrecht zur Grenzfläche rasch ab (Abb. 2.26).

Wir setzen den Sinus des Brechungswinkels nach Gl. (2.63a) und den Kosinus des Brechungswinkels nach Gl. (2.63b) in die Fresnelschen Formeln ein. Aus Gl. (2.49a) erhalten wir

$$a_s' = a_s \frac{\dfrac{\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon_G} - \mathrm{j}\,\dfrac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_G}\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\dfrac{\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon_G} + \mathrm{j}\,\dfrac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_G}\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}$$

oder

$$a_s' = a_s \frac{\cos \varepsilon - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\cos \varepsilon + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}. \tag{2.65a}$$

Entsprechend folgt aus Gl. (2.49b)

$$a_p' = a_p \frac{\sin^2 \varepsilon_G \cdot \cos \varepsilon - j \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\sin^2 \varepsilon_G \cdot \cos \varepsilon + j \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}. \tag{2.65b}$$

Weil sowohl in Gl. (2.65a) als auch in Gl. (2.65b) der Zähler konjugiert komplex zum Nenner ist, gilt $a_s' a_s'^* = a_s a_s^*$, $a_p' a_p'^* = a_p a_p^*$ und

$$I_s' = I_s, \quad I_p' = I_p.$$

Die Intensität des reflektierten Lichtes ist der Intensität des einfallenden Lichtes gleich. Das Licht wird vollständig reflektiert, daher auch die Bezeichnung „Totalreflexion“.

Das in den optisch dünneren Stoff eindringende Licht, das auch experimentell nachgewiesen werden kann, stellt also keinen Energieverlust dar. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß die Grenzfläche unendlich ausgedehnt ist. Bei einer endlich ausgedehnten Grenzfläche tritt an den Kanten eine Störung durch Beugung auf.

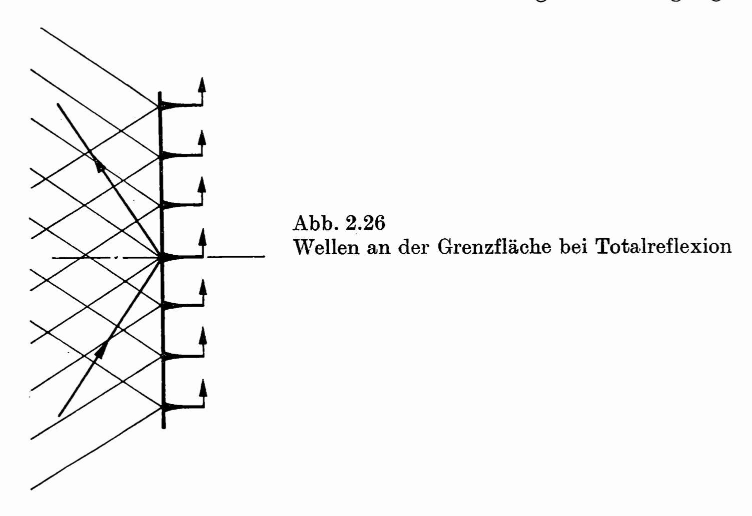


Abb. 2.26
Wellen an der Grenzfläche bei Totalreflexion

Polarisation. Zwischen der rechtwinklig und der parallel zur Einfallsebene schwingenden Komponente entsteht bei der Totalreflexion eine Phasendifferenz. Wir lassen entweder natürliches oder linear polarisiertes Licht unter einem Azimut von $\psi = 45°$ auf die Grenzfläche auftreffen. Dadurch erreichen wir, daß die Komponenten a_s und a_p gleichen Betrag und gleiche Phase haben.

Wir bringen die Fresnelschen Formeln in eine Form, aus der die Phasenänderung bei der Totalreflexion direkt ablesbar ist. Statt Gl. (2.65a) schreiben wir

$$a_s' = a_s \frac{\cos \varepsilon - j \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\cos \varepsilon + j \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}} = a_s \frac{r \cdot e^{-j\delta_s}}{r \cdot e^{j\delta_s}} = a_s e^{-2j\delta_s}.$$

Gl. (2.65b) formen wir um in

$$a_p' = a_p \frac{\sin^2 \varepsilon_G \cdot \cos \varepsilon - j\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\sin^2 \varepsilon_G \cdot \cos \varepsilon + j\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}} = a_p \frac{r \cdot e^{-j\delta_p}}{r \cdot e^{j\delta_p}} = a_p\, e^{-2j\delta_p}.$$

Dabei ist

$$\tan \delta_s = \frac{\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\cos \varepsilon}, \quad \tan \delta_p = \frac{\sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\sin^2 \varepsilon_G \cdot \cos \varepsilon}. \tag{2.66a, b}$$

Die Phasendifferenz zwischen a_s' und a_p' beträgt

$$\delta = 2(\delta_p - \delta_s). \tag{2.67}$$

Wegen

$$\tan \frac{\delta}{2} = \tan (\delta_p - \delta_s) = \frac{\tan \delta_p - \tan \delta_s}{1 + \tan \delta_p \cdot \tan \delta_s}$$

erhalten wir mit Gl. (2.66 a, b)

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \varepsilon \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon_G}}{\sin^2 \varepsilon}. \tag{2.68}$$

Bei streifendem Einfall ($\varepsilon = 90°$) und beim Grenzwinkel der Totalreflexion ($\varepsilon = \varepsilon_G$) verschwindet die Phasendifferenz. Für das Maximum gilt ($n'' = 1$):

$$\sin^2 \varepsilon_{Max} = \frac{2}{n^2 + 1}, \quad \tan \frac{\delta_{Max}}{2} = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Bei $n = 1{,}5$ ist $\varepsilon_{Max} = 51°\,41'$, $\delta_{Max} = 45°\,12'$ und $\varepsilon_G = 41°\,48'$.

2.2.5. Doppelbrechung

Wir untersuchen die Wellenausbreitung in einem homogenen anisotropen Stoff. Optisch anisotrop sind vor allem die Kristalle. Auch verspannte Gläser und Plaste verhalten sich optisch anisotrop. Diese Erscheinung stellt die Grundlage der Spannungsoptik dar, mit der Spannungen in Werkstücken modellmäßig untersucht werden können.

In einem Nichtleiter läßt sich die elektrische Verschiebung durch die Gleichung

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

darstellen. Die dielektrische Polarisation $\boldsymbol{P}$ hat ihre Ursache in der Polarisation des Stoffes, also vor allem in der Erzeugung und Ausrichtung von elementaren Dipolen.

Bei nicht zu starken Feldern ist die dielektrische Polarisation im isotropen Stoff der elektrischen Feldstärke proportional. Ihre Richtung ist also nur von der Richtung der elektrischen Feldstärke abhängig, nicht von strukturellen Einflüssen des Dielektrikums. Es gilt im isotropen Stoff:

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \varkappa\, \boldsymbol{E}.$$

(Bei starken Feldern, wie sie mit Lasern erzeugt werden können, ist $\boldsymbol{P}$ auch von höheren Potenzen der elektrischen Feldstärke abhängig. Das ist die Grundlage für die nichtlineare Optik.)

Die skalare Größe α heißt dielektrische Suszeptibilität. Damit ist

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(\alpha + 1)\,\boldsymbol{E}.$$

Wir setzen die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = \alpha + 1$, die also ebenfalls ein Skalar ist, ein und erhalten

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}.$$

Im anisotropen Stoff kann sich die dielektrische Polarisation im allgemeinen nicht in Richtung der elektrischen Feldstärke ausbilden. Jede Komponente der dielektrischen Polarisation ist dann von allen drei Komponenten der elektrischen Feldstärke abhängig.

$$P_1 = \varepsilon_0(\alpha_{11}E_1 + \alpha_{12}E_2 + \alpha_{13}E_3),$$

$$P_2 = \varepsilon_0(\alpha_{21}E_1 + \alpha_{22}E_2 + \alpha_{23}E_3),$$

$$P_3 = \varepsilon_0(\alpha_{31}E_1 + \alpha_{32}E_2 + \alpha_{33}E_3).$$

(Die Komponenten sind mit $x \triangleq 1$, $y \triangleq 2$, $z \triangleq 3$ bezeichnet.)

Entsprechend gilt mit

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\alpha_{ik}, \quad i \neq k, \qquad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_0(\alpha_{ik} + 1), \quad i = k$$

für die elektrische Verschiebung

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1 + \varepsilon_{12}E_2 + \varepsilon_{13}E_3,$$

$$D_2 = \varepsilon_{21}E_1 + \varepsilon_{22}E_2 + \varepsilon_{23}E_3,$$

$$D_3 = \varepsilon_{31}E_1 + \varepsilon_{32}E_2 + \varepsilon_{33}E_3.$$

Der Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$ wird durch einen Tensor vermittelt, der sich als Matrix schreiben läßt. Der Tensor der Dielektrizitätskonstanten lautet

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.69}$$

und es ist

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{E}.$$

Mit den Maxwellschen Gleichungen kann abgeleitet werden, daß der $\boldsymbol{\epsilon}$-Tensor symmetrisch ist ($\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$). Damit sind er und auch der reziproke Tensor $\boldsymbol{\epsilon}^{-1}$ durch Ellipsoide zu veranschaulichen (vgl. die Darstellung des Trägheitstensors in der Mechanik). Die geometrische Darstellung des Tensors $1/\varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ wird als Fresnel-

sches Ellipsoid (Abb. 2.27a), die des Tensors $\varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$ wird als Indexellipsoid bezeichnet (Abb. 2.27b). Die systematische Behandlung der Kristalloptik, bei der der Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ sowie zwischen der Ausbreitung der Energie in Richtung des Einheitsvektors $\boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{w}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{E}$) und der Ausbreitung der Wellen-

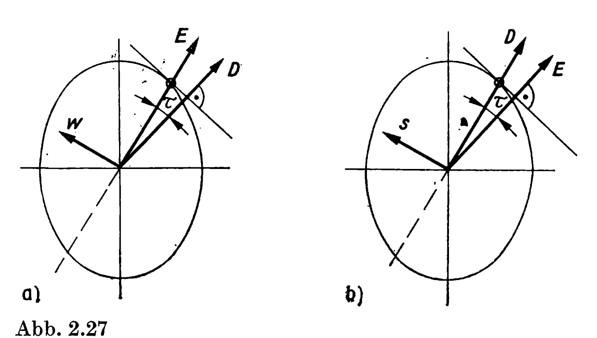


Abb. 2.27
a) Fresnelsches Ellipsoid b) Indexellipsoid

flächen in Richtung des Einheitsvektors $\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{s}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{D}$) untersucht werden, führt auf die folgenden grundlegenden Ergebnisse.

1. Im Kristall sind im allgemeinen zu einer vorgegebenen Ausbreitungsrichtung der Energie $\boldsymbol{w}$ nur zwei Richtungen von $\boldsymbol{E}$ möglich. Diese fallen mit den Hauptachsen der Ellipse zusammen, die beim Schnitt der senkrecht zu $\boldsymbol{w}$ stehenden Ebene mit dem Fresnelschen Ellipsoid entsteht (Abb. 2.28a). Die Länge der Halbachsen der Ellipse sind die zugeordneten Strahlzahlen m_{I} und m_{II}.

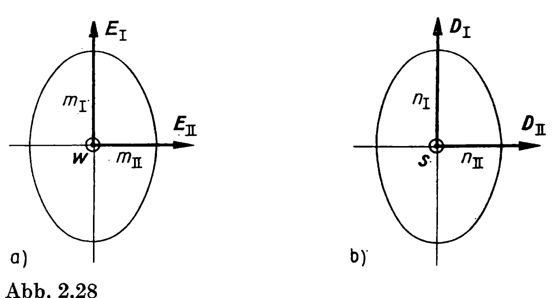


Abb. 2.28
Schnittellipse zwischen
a) Fresnelschem Ellipsoid und Ebene, b) Indexellipsoid und Ebene

Die analoge Überlegung mit dem Indexellipsoid führt auf zwei senkrecht zueinander stehende Vektoren $\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}$ und $\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}}$ sowie die zwei zugeordneten Brechzahlen n_{I} und n_{II} (Abb. 2.28b).

Die Abbildungen 2.27 enthalten zugleich die Vorschriften zur Konstruktion der Feldstärkerichtungen. Beim Fresnelschen Ellipsoid steht $\boldsymbol{D}$ senkrecht auf der Tangen-

tialebene an den Durchstoßpunkt von $\boldsymbol{E}$. Beim Indexellipsoid vertauschen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ ihre Rolle. Damit gilt:

> Im Kristall fallen im allgemeinen die elektrische Feldstärke und die elektrische Verschiebung nicht zusammen. Dadurch bilden auch die Ausbreitungsrichtungen der Energie $\boldsymbol{w}$ und der Wellennormalen $\boldsymbol{s}$ einen Winkel miteinander.
> Eine elektromagnetische Welle zerfällt im Kristall in zwei senkrecht zueinander schwingende Wellen. Das Licht wird polarisiert.

2. Wenn sich die Wellenflächen in Richtung einer Hauptachse des Indexellipsoids ausbreiten, dann liegen $\boldsymbol{D}_{\text{I}}$ und $\boldsymbol{D}_{\text{II}}$ in Richtung der beiden anderen Halbachsen. Die Brechzahlen n_{I} und n_{II} ergeben sich aus den Längen der Halbachsen. Die Längen der Halbachsen des Indexellipsoids werden als Hauptbrechzahlen n_1, n_2 und n_3 bezeichnet. Diese sind die Kennzahlen des Kristalls bezüglich des Verhaltens der Wellennormalen.

Die Strahlzahlen m_{I} und m_{II} für die Energieausbreitung in Richtung einer Hauptachse des Fresnelschen Ellipsoids sind den Kehrwerten zweier Hauptbrechzahlen gleich. Deshalb sind die Halbachsen des Fresnelschen Ellipsoids gleich den Kehrwerten der Hauptbrechzahlen.

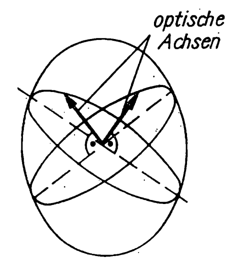


Abb. 2.29
Schnittkreise zwischen Fresnelschem Ellipsoid und Ebene. Optische Achsen

3. Es gibt zu einem vorgegebenen dreiachsigen Ellipsoid zwei Ebenen, in denen die Schnittkurven Kreise sind (Abb. 2.29). Beim Fresnelschen Ellipsoid ist dann keine E-Richtung ausgezeichnet, und es gibt nur eine Strahlzahl $m = m_{\text{I}} = m_{\text{II}}$. Für die senkrecht zu den Schnittkreisen stehenden Richtungen $\boldsymbol{w}$ gibt es also keine ausgezeichnete Schwingungsrichtung, so daß sich beliebig polarisierte Wellen ausbreiten können. (Es tritt keine Aufspaltung in senkrecht zueinander schwingende Wellen auf.)

> Im Kristall gibt es im allgemeinen zwei Richtungen der Energieausbreitung, in denen sich eine Welle wie im isotropen Stoff verhält. Diese Richtungen werden optische Achsen genannt. Im allgemeinen sind die Kristalle optisch zweiachsig.

Der allgemeine Fall liegt bei den Kristallen des triklinen, monoklinen und rhombischen Kristallsystems vor.

4. Die Kristalle des tetragonalen, trigonalen und hexagonalen Kristallsystems haben

mehrzählige Symmetrieachsen, so daß das Fresnelsche Ellipsoid und das Indexellipsoid Rotationsflächen sein müssen. (Die Kristalle des kubischen Systems haben drei senkrecht aufeinander stehende vierzählige Drehachsen, so daß die Ellipsoide in Kugeln ausarten. Kubische Kristalle verhalten sich optisch isotrop.) Es gibt also nur zwei Hauptbrechzahlen n_r und n_a. Bei allen Ellipsen, die beim Schnitt des Indexellipsoids mit einer Ebene entstehen, ist eine Halbachse gleich lang. Für alle Richtungen von $\boldsymbol{s}$ ist eine Brechzahl konstant $n_{\mathrm{I}} = n_r$ (ordentliche, bzw. reguläre Brechzahl), die andere $n_{\mathrm{II}} = n_\psi$ hängt vom Winkel ψ zwischen $\boldsymbol{s}$ und der Rotationsachse ab (Abb. 2.30).

Die Gleichung der Schnittellipse, die die Rotationsachse enthält, lautet

$$\frac{x^2}{n_r^2} + \frac{y^2}{n_a^2} = 1.$$

Weiter ist

$$x = n_\psi \cos\psi \qquad \text{und} \qquad y = n_\psi \sin\psi.$$

Daraus folgt für die Brechzahl

$$n_\psi^2 = \frac{n_r^2 n_a^2}{n_a^2 \cos^2\psi + n_r^2 \sin^2\psi}. \tag{2.70}$$

Es gibt bei einem rotationssymmetrischen Indexellipsoid und Fresnelschen Ellipsoid nur einen Schnittkreis mit einer Ebene. Dieser steht senkrecht zur Rotationsachse, die damit die optische Achse ist. Die tetragonalen, trigonalen und hexagonalen Kristalle sind optisch einachsig.

In optisch einachsigen Kristallen entsteht im allgemeinen eine linear polarisierte ordentliche Welle, deren Brechzahl n_r unabhängig von der Normalenrichtung $\boldsymbol{s}$ ist und eine senkrecht dazu schwingende außerordentliche Welle mit der richtungsabhängigen Brechzahl n_ψ.

Die Normalenrichtung und die optische Achse spannen eine Ebene, den Hauptschnitt des Kristalls auf. Es gilt:

$$\frac{\text{Ordentliche}}{\text{Außerordentliche}} \text{ Wellen schwingen } \frac{\text{senkrecht}}{\text{parallel}} \text{ zum Hauptschnitt.}$$

5. Nach der Abb. 2.27 besteht zwischen der Ausbreitungsrichtung der Energie $\boldsymbol{w}$ und der Ausbreitungsrichtung der Wellennormalen $\boldsymbol{s}$ der Winkel τ. Entsprechend sind auch die Geschwindigkeiten verschieden. Damit die Wellenflächen erhalten bleiben, muß sich aber die Normalengeschwindigkeit $\boldsymbol{c}_n$ als Projektion der Strahlgeschwindigkeit $\boldsymbol{c}_s$ auf die Richtung von $\boldsymbol{s}$ ergeben ($c_n = c_s \cos\tau$; Abb. 2.31).

Normalen- und Strahlgeschwindigkeit sind im allgemeinen richtungsabhängig und außerdem für die beiden senkrecht zueinander schwingenden Wellen im Kristall verschieden ($c_{n\mathrm{I}}$, $c_{n\mathrm{II}}$, $c_{s\mathrm{I}}$, $c_{s\mathrm{II}}$). Bei den optisch einachsigen Kristallen ist jedoch die Strahl- und Normalengeschwindigkeit für die ordentliche Welle gleich und unabhängig von der Ausbreitungsrichtung der Wellen ($c_{nr} = c_{sr}$).

6. Tragen wir von einem Punkt im Kristall aus nach allen Richtungen Vektoren ab, die der Strahlgeschwindigkeit $\boldsymbol{c}_s$ proportional sind, dann bilden ihre Endpunkte die Strahlenfläche. Da es zu jeder Richtung von $\boldsymbol{w}$ die beiden Strahlgeschwindigkeiten $\boldsymbol{c}_{sI}$ und $\boldsymbol{c}_{sII}$ gibt, ist die Strahlenfläche zweischalig. Bei optisch zweiachsigen Kristallen besteht sie aus zwei Flächen 4. Ordnung, die sich in den Durchstoßpunkten der optischen Achsen berühren.

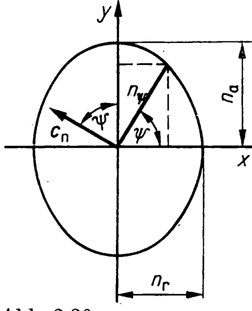


Abb. 2.30
Schnitt durch das Indexellipsoid eines einachsigen Kristalls

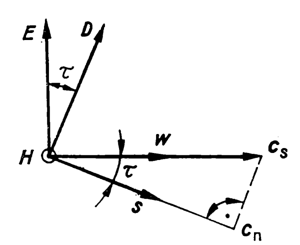


Abb. 2.31
Gegenseitige Lage der Vektoren im Kristall

Bei optisch einachsigen Kristallen besteht die Strahlenfläche aus einer Kugel mit dem zu c_{sr} proportionalen Radius und einem Rotationsellipsoid mit den Radien, die zu c_{sa} proportional sind. Kugel und Rotationsellipsoid berühren sich in den Durchstoßpunkten der Rotationsachse, die zugleich die Richtung der optischen Achse hat. Man unterscheidet positiv und negativ einachsige Kristalle (Abb. 2.32).

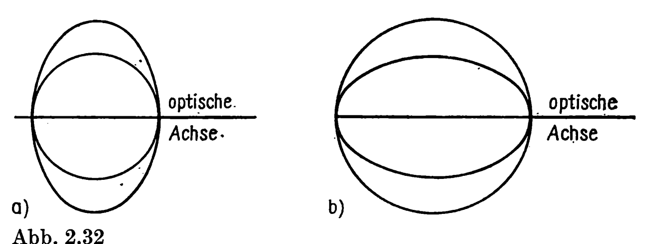


Abb. 2.32
Elementarwellen im negativ (a) bzw. positiv (b) einachsigen Kristall

Bei einem $\frac{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ einachsigen Kristall liegt die Kugel $\frac{\text{außerhalb}}{\text{innerhalb}}$ des Rotationsellipsoids.

Auch bei der Anwendung des Huygensschen Prinzips auf die Lichtausbreitung in Kristallen müssen die zwei Elementarwellen betrachtet werden, die aus den beiden Teilen der Strahlenfläche für kleinste Ausbreitungszeiten bestehen.

Doppelbrechung. Für die Brechung der Wellennormalen an der Grenzfläche zwischen einem isotropen und einem anisotropen Stoff gilt (Abb. 2.33):

Die Wellennormalen bleiben in der Einfallsebene.
Die Normale der ordentlichen Welle wird nach dem Gesetz

$$n \sin \varepsilon = n_r \sin \varepsilon_r', \tag{2.71a}$$

die Normale der außerordentlichen Welle wird nach dem Gesetz

$$n \sin \varepsilon = n_\psi \sin \varepsilon_\psi' \tag{2.71b}$$

gebrochen.

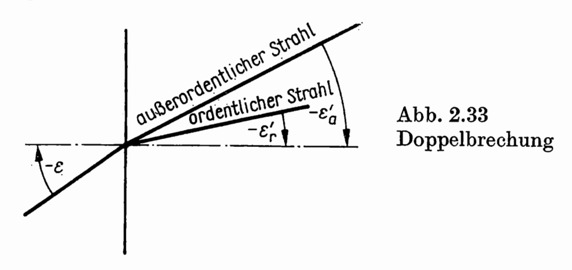


Abb. 2.33
Doppelbrechung

Die Anwendung des Brechungsgesetzes für die außerordentliche Welle ist schwieriger, als es auf den ersten Blick erscheint, weil n_ψ von ε_ψ' abhängt. Der Winkel ψ läßt sich bei bekannter Orientierung der Oberfläche zur optischen Achse des anisotropen Stoffes auf den Winkel ε_ψ' zurückführen.

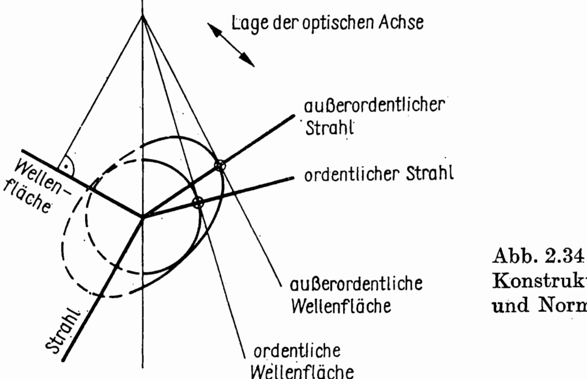


Abb. 2.34
Konstruktion der Strahlen- und Normalenrichtung

Die zeichnerische Behandlung des Lichtdurchgangs durch eine Grenzfläche, auf die das Licht senkrecht auftrifft, ist in der Tab. 2.9 für verschiedene Lagen der optischen Achse dargestellt. Den Bildern der Tabelle liegen zwei Regeln zugrunde:

— Die Wellenflächen tangieren die Elementarwellen.
— Die Strahlen gehen durch den Berührungspunkt der Wellenflächen mit den Elementarwellen.

Die Phasendifferenz, die infolge der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit zwischen der ordentlichen und der außerordentlichen Welle längs der Strecke l im Kristall entsteht, ist mit der Beziehung

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L$$

ausgerechnet worden (λ_0 = Lichtwellenlänge im Vakuum). ΔL ist der optische Wegunterschied zwischen beiden Wellen.

Abbildung 2.34 enthält die Konstruktion der Wellenflächen und der Strahlrichtungen für eine schräg auf eine Kristalloberfläche auftreffende Welle. Aus Abb. 2.34 und der Tab. 2.9 folgt:

> Bei der Brechung an der Grenzfläche zwischen einem isotropen und einem anisotropen Stoff entstehen im allgemeinen zwei Wellen unterschiedlicher Normalen- und Strahlrichtung, deren Schwingungsebenen senkrecht zueinander stehen. Es tritt Doppelbrechung ein. Bei optisch einachsigen Stoffen entstehen die ordentliche und die außerordentliche Welle.

Die Abbildungen 2.35a···e zeigen den Verlauf enger Parallelbündel durch planparallele Platten aus optisch einachsigen Kristallen.

Tabelle 2.9
Doppelbrechung bei unterschiedlicher Orientierung der optischen Achse zur Oberfläche

Elementarwellen, Normalen- und Strahlkonstruktion	optische Achse	Normalenrichtung	Strahlrichtung	Polarisation	Phasendifferenz längs der Strecke l
	senkrecht zur Oberfläche	bleibt senkrecht zur Oberfläche, Wellenflächen tangieren die Elementarwellen	bleibt senkrecht zur Oberfläche	keine Polarisation	keine Phasendifferenz (nur eine Welle)
	parallel zur Oberfläche	"	"	ordentliche Welle senkrecht zur Zeichenebene, außerordentliche Welle parallel zur Zeichenebene	$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0}(n_r - n_a)$
	parallel zur Oberfläche	"	"	ordentliche Welle parallel zur Zeichenebene, außerordentliche Welle senkrecht zur Zeichenebene	$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0}(n_r - n_a)$
	schräg zur Oberfläche	"	ordentlicher Strahl bleibt senkrecht zur Oberfläche, außerordentlicher Strahl wird gebrochen	ordentliche Welle senkrecht zur Zeichenebene, außerordentliche Welle parallel zur Zeichenebene	$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0}(n_r - n_\psi)$

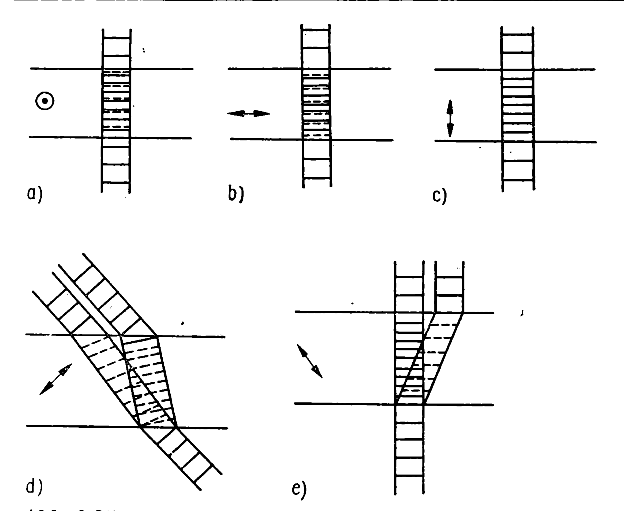


Abb. 2.35
Durchgang eines engen Parallelbündels durch eine Kristallplatte

2.3. Dispersion und Absorption

2.3.1. Absorption

Sämtliche Stoffe absorbieren einen Teil des hindurchgehenden Lichtes, wobei die Lichtenergie in eine andere Energieform umgewandelt wird; im allgemeinen entsteht Wärme. Stoffe mit geringer Absorption werden als durchsichtig bezeichnet. Metalle absorbieren das Licht sehr stark.

Reintransmissionsgrad. Wir untersuchen den Lichtdurchgang durch eine planparallele Platte aus einem homogenen isotropen Stoff. I_2 sei die Lichtintensität unmittelbar vor der Austrittsfläche, I_1 die Lichtintensität dicht hinter der Eintrittsfläche (Abb. 2.36). Die relative Änderung der Lichtintensität in der Platte ist dem zurückgelegten Weg proportional. Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{4\pi}{\lambda}\,\varkappa \cdot \mathrm{d}x.$$

Die Größe $\varkappa$ wird als Absorptionskonstante bezeichnet. Wir integrieren über die Plattendicke d,

$$\int_{I_1}^{I_2} \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{4\pi\varkappa}{\lambda} \int_0^d \mathrm{d}x,$$

und erhalten

$$\ln \frac{I_2}{I_1} = -\frac{4\pi}{\lambda}\,\varkappa d. \tag{2.72}$$

Wir definieren:

> Der Quotient aus den Intensitäten I_2 und I_1 in den Endpunkten einer im absorbierenden Stoff zurückgelegten Strecke ist der Reintransmissionsgrad ϑ.

Nach Gl. (2.72) gilt für den Zusammenhang zwischen dem Reintransmissionsgrad und der Absorptionskonstanten

$$\vartheta = \frac{I_2}{I_1} = e^{-\frac{4\pi}{\lambda}\varkappa d}. \tag{2.73}$$

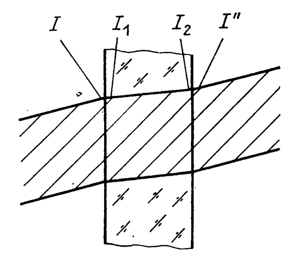


Abb. 2.36
Zum Reintransmissionsgrad und Transmissionsgrad

Tabelle 2.10
Reintransmissionsgrad für die Einheitsdicke

Glasart	BD 35-94	VE 52-72
alte Bezeichnung	BG 24	VG 8
Glasfarbe	Blauviolett	Grün
λ in nm	δ	δ
254	0,84	—
334	0,99	0,20
436	0,86	0,93
509	0,13	0,89
578	0,03	0,51
644	0,17	0,20
700	0,88	0,10
800	0,91	0,06
900	0,87	0,09
1000	0,81	0,15

Der *Reintransmissionsgrad für die Einheitsdicke* δ (Beispiele enthält Tab. 2.10) ist der auf die Dicke 1 mm bezogene Reintransmissionsgrad. Diese Größe ermöglicht es, die verschiedenen Stoffe zu vergleichen. Aus Gl. (2.73) folgt mit $d = 1$ mm

$$\delta = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{d=1\,\text{mm}} = e^{-\frac{4\pi\varkappa}{\lambda}}. \tag{2.74}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (2.73) und Gl. (2.74) ergibt sich

$$\vartheta = \delta^d. \tag{2.75}$$

Transmissionsgrad. An den beiden Flächen der planparallelen Platte wird ein Teil des Lichtes reflektiert. Dadurch wird die durch die Platte hindurchgehende Intensität zusätzlich geschwächt. Die Reflexionsverluste werden im Transmissionsgrad mit erfaßt.

> Der Transmissionsgrad τ ist das Verhältnis aus hindurchgelassener und auftreffender Intensität (Abb. 2.36).

I sei die Intensität unmittelbar vor der Eintrittsfläche, I'' die Intensität unmittelbar hinter der Austrittsfläche. Damit gilt:

$$\tau = \frac{I''}{I}. \tag{2.76}$$

Wir berechnen den Transmissionsgrad für eine planparallele Platte aus einem nichtleitenden Stoff mit der relativen Brechzahl n. Das Licht soll senkrecht auf die Platte treffen und nicht interferieren. Es wird innerhalb der Platte mehrmals reflektiert. Von Fläche zu Fläche ergibt sich für die Intensitäten:

Eintrittsfläche,	einfallend	I	
	hindurchgelassen	ID	
Austrittsfläche,	einfallend	$ID\vartheta$	
	reflektiert	$ID\vartheta R$	
	hindurchgelassen	$ID^2\vartheta$	
Eintrittsfläche,	einfallend	$ID\vartheta^2R$	
	reflektiert	$ID\vartheta^2R^2$	
Austrittsfläche,	einfallend	$ID\vartheta^3R^2$	
	reflektiert	$ID\vartheta^3R^3$	
	hindurchgelassen	$ID^2\vartheta^3R^2$	usw.

Die Anteile mit D^2 sind die ersten beiden Teilintensitäten des durch die Platte hindurchgehenden Lichtes. Wir lesen ab, daß die gesamte hindurchgelassene Intensität

$$I'' = ID^2\vartheta \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m}\vartheta^{2m}$$

beträgt. Die Summe stellt eine unendliche geometrische Reihe dar. Aufsummieren ergibt

$$I'' = ID^2\vartheta \frac{1}{1 - \vartheta^2R^2}. \tag{2.77}$$

Bei geringer Absorption dürfen wir nach Gl. (2.51c) angenähert $D = 1 - R$ setzen,

so daß für den Transmissionsgrad nach Gl. (2.77)

$$\tau = \vartheta \frac{(1 - R)^2}{1 - \vartheta^2 R^2} \tag{2.78}$$

gilt.

ϑ liegt zwischen den Werten Null und Eins. Bei Glasfiltern ist R klein. Bei $n = 1{,}5$ gilt z. B. $R = 0{,}04$. Bei $\vartheta = 0$ ist $1 - \vartheta^2 R^2 = 1$, und bei $\vartheta = 1$ ist $1 - \vartheta^2 R^2 = 0{,}9984$. Bei kleinem Reflexionsvermögen ist mit guter Näherung $1 - \vartheta^2 R^2 = 1 - R^2$.

Wir setzen $1 - R^2 = (1 - R)(1 + R)$ und erhalten

$$\tau = \vartheta \frac{1 - R}{1 + R} \tag{2.79}$$

oder mit R nach Gl. (2.54)

$$\tau = \vartheta \frac{2n}{n^2 + 1}.$$

Der Ausdruck (P lies Rho)

$$P = \frac{2n}{n^2 + 1} \tag{2.80}$$

wird in Filtertabellen als Reflexionsfaktor bezeichnet, obwohl er die Durchlässigkeit der beiden Grenzflächen beschreibt. Zwischen dem Transmissionsgrad und dem Reintransmissionsgrad besteht die Beziehung

$$\tau = \vartheta P. \tag{2.81}$$

Wir weisen nochmals darauf hin, daß Gl. (2.80) nur bei kleinem Reflexionsvermögen gilt.

Wellengleichung für Leiter. In einem elektrisch leitenden Stoff ist ein elektrischer Strom möglich. Die Maxwellschen Gleichungen lauten mit der elektrischen Stromdichte $\boldsymbol{i}$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{B}} = 0, \tag{2.82a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \dot{\boldsymbol{D}} - \boldsymbol{i} = 0. \tag{2.82b}$$

In isotropen Stoffen, in denen das Ohmsche Gesetz gilt, ist

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E},$$

so daß

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \mu_r \mu_0 \sigma \boldsymbol{E} - \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}} = 0$$

wird. Wir differenzieren nach der Zeit:

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{B}} - \mu_r \mu_0 \sigma \dot{\boldsymbol{E}} - \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \ddot{\boldsymbol{E}} = 0.$$

Wir führen die Kreisfrequenz ω der zu untersuchenden Welle und eine Dämpfungsgröße ϱ mittels

$$\mu_r \mu_0 \sigma = \varepsilon_0 \mu_0 \omega \varrho \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\mu_r \sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

ein. Damit entsteht

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{B}} - \varepsilon_0 \mu_0 \omega \varrho \dot{\boldsymbol{E}} - \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \ddot{\boldsymbol{E}} = 0 .$$

In diese Gleichung setzen wir $\dot{\boldsymbol{B}}$ aus Gl. (2.82a) ein:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 \mu_0 (\omega \varrho \dot{\boldsymbol{E}} + \varepsilon_r \mu_r \ddot{\boldsymbol{E}}) = 0.$$

Wir nehmen an, daß im betrachteten Gebiet keine Überschußladungen vorhanden sind. Es gilt dann $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ und $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\triangle \boldsymbol{E}$. Unter Verwendung von $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c_0^2$ ergibt sich die Wellengleichung für Leiter

$$\triangle \boldsymbol{E} = \frac{1}{c_0^2} (\omega \varrho \dot{\boldsymbol{E}} + \varepsilon_r \mu_r \ddot{\boldsymbol{E}}) . \tag{2.83}$$

Komplexe Brechzahl für Leiter. Wir untersuchen die Eigenschaften einer periodischen Welle konstanter Ausbreitungsrichtung im Leiter. Mit Gl. (2.6) erhalten wir analog zu den Ableitungen im Abschn. 2.1.1.

$$\triangle E = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} E, \quad \dot{E} = -\frac{2\pi \mathrm{j} c}{\lambda} E, \quad \ddot{E} = -\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} E .$$

Einsetzen in die Wellengleichung (2.83) und Kürzen von E ergibt mit

$$\omega = 2\pi\nu = (2\pi c)/\lambda$$

$$\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = \varepsilon_r \mu_r + \mathrm{j}\varrho .$$

Daraus ist abzulesen:

> Wenn wir auch im Leiter an der Definition der Brechzahl $\bar{n} = c_0/c$ festhalten wollen, dann müssen wir eine komplexe Brechzahl einführen.

Wir setzen

$$\bar{n} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r + \mathrm{j}\varrho} = n(1 + \mathrm{j}\varkappa) . \tag{2.84a}$$

Quadrieren ergibt

$$\varepsilon_r \mu_r + \mathrm{j}\varrho = n^2(1 - \varkappa^2) + 2\mathrm{j} n^2 \varkappa ,$$

so daß

$$\varepsilon_r \mu_r = n^2(1 - \varkappa^2) \quad \text{und} \quad \varrho = 2\varkappa n^2 \tag{2.84b, c}$$

zu setzen ist.

Für den ortsabhängigen Anteil der elektrischen Feldstärke gilt

$$a \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}\bar{n}}{\lambda_0}(\boldsymbol{rs})} = a \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\pi n \varkappa}{\lambda_0}(\boldsymbol{rs})} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j} n}{\lambda_0}(\boldsymbol{rs})}.$$

Im Leiter nimmt die Amplitude der elektrischen Feldstärke ab und zwar längs der Strecke

$$(\boldsymbol{rs})_\varkappa = \frac{\lambda_0}{2\pi n}$$

auf den $\mathrm{e}^\varkappa$-ten Teil der Ausgangsamplitude. Die Welle wird im Leiter längs der Ausbreitungsrichtung gedämpft (Abb. 2.37). Die Größe $\varkappa$ stellt die Dämpfungskonstante dar, die wir auch für absorbierende Nichtleiter in den Gleichungen (2.72) bis (2.74) verwendet haben.

Wir erkennen nun auch die Bedeutung der komplexen Brechzahl.

> Die komplexe Brechzahl $\bar{n}$ stellt eine formale Zusammenfassung der reellen Brechzahl n und der Absorptionskonstanten $\varkappa$ dar, die der Vereinfachung theoretischer Ableitungen dient.

Metallreflexion. Für beliebige Einfallswinkel ε setzen wir bei absorbierenden Stoffen

$$\sin \varepsilon'' = \frac{\sin \varepsilon}{\bar{n}}, \qquad \cos \varepsilon'' = \frac{1}{\bar{n}} \sqrt{\bar{n}^2 - \sin^2 \varepsilon}. \qquad (2.85\text{a, b})$$

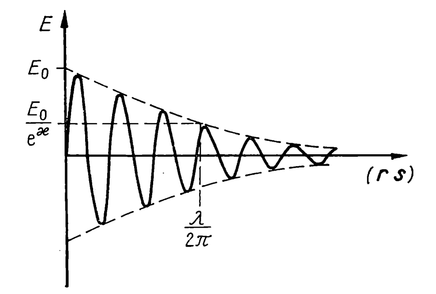


Abb. 2.37
Gedämpfte Welle zu einem festen Zeitpunkt

Metalle zeichnen sich durch eine relativ große Absorptionskonstante aus; es ist $n^2\varkappa^2 \gg 1$. Deshalb dürfen wir mit guter Näherung in Gl. (2.85b) unter der Wurzel $\sin^2 \varepsilon$ gegenüber $n^2(1 - \varkappa^2)$ vernachlässigen, also $\cos \varepsilon'' = 1$ verwenden.

Wir setzen die Gleichungen (2.85a, b) in die Fresnelschen Formeln (2.49a, b) ein:

$$a_s' = a_s \frac{\cos \varepsilon - \bar{n}}{\cos \varepsilon + \bar{n}}, \qquad a_p' = -a_p \frac{1 - \bar{n} \cos \varepsilon}{1 + \bar{n} \cos \varepsilon}.$$

Wir gehen zum Reflexionsvermögen über und setzen $\bar{n} = n(1 + \mathrm{j}\varkappa)$. Damit ist

$$R_s = \frac{(\cos \varepsilon - n)^2 + n^2\varkappa^2}{(\cos \varepsilon + n)^2 + n^2\varkappa^2} \qquad (2.86\text{a})$$

und

$$R_p = \frac{(1 - n \cos \varepsilon)^2 + n^2 \varkappa^2 \cos^2 \varepsilon}{(1 + n \cos \varepsilon)^2 + n^2 \varkappa^2 \cos^2 \varepsilon}. \tag{2.86b}$$

Wegen des großen Wertes für $n^2\varkappa^2$ bei Metallen wird das Reflexionsvermögen groß sein (Tab. 2.11). Die Wellenlängenabhängigkeit der Absorptionskonstanten wirkt sich stark auf das Reflexionsvermögen aus. Gold z. B. reflektiert bevorzugt gelbes Licht, absorbiert also gelbes Licht auch stark. Dünne Goldfolien sind in Durchsicht blau.

Die Amplituden des reflektierten Lichtes sind komplex. Bei der Reflexion an Metallen entsteht eine Phasendifferenz zwischen a_s' und a_p'. Nach den Gleichungen (2.86a, b) sind die Amplituden auch betragsmäßig verschieden. Daraus folgt:

Das an Metallen reflektierte Licht ist im allgemeinen elliptisch, im Spezialfall zirkular polarisiert.

Tabelle 2.11
Daten einiger Metalle für Licht der Na-D-Linie

Metall	$n\varkappa$	n	$R(\varepsilon = 0)$
Silber	3,64	0,18	0,95
Aluminium	5,23	1,44	0,827
Quecksilber	4,41	1,62	0,753
Kupfer	2,63	0,62	0,714
Stahl	3,37	2,27	0,589

2.3.2. Dispersion

Normale und anomale Dispersion. Beim Durchgang des Lichtes durch einen schwach absorbierenden Stoff tritt Dispersion auf. Die Brechzahl der Stoffe und damit die Phasengeschwindigkeit der Lichtwelle hängen von der Wellenlänge ab (Abb. 2.38).

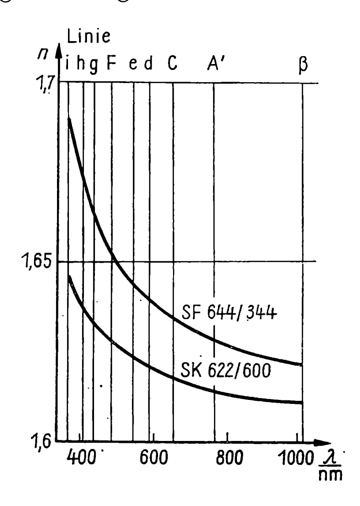


Abb. 2.38
Dispersion für zwei Glastypen

Die Ursache dafür ist das frequenzabhängige Mitschwingen der Ladungen und Dipole im Stoff, das zu einer zeitlich veränderlichen dielektrischen Polarisation führt.

Wir nehmen an, daß die dielektrische Polarisation unter dem Einfluß des elektrischen Feldes eine gedämpfte erzwungene harmonische Schwingung ausführt. Wenn sich die elektrische Feldstärke längs der atomaren Dimensionen wenig ändert, können wir die Ortsabhängigkeit der Welle vernachlässigen.

Die Welle nehmen wir als eben, periodisch und linear polarisiert an, so daß

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s}) - \omega t\right]}$$

ist. Die Schwingungsgleichung für die dielektrische Polarisation lautet:

$$\ddot{P} + 2\beta\dot{P} + \omega_0^2 P = \varepsilon_0 k E. \tag{2.87}$$

β ist die Dämpfungskonstante, ω_0 ist die Eigenfrequenz der freien ungedämpften Schwingung und k ist eine von der Art und der Zahl der mitschwingenden Teilchen abhängige Größe.

Für isotrope homogene Stoffe und schwache Felder setzen wir

$$P = \varepsilon_0 \bar{\alpha} E, \quad \dot{P} = -\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 \bar{\alpha} E, \quad \ddot{P} = -\omega^2 \varepsilon_0 \bar{\alpha} E$$

und erhalten aus Gl. (2.87)

$$\bar{\alpha} = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{j}\beta\omega}. \tag{2.88}$$

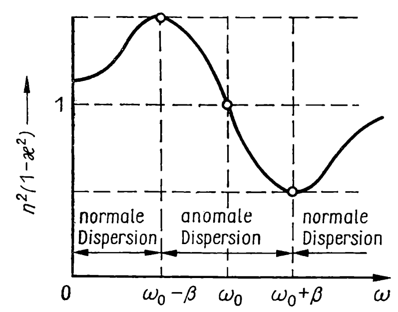


Abb. 2.39
Abhängigkeit der Brechzahl von der Kreisfrequenz

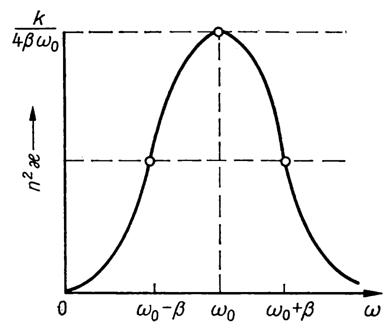


Abb. 2.40
Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Kreisfrequenz

Die elektrische Suszeptibilität $\bar{\alpha}$ ist komplex, so daß auch die Brechzahl über $\bar{n}^2 = \bar{\varepsilon}_r = \bar{\alpha} + 1$ ($\mu_r = 1$ gesetzt) komplex wird. Trennung von Real- und Imaginärteil und Anwenden von $\bar{n} = n(1 + \mathrm{j}\varkappa)$ nach Gl. (2.84a) führt auf

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + k\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \tag{2.89a}$$

und

$$n^2\varkappa = \frac{k\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}. \tag{2.89b}$$

In der Abb. 2.39 ist $n^2(1 - \varkappa^2)$ und in der Abb. 2.40 $n^2\varkappa$ als Funktion von ω dargestellt (für $\omega_0 \gg \beta$, außerdem kann $\varkappa^2 \ll 1$ angenommen werden). In der Umgebung der Eigenfrequenz hat die Absorption einen großen Betrag, und die Brechzahl nimmt mit der Frequenz ab (anomale Dispersion).

Für Frequenzen des Lichtes, die sich stark von der Eigenfrequenz unterscheiden, ist die Absorption zu vernachlässigen, und die Brechzahl wächst mit der Frequenz an (normale Dispersion).

In einem Stoff können mehrere Eigenschwingungen angeregt werden. In Bereichen normaler Dispersion, in denen β vernachlässigbar und $\omega_0 \neq \omega_i$ ist, gilt dann

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum_i \frac{C_i}{\omega_0^2 - \omega_i^2}.$$

Im elektromagnetischen Spektrum ergibt sich ein prinzipieller Brechzahlverlauf nach Abb. 2.41.

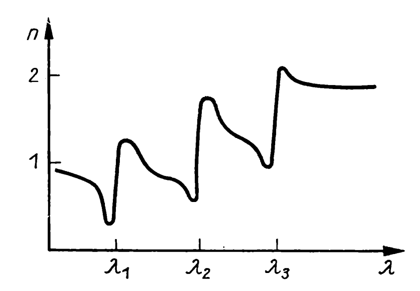


Abb. 2.41
Brechzahlverlauf im elektromagnetischen Spektrum

Gläser zeigen im sichtbaren Gebiet des Spektrums normale Dispersion, sie brechen also violettes Licht stärker als rotes. Bei ihnen tritt anomale Dispersion im Infraroten und im Ultravioletten auf. Im sichtbaren Gebiet von 450 nm bis 600 nm finden wir z. B. anomale Dispersion bei festem Fuchsin.

Dispersionsformeln. Für die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge des Lichtes können theoretisch begründete Näherungsformeln angegeben werden, die empirisch bestimmte Konstanten enthalten.

Im Bereich des sichtbaren Lichtes ist bei nicht zu hohen Genauigkeitsforderungen die Dispersionsformel von HARTMANN gültig. Sie lautet:

$$n = n_0 + \frac{A}{(\lambda - \lambda_0)^B}.$$

A, B, n_0 und λ_0 sind empirisch zu bestimmen. B liegt zwischen 0,5 und 2, ist aber häufig durch Eins ersetzbar.

Beim Glastyp SF 761/273 (SF 4) gilt z. B.:
$n_0 = 1{,}715$, $\lambda_0 = 295{,}7$ nm, $A = 11{,}65$ nm, $B = 1$. Für die Wellenlänge $\lambda = 587{,}6$ nm berechnen wir für SF 761/273 mit der Hartmannschen Näherungsformel $n = 1{,}7549$, während der experimentelle Wert $n = 1{,}7552$ beträgt.

Höhere Genauigkeit garantiert eine theoretisch besser begründete Dispersionsformel, die für optische Gläser von den Glasherstellern empfohlen wird. Die Beziehung

$$n^2 = A_0 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda^{-2} + A_3\lambda^{-4} + A_4\lambda^{-6} + A_5\lambda^{-8} \tag{2.90}$$

liefert mit den in den Glaskatalogen enthaltenen Konstanten, die mit der Methode der kleinsten Quadrate aus Meßwerten der Brechzahlen bestimmt werden,

im Bereich 400 nm $\leqq \lambda \leqq$ 750 nm die Brechzahl auf $\pm 3 \cdot 10^{-6}$;
in den Bereichen 355 nm $\leqq \lambda \leqq$ 400 nm,
750 nm $\leqq \lambda \leqq$ 1014 nm auf $\pm 5 \cdot 10^{-6}$ genau.

Schließlich sei noch die Herzbergersche Dispersionsformel angegeben. Diese lautet:

$$n = A_0 + A_1\lambda^2 + \frac{A_2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} + \frac{A_3}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2}, \quad \lambda_0 = 168\ \text{nm}. \tag{2.91}$$

Wellenlängenskale. Durch die Dispersion wird das Licht bei der Brechung spektral zerlegt.

Tabelle 2.12
Spektrallinien als Wellenlängennormale

Symbol	Wellenlänge in nm	Element	Spektralbereich
h	404,7	Hg	Violett
F′	480,0	Cd	Blau
F	486,1	H_2	Blau
e	546,1	Hg	Grün
d	587,1	He	Gelb
C′	643,8	Cd	Rot
C	656,3	H_2	Rot

Polychromatisches Licht hat eine wesentliche spektrale Breite der Intensitätsverteilung (Abb. 2.42), so daß es ein kontinuierliches Spektrum ergibt. Auch „weißes Licht" ist polychromatisch. Seine spektrale Intensitätsverteilung ist derjenigen der Sonnenstrahlung ähnlich.

Quasimonochromatisches Licht liegt im allgemeinen bei den Spektrallinien vor. Es kann aber auch mit Filtern aus polychromatischem Licht ausgesondert werden (Abb. 2.43). Das Wellenlängenintervall, außerhalb dessen die Intensität unter 50% ihres Maximalwertes liegt, wird als Halbwertsbreite bezeichnet. Die Halbwertsbreite erfüllt bei quasimonochromatischem Licht die Bedingung $\Delta\lambda_{0,5} \ll \lambda$.

Eine Folge von Spektrallinien, also von quasimonochromatischem Licht, eignet sich mit ihren Schwerpunktwellenlängen als Wellenlängenskale. Die für die Beschreibung der Dispersion optischer Gläser verwendeten Spektrallinien sind in der Tab. 2.12 zusammengestellt.

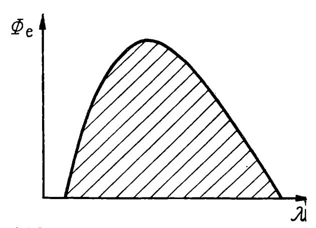


Abb. 2.42
Spektraler Strahlungsfluß
für polychromatisches Licht

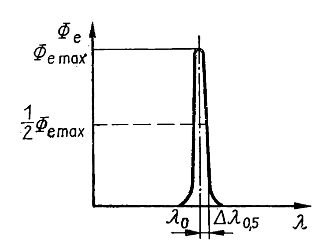


Abb. 2.43
Spektraler Strahlungsfluß
für quasimonochromatisches Licht

Monochromatisches Licht stellt den theoretischen Grenzfall des quasimonochromatischen Lichtes für $\Delta\lambda_{0,5} \to 0$ dar. Es ist experimentell nicht zu verwirklichen.

2.3.3. Werkstoffe

Optisches Glas, wie es für Spiegel, Prismen, Linsen u. a. verwendet wird, stellt einen wertvollen Werkstoff dar. Der Begriff „Optisches Glas" ist im TGL-Blatt 22016 „Optisches Glas, Glasarten" festgelegt (verbindlich seit 1. 1. 1969). Sinngemäß steht dort:

> Optisches Glas ist ein anorganisches Schmelzprodukt, das ohne Kristallisation erstarrt. Es hat im sichtbaren Gebiet des elektromagnetischen Spektrums einen hohen Reintransmissionsgrad und ist weitgehend frei von Inhomogenitäten.

Die optischen Daten — es sind über den gesamten Durchlässigkeitsbereich mehrere Brechzahlen anzugeben — müssen innerhalb eines Glasblocks außerordentlich konstant sein.

Im Glaskatalog des VEB Jenaer Glaswerk Schott und Gen. wird zugesichert, daß durch Feinkühlung die Brechzahlschwankung innerhalb einer Schmelze unter $\pm 0{,}0001$ bleibt. Von Schmelze zu Schmelze kann sich im allgemeinen die Brechzahl eines Glastyps um $\pm 0{,}001$ ändern. Deshalb erhält jede Schmelze eine Nummer, für die aus dem entsprechenden Schmelzenzettel die realen Brechzahlen ermittelt werden können. Bei hochwertigen optischen Systemen muß im allgemeinen eine Abwandlung der Parameter vorgenommen werden, wenn andere Schmelzen zum Einsatz kommen.

Zu den Forderungen hinsichtlich der optischen Daten kommen diejenigen hinsichtlich Widerstandsfähigkeit gegen Witterungseinflüsse, Unempfindlichkeit gegen Fleckenbildung durch Säureeinflüsse bei der Bearbeitung, Fehlen von Häufungen an Blasen, Fehlen von Schlieren, Knoten und Steinchen hinzu.

> Nach der grundsätzlichen Zusammensetzung und den optischen Eigenschaften werden die optischen Gläser zu Gruppen, den Glasarten zusammengefaßt (Tab. 2.13).
> Die speziellen optischen Gläser mit bestimmten Werten der optischen Konstanten werden als Glastypen bezeichnet (TGL 22150).

Tabelle 2.13
Glasarten

Bezeichnung	Symbol	Bezeichnung	Symbol
Fluorkron	FK	Kurzflint	KzF
Phosphatkron	PK	Kronflint	KF
Phosphatschwerkron	PSK	Baritleichtflint	BaLF
Borkron	BK	Doppelleichtflint	LLF
Kron	K	Baritflint	BaF
Zinkkron	ZK	Leichtflint	LF
Baritleichtkron	BaLK	Flint	F
Baritkron	BaK	Baritschwerflint	BaSF
Schwerkron	SK	Schwerflint	SF
Schwerstkron	SSK	Tiefflint	TF
Lanthankron	LaK	Lanthanflint	LaF
Lanthanschwerkron	LaSK	Lanthanschwerflint	LaSF

Folgende Größen dienen der Charakterisierung der Glastypen:

Die *Hauptbrechzahl* n_e ist die Brechzahl für Licht der Quecksilberlinie mit der Wellenlänge $\lambda_e = 546{,}07$ nm. Trotz intensiver Forschung auf dem Gebiet der Silicatchemie konnten bisher nur Gläser erschmolzen werden, deren Hauptbrechzahl etwa im Bereich

$$1{,}3 < n_e < 2{,}1$$

liegt. Die extremen Werte sind schwierig zu erreichen, so daß die zugehörigen Glastypen zunächst als Laborschmelzen vorliegen und noch nicht in die Fertigung überführt sind. Preis und technologische Eigenschaften dieser Glastypen verhindern

Tabelle 2.14
Preise für einige optische Gläser

Glastyp		Preis in M/kg
Kieselglas		3900,00
FK	446/678	733,00
LaSK	756/529	479,00
SF	734/281	18,30
K	526/584	15,90

häufig ihren umfassenden Einsatz (Tab. 2.14). Einige Beispiele für Werkstoffe mit extremen optischen Daten zeigt Tab. 2.15.

Die *Hauptdispersion* $n_{F'} - n_{C'}$ ist die Differenz der Brechzahlen für die Cadmiumlinien F′ und C′ (Tab. 2.12). Diese Spektrallinien liegen etwa an den Grenzen des visuell hellsten Teils des Spektrums. Die Änderung der Brechzahl innerhalb dieses Bereichs wird deshalb als Maß für die Hauptdispersion verwendet.

Bei optischen Gläsern ist stets $n_{F'} > n_{C'}$, die Hauptdispersion also positiv (normale Dispersion).

(In früheren Glaskatalogen wurde n_d als Hauptbrechzahl verwendet. Außerdem war die Grunddispersion oder mittlere Farbzerstreuung $n_F - n_C$ angegeben).

Die *Abbesche Zahl* ν stellt eine Größe dar, mit der ebenfalls die Dispersion der optischen Gläser beschrieben wird. Die Abbesche Zahl hat eine besondere Bedeutung für theoretische Zusammenhänge, die bei der Synthese optischer Systeme angewendet werden.

Die Abbesche Zahl für die Wellenlänge λ ist definiert durch

$$\nu_\lambda = \frac{n_\lambda - 1}{n_{F'} - n_{C'}}. \tag{2.92}$$

Es ist also zu beachten, daß eine große Abbesche Zahl eine kleine Dispersion bedeutet und umgekehrt.

Zur Charakterisierung des Dispersionsverhaltens optischer Gläser in Glaskatalogen soll die Abbesche Zahl verwendet werden, die mit der Hauptbrechzahl berechnet wurde, also

$$\nu_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}}.$$

Die optischen Gläser liegen etwa im Bereich

$$10 < \nu_e < 120.$$

Tabelle 2.15
Werkstoffe mit extremen optischen Daten

Werkstoff	n_d	ν_d
Piacryl	1,4929	56,7
Polystyren	1,5927	30,7
Quarz	1,45859	67,8
CaF_2	1,43384	95,2
LiF	1,39208	99,8
Beryllium-fluoridglas	1,3336	105,0
Boratglas	2,0954	15,6
Lanthanglas	2,006	33,2

In der Fertigung befinden sich Glastypen, für die etwa

$$20 < \nu_e < 70$$

gilt. (Früher wurde in Glaskatalogen die Abbesche Zahl $\nu_d = (n_d - 1)/(n_F - n_C)$ verwendet.)

Der Tradition folgend werden Gläser in den Bereichen

$$n_e < 1{,}6028, \quad \nu_e > 54{,}7,$$

$$n_e > 1{,}6028, \quad \nu_e > 49{,}7$$

als Krone, die übrigen Gläser als Flinte bezeichnet (Abb. 2.44). (Für die vorher verwendete Bezugslinie „d“ liegt die Grenze für $n_d > 1{,}6$ bei $\nu_d = 50$, für $n_d < 1{,}6$ bei $\nu_d = 55$.)

Die *relative Teildispersion* ϑ wird für spezielle Aufgaben der Farbfehlerkorrektion optischer Systeme benötigt.

Eine relative Teildispersion ist eine auf die Hauptdispersion bezogene Teildispersion.

Formelmäßig gilt

$$\vartheta_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{n_{F'} - n_{C'}}. \tag{2.93}$$

Ein Beispiel ist

$$\vartheta_{gC'} = \frac{n_g - n_{C'}}{n_{F'} - n_{C'}}.$$

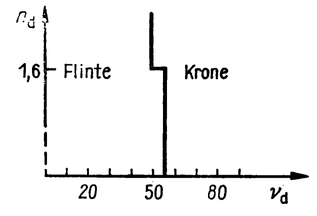


Abb. 2.44
Einteilung der Gläser in Flinte und Krone

Glasdiagramme. Ein Glastyp wurde früher ausschließlich durch die Glasart und eine laufende Nummer beschrieben (z. B. Borkron 7 mit dem Symbol BK 7). Nach TGL 22150 ist die Angabe

Optisches Glas Glasart $1000(n_e - 1)/10\nu_e$ TGL 22150

vorgesehen (n_e mit drei Stellen, ν_e mit einer Stelle nach dem Komma). Für BK 7 mit $n_e = 1{,}518$, $\nu_e = 63{,}9$ lautet die Bezeichnung

Optisches Glas BK 518/639 TGL 22150.

Um bei der Vielzahl der zur Verfügung stehenden Gläser einen schnellen Überblick über deren optische Daten zu erhalten, hat es sich als nützlich erwiesen, ihre Lage in verschiedene Glasdiagramme einzuzeichnen. Glasdiagramme benötigt man vor allem bei der Synthese optischer Systeme. Das n-ν-Diagramm (Abb. 2.45) ermöglicht einen Überblick über das Brechungs- und Dispersionsverhalten der Glastypen.

In Zeichnungen, Rechenunterlagen und vor allem in Glasdiagrammen ist die genormte Bezeichnung unhandlich. Deshalb erhält jeder Glastyp zusätzlich eine Codenummer, durch die er z. B. im Glasdiagramm gekennzeichnet wird.

Optische Kristalle. Kristalle sind wertvolle Werkstoffe, die verwendet werden, wenn die optischen Eigenschaften der Gläser deren Einsatz nicht mehr zulassen. In der Natur kommen Kristalle meist nicht in ausreichender Größe und Reinheit vor, deshalb werden sie künstlich gezüchtet. Kristalle haben oftmals extreme optische

Eigenschaften (Tab. 2.15), sie können deshalb vorteilhaft in speziellen optischen Systemen mit hoher Bildgüte eingesetzt werden. Flußspat (CaF_2) wird z. B. wegen seiner günstigen Dispersionseigenschaften in Mikroobjektiven verwendet. In den Spektralbereichen, die an das sichtbare Spektrum angrenzen, absorbieren die Gläser bereits stark. Für diese Bereiche werden Kristalle eingesetzt; im Ultravioletten z. B. Flußspat (durchlässig bis 150 nm herab) und Quarz. Bei Bauelementen für die visuelle Beobachtung können doppelbrechende Kristalle schlecht verwendet werden. Deshalb wird Quarz nicht in seiner kristallinen Form, sondern geschmolzen als Kieselglas benutzt.

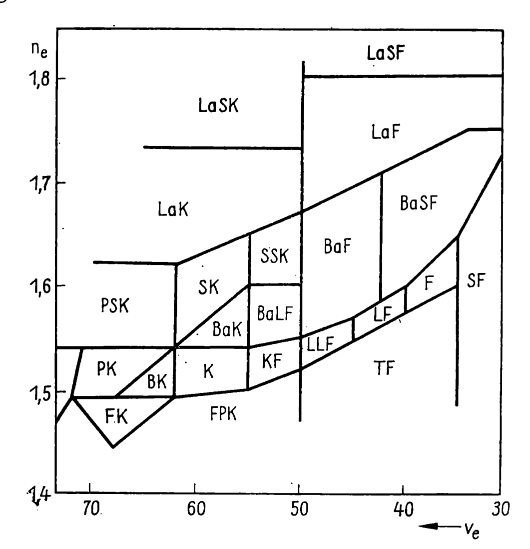


Abb. 2.45
n_e-ν_e-Diagramm für optische Gläser

Im Infraroten wird vielfach Steinsalz (durchlässig bis 1700 nm) eingesetzt. Lithiumfluorid (LiF) wird sowohl im Ultravioletten als auch im Infraroten verwendet.

Doppelbrechende Kristalle benutzt man in der Polarisationsoptik zur Erzeugung und Untersuchung von polarisiertem Licht.

Optische Plaste. Plaste sind synthetische Polymerisationsprodukte. Wenn sie bestimmten physikalischen Anforderungen genügen, z. B. ausreichend transparent, wischfest und temperaturfest sind, kann man sie als optische Werkstoffe verwenden. Besonders geeignet sind u. a. die Duroplaste.

Aus der Literatur sind über 100 optisch brauchbare Plaste bekannt. Wir zeigen in der Abb. 2.46 die Lage dieser Plaste im n-ν-Diagramm. Man erkennt, daß sie den Bereich optischer Gläser in Richtung kleiner Brechzahlen und kleiner Abbescher Zahlen erweitern. Die optischen Daten einiger Plaste sind in der Tab. 2.15 enthalten. Wie bei den Gläsern muß versucht werden, Stoffe zu entwickeln, die im n-ν-Diagramm einen größeren Bereich überstreichen.

Plaste haben gegenüber Glas einige Vorteile; man kann einfache Bearbeitungsmethoden anwenden, und der Materialpreis ist gering. So beträgt bei entsprechend

hoher Stückzahl der Preis für eine Plastlinse nur 15% des Preises einer entsprechenden Glaslinse. Plaste haben außerdem eine gute Lichtdurchlässigkeit, eine geringere Schockempfindlichkeit und eine geringere Dichte als Gläser.

Nachteilig sind die etwa zehnfach größere Temperaturabhängigkeit der physikalischen Eigenschaften, besonders der Brechzahl, die relativ geringe Temperaturbeständigkeit und der hohe Wärmeausdehnungskoeffizient.

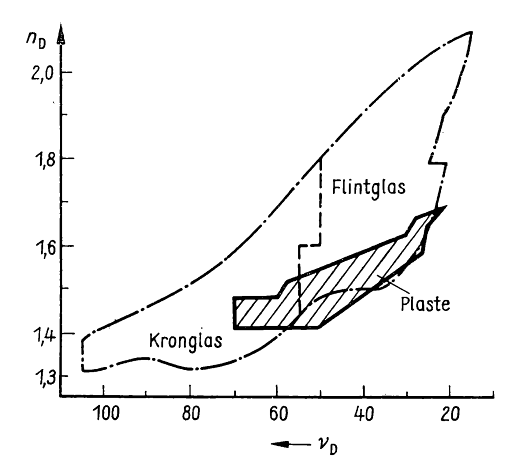


Abb. 2.46
n_D-ν_D-Diagramm mit der Lage der optischen Plaste

Auf Grund der teilweise ungünstigen Eigenschaften sind Plaste gegenwärtig für optische Systeme mit hoher Bildgüte ungeeignet. Günstig sind sie in der Beleuchtungsoptik bei nicht zu hohen Temperaturbelastungen und für Bauelemente zur visuellen Anwendung einsetzbar.

In großen Stückzahlen werden bereits Lupen, Prismen, Beleuchtungslinsen, gekrümmte Lichtleiter, Plastfaserbündel und Brillengläser hergestellt. Für Brillengläser wird der besonders widerstandsfähige Duroplast 01 PS verwendet. Auch Fotoobjektive mit einem Öffnungsverhältnis von 1 : 8 sind bereits entwickelt worden. Plaste werden außerdem zur Herstellung von Haftschalen, Küvetten, Arbeitsschutzgläsern und als Speicherstoffe verwendet. Besonders geeignet sind sie als Werkstoff für asphärische Linsen, Fresnel-Linsen und Fresnel-Prismen. Plaste sind kein Ersatz für konventionelle optische Werkstoffe, sondern eine wertvolle Ergänzung.

2.4. Kohärenz

2.4.1. Spontane und induzierte Emission

Energiezustände. Der in diesem Abschnitt zu behandelnde physikalische Begriff „Kohärenz" läßt sich nur verstehen, wenn die elementare Wechselwirkung des Lichtes mit den Stoffen berücksichtigt wird. Deshalb wiederholen wir die aus der Physik bekannten grundsätzlichen Erkenntnisse über die atomaren und molekularen Prozesse, an denen Lichtquanten beteiligt sind.

Die Elektronen eines Atoms können diskrete Energiezustände annehmen (Abb. 2.47a). Der stabile Zustand, der Grundzustand, ist derjenige mit der geringsten Gesamtenergie. Durch Energiezufuhr lassen sich angeregte Zustände erzeugen (Abb. 2.47b). Diese sind im allgemeinen instabil, so daß nach einer gewissen Zeit direkt oder über mögliche Zwischenstufen unter Energieabnahme der Grundzustand wieder erreicht wird (Abb. 2.47c).

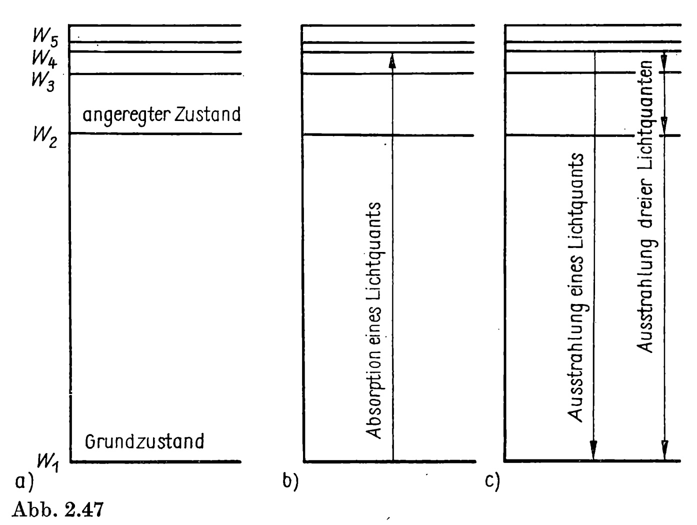


Abb. 2.47
a) Diskrete Energieniveaus des Wasserstoffatoms
b) Anregung durch Absorption eines Lichtquants
c) Übergang in den Grundzustand unter Lichtausstrahlung

Wir nehmen an, daß die Energieänderungen mit der Vernichtung oder Erzeugung von Lichtquanten verbunden sind. Zwischen der atomaren Energieänderung $W_2 - W_1$ und der Frequenz ν der dem absorbierten oder emittierten Lichtquant zugeordneten Welle besteht der Zusammenhang

$$W_2 - W_1 = h\nu \qquad (2.94)$$

(Plancksches Wirkungsquantum $h = 6{,}6252 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{W \cdot s^2}$).

Bei molekularen Systemen sind zusätzlich zu den diskreten Energiezuständen der Elektronen diskrete Energiezustände der Molekülrotation und der Atomschwingungen möglich. Diese Energieniveaus liegen im allgemeinen dichter als die Elektronenniveaus. Die Gl. (2.94) gilt auch für Übergänge zwischen Rotations- und Schwingungsniveaus.

In festen Stoffen gibt es unter anderem Energiebänder, in denen die Energieniveaus sehr eng beieinander liegen. Aus der unterschiedlichen Niveaustruktur resultieren die im Abschnitt 2.3.1. genannten Eigenschaften der Spektren atomarer, molekularer und glühender fester Stoffe, die in der Tab. 2.16 zusammengestellt sind.

6*

Wir greifen zwei Niveaus eines atomaren Systems heraus und beschreiben die bei der Wechselwirkung mit einem Quant möglichen Elementarprozesse.

Absorption eines Lichtquants. Wir lassen auf das atomare System Licht auftreffen. Bei der Ausbreitung des Lichtes ist die Erscheinungsform der Lichtwelle wesentlich. Die Lichtwelle enthalte Licht eines bestimmten Frequenzbereiches. Die spektrale Energiedichte $w(\nu)$ gibt die Energie pro Frequenzintervall $d\nu$ an, die im Zeitmittel in der Volumeneinheit $d\tau$ des Feldes enthalten ist:

$$w(\nu) = \frac{d^2W}{d\nu\, d\tau}, \quad [w] = \frac{W \cdot s^2}{m^3}. \tag{2.95}$$

Tabelle 2.16
Niveaus und Spektren von Stoffgruppen

Atomare Stoffe	— Elektronenniveaus	— Linienspektren
Molekulare Stoffe	— Elektronenniveaus Rotationsniveaus Schwingungsniveaus	— Bandenspektren
glühende feste Stoffe	— Energiebänder	— kontinuierliche Spektren

Bei der Wechselwirkung des Lichtes mit den Atomen ist die Erscheinungsform der Quantengesamtheit wesentlich. Die spektrale Energiedichte der Lichtwelle ist im Quantenmodell der Anzahl der Quanten des Frequenzintervalls $d\nu$ pro Volumeneinheit proportional.

Enthält die Lichtwelle die Frequenz

$$\nu = \frac{W_2 - W_1}{h}, \quad W_2 > W_1,$$

also das Licht Quanten der Energie $W = h\nu$, dann besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß Atome die Energie dieser Quanten aufnehmen. Die Atome werden unter Vernichtung, also Absorption, von Lichtquanten angeregt.

Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Lichtquants hängt von der pro Volumeneinheit vorhandenen Anzahl an Quanten ab. Für die Übergangswahrscheinlichkeit gilt

$$\ddot{U}_{\text{Absorption}} = w(\nu) \cdot B_{12}. \tag{2.96}$$

B_{12} ist eine Größe, die für den Energieübergang von W_1 nach W_2 in einem konkreten Atom charakteristisch ist und die mit den Methoden der Quantentheorie berechnet werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Lichtquants der Frequenz ν unter Erhöhung der atomaren Energie um den Betrag $W_2 - W_1 = h\nu$ ist der spektralen Energiedichte der Lichtwelle proportional.

Spontane Emission eines Lichtquants. Der angeregte Zustand mit der Energie W_2 ist im allgemeinen instabil. Er wird unter Ausstrahlung eines Lichtquants wieder abgebaut. Bei Abwesenheit eines äußeren Feldes findet der Übergang vom Niveau W_2 zum Niveau W_1 im Einzelatom ausschließlich zufällig, d. h. statistisch, statt.

Für die von äußeren Einflüssen unabhängige Ausstrahlung, die spontane Emission, beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\ddot{U}_{\text{spontan}} = A_{21}. \tag{2.97}$$

A_{21} ist eine Größe, die für den spontanen Übergang von W_2 nach W_1 eines konkreten Atoms charakteristisch ist. Auch A_{21} muß quantentheoretisch berechnet werden.

> Die Wahrscheinlichkeit für die spontane Emission eines Lichtquants der Frequenz ν unter Verminderung der atomaren Energie um den Betrag $W_2 - W_1 = h\nu$ ist unabhängig von einem äußeren Wellenfeld.

Die wahrscheinliche Lebensdauer eines angeregten Zustandes, die Verweilzeit T_{21}, ist der Übergangswahrscheinlichkeit für die spontane Emission umgekehrt proportional. Es ist also

$$T_{21} = \frac{1}{A_{21}}. \tag{2.98}$$

Während der Verweilzeit, also während der wahrscheinlichen Ausstrahlungsdauer, legt die ausgestrahlte Lichtwelle den Weg

$$s_{21} = cT_{21} \tag{2.99}$$

zurück. Die Verweilzeit liegt in der Größenordnung von 10^{-8} s. Für $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, $T_{21} = 10^{-8}$ s ergibt sich z. B. $s_{21} = 3$ m. Daraus folgt:

> Die auf Grund spontaner Emission strahlenden Lichtquellen senden eine Vielzahl von kurzen Wellenzügen aus, keine unendlich ausgedehnten zusammenhängenden Wellen.

Es gibt auch angeregte Zustände mit einer bezüglich spontaner Emission sehr großen Verweilzeit. Solche Zustände heißen metastabil.

Induzierte Emission eines Lichtquants. Sämtliche Übergänge aus angeregten Niveaus in tiefere Niveaus, experimentell besonders bei Übergängen von metastabilen Niveaus aus beobachtbar, können durch ein äußeres Wellenfeld erzwungen werden. Für diese induzierte Emission beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\ddot{U}_{\text{induziert}} = w(\nu) \cdot B_{21}. \tag{2.100}$$

B_{21} ist eine Größe, die für den induzierten Übergang von W_2 nach W_1 eines konkreten Atoms charakteristisch ist. B_{21} kann quantentheoretisch berechnet werden.

> Die Wahrscheinlichkeit für die induzierte Emission eines Lichtquants der Frequenz ν unter Verminderung der atomaren Energie um den Betrag $W_2 - W_1 = h\nu$ ist der spektralen Energiedichte der anregenden Welle proportional.

Beziehungen zwischen den Koeffizienten. Thermodynamische Untersuchungen ergeben für den Zustand des Strahlungsgleichgewichts die Aussagen [1] (wir beschränken uns auf nichtentartete Zustände):

— Bei der induzierten Emission hat die induzierte Welle dieselbe Ausbreitungsrichtung wie die induzierende Welle.

— Die Wahrscheinlichkeiten für die induzierte Emission und für die Absorption sind gleich:

$$B_{12} = B_{21}. \tag{2.101}$$

— Die Wahrscheinlichkeiten für die spontane und für die induzierte Emission sind einander proportional. Der Proportionalitätsfaktor hängt von der dritten Potenz der Frequenz ab:

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}. \tag{2.102}$$

Im Bereich so hoher Frequenzen, wie sie im optischen Spektralbereich vorliegen, ist die spontane Emission auch bei der Anregung von induzierter Emission nicht zu vernachlässigen.

2.4.2. Interferenzanteile der Intensität

Die von den Lichtquellen ausgehenden Lichtwellen überlagern sich im allgemeinen in vielfältiger Weise. An einer Stelle des Raumes, an der das Licht registriert wird, können sich Lichtwellen überlagern, die von verschiedenen Punkten derselben Lichtquelle, von Punkten unterschiedlicher Lichtquellen und zu verschiedenen Zeiten ausgesendet werden.

In speziellen optischen Meßgeräten, den Interferometern, wird die Überlagerung von Lichtwellen gezielt herbeigeführt. Um die Interferenzerscheinungen verstehen zu können, ist es notwendig, das Zusammenwirken von Lichtwellen zu untersuchen.

Die auf spontaner Emission beruhenden Lichtquellen senden kurze Wellenzüge aus. In der drahtlosen Nachrichtentechnik ist es jedoch möglich, durch ständige Energiezufuhr zur ausstrahlenden Antenne eine sehr lange, angenähert sinusförmige Trägerwelle zu erzeugen. Wir untersuchen zunächst die Überlagerung von sinusförmigen Wellen. Die Erscheinungen, die sich zusätzlich aus den Verhältnissen bei der Lichtausstrahlung ergeben, werden wir anschließend darstellen.

Überlagerung ebener periodischer Wellen. In komplexer Darstellung lautet die Gleichung der elektrischen Feldstärke für eine ebene periodische Welle nach Gl. (2.6)

$$\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{a}_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s}_k - ct)}. \tag{2.103}$$

Die Überlagerung mehrerer Wellen erfordert die vektorielle Addition der Einzelfeldstärken

$$\boldsymbol{E} = \sum_k \boldsymbol{E}_k = \sum_k \boldsymbol{a}_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s}_k - ct)}. \tag{2.104}$$

Gleiche Ausbreitungsrichtung bedeutet gleiche Einheitsvektoren $\boldsymbol{s}_k$, so daß

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)} \sum_k \boldsymbol{a}_k \tag{2.105}$$

gilt. Der Faktor

$$\boldsymbol{a} = \sum_k \boldsymbol{a}_k \tag{2.106}$$

ist die komplexe Amplitude der Summenwelle, so daß

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}(\boldsymbol{rs}-ct)} \tag{2.107}$$

ist.

Die Überlagerung ebener monochromatischer Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung ergibt eine Welle gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung, deren komplexe Amplitude die Summe der komplexen Einzelamplituden ist.

Jeder Amplitudenvektor kann in zwei senkrecht aufeinander stehende Komponenten $\boldsymbol{a}_{k1}$ und $\boldsymbol{a}_{k2}$ zerlegt werden, so daß

$$\boldsymbol{a} = \sum_k (\boldsymbol{a}_{k1} + \boldsymbol{a}_{k2}) = \sum_k \boldsymbol{a}_{k1} + \sum_k \boldsymbol{a}_{k2} \tag{2.108}$$

wird. Die Intensität einer ebenen Welle beträgt nach Gl. (2.15)

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^*. \tag{2.109}$$

Wir setzen Gl. (2.108) in Gl. (2.109) ein:

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \left(\sum_k \boldsymbol{a}_{k1} + \sum_k \boldsymbol{a}_{k2}\right)\left(\sum_k \boldsymbol{a}_{k1}^* + \sum_k \boldsymbol{a}_{k2}^*\right). \tag{2.110}$$

Weil $\sum \boldsymbol{a}_{k1}$ und $\sum \boldsymbol{a}_{k2}$ senkrecht aufeinander stehende Vektoren sind, deren skalares Produkt verschwindet, ist

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \left(\sum_k \boldsymbol{a}_{k1}^* \sum_k \boldsymbol{a}_{k1} + \sum_k \boldsymbol{a}_{k2}^* \sum_k \boldsymbol{a}_{k2}\right). \tag{2.111}$$

Die Intensitäten senkrecht zueinander schwingender Wellen überlagern sich additiv. Es genügt, die Interferenz linear polarisierter Wellen zu untersuchen.

(Von diesem Ergebnis wurde bereits bei der Behandlung der Polarisationsarten im Abschnitt 2.1.2. Gebrauch gemacht.)

Wir gehen bei den weiteren Überlegungen von

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \sum_k \boldsymbol{a}_k \sum_k \boldsymbol{a}_k^* \tag{2.112}$$

aus. Wir erinnern daran, daß die komplexe Amplitude durch

$$a_k = A_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_k} \tag{2.113}$$

gegeben ist. Aus den Gleichungen (2.112) und (2.113) folgt, wie im allgemeinen die Interferenzerscheinungen zu behandeln sind:

- Die Beträge der Teilamplituden A_k sind aus den Daten der Interferenzanordnung zu berechnen.
- Die Phasen der Teilwellen δ_k ergeben sich aus den Lichtwegen in der Interferenzanordnung unter Berücksichtigung von Phasensprüngen.
- Die komplexen Teilamplituden a_k sind zu addieren.
- Die Intensität folgt aus Gl. (2.112).

Wir gehen zur reellen Schreibweise über, indem wir Gl. (2.113) in Gl. (2.112) einsetzen:

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \sum_k A_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_k} \sum_k A_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_k}. \tag{2.114}$$

Wir formen um in

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \left\{ \sum_k A_k^2 + \sum_{i<k} \left[A_i A_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta_i - \delta_k)} + A_k A_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta_k - \delta_i)} \right] \right\} \tag{2.115}$$

oder

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \left\{ \sum_k A_k^2 + \sum_{i<k} A_i A_k \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta_i - \delta_k)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\delta_i - \delta_k)} \right] \right\}. \tag{2.116}$$

Mit den Abkürzungen

$$\delta_i - \delta_k = \delta_{ik} \quad \text{und} \quad \exp(\mathrm{j}\delta_{ik}) + \exp(-\mathrm{j}\delta_{ik}) = 2\cos\delta_{ik}$$

erhalten wir

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \left[\sum_k A_k^2 + 2 \sum_{i<k} A_i A_k \cos\delta_{ik} \right]. \tag{2.117}$$

Wir können den Faktor $(\varepsilon_r \varepsilon_0 c)/2$ auch in die Summen hineinnehmen, wobei

$$I = \sum_k I_k + 2 \sum_{i<k} \sqrt{I_i I_k} \cos\delta_{ik} \tag{2.118}$$

entsteht. Der Anteil

$$2 \sum_{i<k} \sqrt{I_i I_k} \cos\delta_{ik}$$

in Gl. (2.118) tritt auf, weil die Wellen miteinander in Wechselwirkung treten, d. h., weil sie interferieren. Er wird deshalb Interferenzanteil der Intensität genannt.

Die Intensität der durch Interferenz entstehenden Welle setzt sich additiv aus den Einzelintensitäten und aus dem Interferenzanteil der Intensität zusammen.

Für zwei Wellen vereinfacht sich Gl. (2.118) in

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta_{12}. \tag{2.119}$$

Die Interferenz zweier Wellen gleicher Intensität ($I_1 = I_2 = I_0$) ergibt die Intensität

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta_{12}). \tag{2.120}$$

Für $\cos \delta_{12} = 1$ erhalten wir die maximale Intensität $I_{\text{Max}} = 4I_0$; für $\cos \delta_{12} = -1$ erhalten wir die minimale Intensität $I_{\text{Min}} = 0$. Abb. 2.48 enthält die Intensität als Funktion der Phasendifferenz.

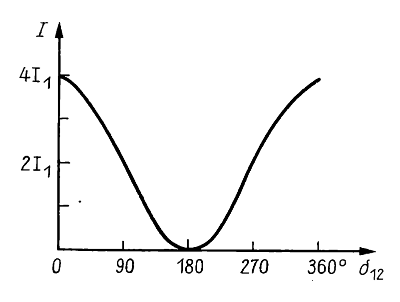


Abb. 2.48
Abhängigkeit der Intensität von der Phasendifferenz bei der Interferenz zweier Wellen gleicher Amplitude

Inkohärentes Licht verschiedener Lichtquellen. Wir berücksichtigen, daß die spontan strahlenden Lichtquellen kurze Wellenzüge aussenden. Beim Einzelatom ist der Zeitpunkt des Energieübergangs unbestimmt, es handelt sich um einen statistischen Vorgang.

Beleuchten wir eine Stelle des Raumes mit zwei verschiedenen Lichtquellen, dann überlagern sich über die Beobachtungszeit hinweg viele kurze Wellenzüge mit statistisch verteilten Phasendifferenzen. Weil die Beobachtungszeit bzw. die Zeitkonstante der Strahlungsempfänger groß gegenüber der Verweilzeit ist, registrieren wir den Zeitmittelwert der Intensität nach Gl. (2.118):

$$\langle I \rangle = \sum_k \langle I_k \rangle + 2 \sum_{i<k} \left\langle \sqrt{I_i I_k} \cos \delta_{ik} \right\rangle.$$

Bei konstanten Einzelamplituden ist

$$\langle I \rangle = \sum_k I_k + 2 \sum_{i<k} \sqrt{I_i I_k} \langle \cos \delta_{ik} \rangle.$$

Der Zeitmittelwert von $\cos \delta_{ik}$ verschwindet, wenn alle Werte δ_{ik} über viele Perioden hinweg gleich wahrscheinlich sind.

Es gilt also für die beobachtbare Intensität

$$\langle I \rangle = \sum_k I_k. \tag{2.121}$$

Die Intensität ist gleich der Summe der Einzelintensitäten, wie sie sich ohne Interferenz ergibt. Es gilt also:

> Bei der Überlagerung von Wellenzügen mit statistisch verteilten Phasendifferenzen verschwindet der Interferenzanteil der Intensität. Das Licht erscheint dem Beobachter als nicht interferenzfähig; es wird inkohärent genannt.

2.4.3. Zeitliche Kohärenz bei spontaner Emission

Modell der abgebrochenen Sinuswelle. Wir gehen davon aus, daß eine spontan strahlende Lichtquelle kurze, statistisch voneinander unabhängige Wellenzüge aussendet. Einen dieser Wellenzüge untersuchen wir hinsichtlich seiner spektralen Zusammensetzung. Da uns die genaue Form der Welle unbekannt ist, legen wir zunächst den Modellfall einer abgebrochenen sinusförmigen Welle zu Grunde. Diese leitet zur Zeit t_1 an einem festen Ort sprungartig eine sinusförmige Welle ein, die zur Zeit t_2 plötzlich wieder abbricht (Abb. 2.49). Die Schwingung wird durch die Funktion

$$E(t) = \begin{cases} A_0\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\nu_0 t} & -\dfrac{\Delta t}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.122}$$

beschrieben. Es handelt sich um eine nichtperiodische Funktion, deren spektrale Zerlegung mit dem Fourier-Integral auf ein Spektrum führt, das in einem bestimmten Frequenzintervall kontinuierlich ist.

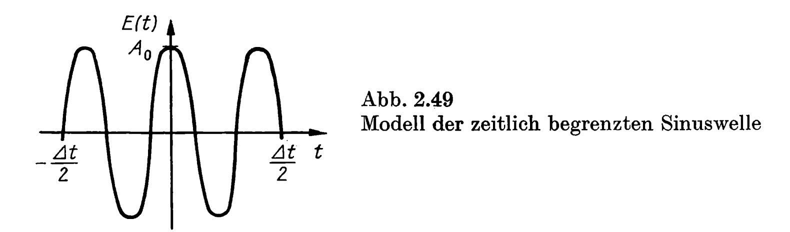


Abb. 2.49
Modell der zeitlich begrenzten Sinuswelle

Die Funktion (2.122) kann als Fourier-Integral

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\nu) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\nu t}\,\mathrm{d}\nu \tag{2.123}$$

dargestellt werden. Die Funktion $a(\nu)$ ist die Spektraldichte. Diese gibt an, mit welcher Amplitude die sinusförmige Welle der Frequenz ν in die Summe der unendlich vielen sinusförmigen Wellen eingehen muß, damit die Funktion $E(t)$ nachgebildet wird.

Die Umkehrung des Integrals (2.123) mit der Fourier-Transformation lautet:

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu t}\,\mathrm{d}t. \tag{2.124}$$

Wir setzen $E(t)$ nach Gl. (2.122) in Gl. (2.124) ein und erhalten

$$a(\nu) = A_0 \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}(\nu_0 - \nu)t}\,\mathrm{d}t. \tag{2.125}$$

Die Ausrechnung des Integrals ergibt

$$a(\nu) = \frac{A_0}{2\pi \mathrm{j}\,(\nu_0 - \nu)}\,[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(\nu_0-\nu)\Delta t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(\nu_0-\nu)\Delta t}]. \tag{2.126}$$

Mit der Abkürzung

$$\eta = \pi(\nu_0 - \nu)\,\Delta t \tag{2.127}$$

führt die Anwendung der Eulerschen Formel auf

$$a(\nu) = A_0 \Delta t \frac{\sin \eta}{\eta}. \tag{2.128}$$

Das Hauptmaximum der Funktion $a(\nu)$ liegt bei $\eta = 0$, $\nu = \nu_0$ vor und hat wegen $\lim\limits_{\eta \to 0} (\sin \eta/\eta) = 1$ den Wert $a(\nu_0) = A_0 \Delta t$.

Die auf die Spektraldichte bei $\nu = \nu_0$ normierte Spektraldichte

$$\frac{a(\nu)}{a(\nu_0)} = \frac{\sin \eta}{\eta} \tag{2.129}$$

ist in der Abb. 2.50 grafisch dargestellt. Die ersten Nullstellen beiderseits des Hauptmaximums ergeben sich aus $\eta = \pm\pi$, also nach Gl. (2.127) für

$$(\nu_0 - \nu_\pi)\,\Delta t = \pm 1. \tag{2.130}$$

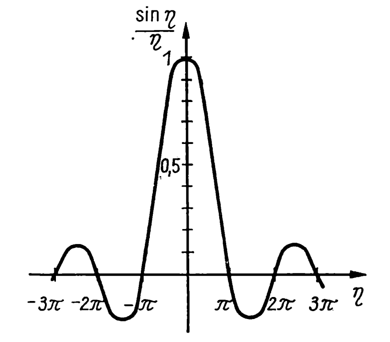


Abb. 2.50
Spektraldichte der zeitlich begrenzten Sinusschwingung

Die Größe

$$2(\nu_0 - \nu_\pi) = 2\Delta\nu \tag{2.131}$$

bestimmt wesentlich die spektrale Bandbreite des „abgehackten“ Wellenzuges, weil die Spektraldichte außerhalb des Intervalls $-\pi \leqq \eta \leqq \pi$ sehr klein ist. Es gilt also nach Gl. (2.130) für die halbe Bandbreite

$$\Delta\nu \Delta t = 1. \tag{2.132}$$

Eine Welle endlicher Länge erzeugt eine Schwingung, in deren spektraler Zerlegung eine Frequenz mit maximaler Amplitude und weitere Frequenzen mit geringeren Amplituden enthalten sind.
Die halbe spektrale Bandbreite $\Delta\nu$ und die Zeit Δt, während der die Schwingung andauert, sind umgekehrt proportional.

Eine Welle endlicher Länge ist quasimonochromatisch. Die Zeitdauer Δt der Schwingung ist mit der Länge Δl des angeregten Wellenzuges durch $\Delta l = c\Delta t$ verknüpft. Mit Gl. (2.132) erhalten wir

$$\Delta\nu\Delta l = c. \tag{2.133}$$

Je länger ein Wellenzug ist, desto kleiner ist die Bandbreite. Nur eine unendlich ausgedehnte Welle wäre monochromatisch.

Wenn $\Delta\nu$ klein ist, kann es durch Differenzieren von $\nu = c/\lambda$, wobei sich

$$\mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda \tag{2.134}$$

ergibt, auf das Wellenlängenintervall $\Delta\lambda$ umgerechnet werden. (Das Minuszeichen lassen wir weg, weil nur der Betrag von Bedeutung ist.)

Aus Gl. (2.133) folgt mit Gl. (2.134)

$$\Delta\lambda\Delta l = \lambda^2. \tag{2.135}$$

Die Gleichungen (2.132), (2.133) und (2.135) sind gleichwertig.

Die Wellenzüge, die leuchtende Gase aussenden, werden hinsichtlich ihrer Amplitudenverteilung durch verschiedene physikalische Einflüsse bestimmt.

Natürliche Breite der Spektrallinien. Bei sehr tiefer Temperatur und geringem Gasdruck kommt die Breite der Spektrallinien fast ausschließlich durch die endliche Dauer der Lichtausstrahlung zustande. Diese natürliche Breite der Spektrallinien ist einer gedämpften Welle zugeordnet. Die Intensität in einer Spektrallinie, als Funktion der Wellenlänge dargestellt, hat deshalb die Form einer Resonanzkurve (Abb. 2.51b). Die Breite der Spektrallinie wird durch die Halbweite beschrieben.

Die Halbweite $\Delta\lambda_{0,5}$ ist das Wellenlängenintervall, in dem die Intensität vom Maximalwert auf den halben Maximalwert abnimmt (Abb. 2.51b).

Die Halbweite liegt bei natürlicher Dämpfung in der Größenordnung $\Delta\lambda_{0,5} = 10^{-5}$ nm.

Doppler-Breite der Spektrallinien. Bei den in den Experimenten normalerweise vorkommenden Drücken und Temperaturen ist die natürliche Linienbreite im allgemeinen klein gegenüber den anderen Einflüssen auf die spektrale Breite.

Interferometrische Messungen mit herkömmlichen Lichtquellen erfordern, daß das leuchtende Gas unter einem geringen Druck steht ($p < 200$ Pa) und mit niedrigen Stromdichten angeregt wird. Die Linienbreite wird dann bei normalen Temperaturen wesentlich durch den infolge der Molekularbewegung auftretenden Doppler-Effekt bestimmt.

Jedes strahlende Atom stellt eine relativ zum Beobachter bewegte Lichtquelle dar, so daß eine Frequenzänderung durch den Doppler-Effekt entsteht. Die Doppler-Breite hängt von der mittleren Geschwindigkeit der strahlenden Atome ab und kann im Rahmen der kinetischen Gastheorie berechnet werden [2].

Für die Halbweite durch Doppler-Effekt gilt

$$\Delta\lambda_{0,5} = 3{,}58 \cdot 10^{-7}\lambda_0 \sqrt{\frac{T}{A}}. \tag{2.136}$$

(λ_0 = Wellenlänge des Maximums, T = absolute Temperatur, A = relative Atommasse gegenüber Sauerstoff mit $A = 16$.)

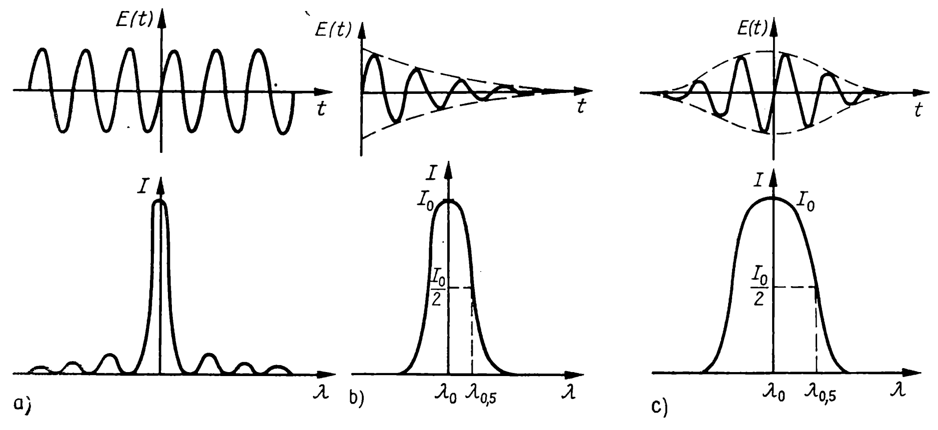


Abb. 2.51

a) Modell des zeitlich begrenzten Wellenzuges und zugeordnete Form der Spektrallinie

b) Modell der Welle und der Spektrallinie für natürliche Dämpfung

c) Modell der Welle und der Spektrallinie für Doppler-Dämpfung

Bis zur Wellenlänge $\lambda_0 + 2\Delta\lambda_{0,5}$ sinkt die Intensität auf 5% des Maximalwertes. Die Intensität hängt von der Wellenlänge in Form einer Gauß-Funktion ab (Abb. 2.51c). Die modellmäßig zugeordnete Welle zeigt einen Verlauf der Amplitude, die ebenfalls einer Gauß-Funktion entspricht (Abb. 2.51c).

Für die rote Cd-Linie ist z. B. $\lambda_0 = 643{,}9$ nm und $A = 112{,}4$. Bei $T = 573$ K beträgt die Halbweite durch Doppler-Effekt $\Delta\lambda_{0,5} = 0{,}00052$ nm.

Stoßdämpfung. Bei hoher Temperatur und hohem Druck ist die Molekularbewegung so groß, daß in starkem Maße Ausstrahlungsvorgänge bei Zusammenstößen der Atome unterbrochen werden. Im Moment des Stoßes übernimmt ein zweites Atom einen Teil der Anregungsenergie, wobei sich seine kinetische Energie erhöht. Die ausgestrahlte Welle wird verkürzt und damit die spektrale Breite der Linie vergrößert.

Für die Halbweite durch Stoßdämpfung gilt bis auf einen Proportionalitätsfaktor (ϱ = Dichte des Gases)

$$\Delta\lambda_{0,5} \sim \varrho \sqrt{\frac{T}{A^3}}. \tag{2.137}$$

Bei sehr hohem Druck kann die spektrale Breite durch Stoßdämpfung so groß sein, daß das Spektrum durch die Überlappung von Linien einen kontinuierlichen Untergrund enthält.

Elektrische Felder und weitere äußere Einflüsse können zusätzlich auf die Breite der Spektrallinien einwirken.

Teilung der Amplitude oder der Wellenfront. Wir wollen nun jeden einzelnen der Wellenzüge endlicher Länge in zwei Wellenzüge aufspalten und beide Anteile wieder so zusammenführen, daß sie sich überlagern. Dazu gibt es zwei Prinzipien, die wir an zwei Beispielen erläutern.

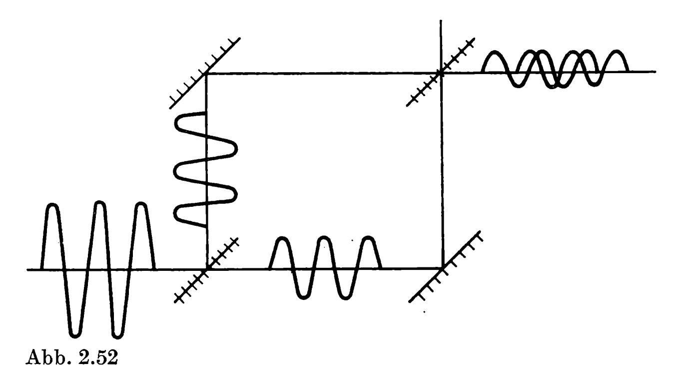


Abb. 2.52
Interferenz im Mach-Zehnder-Interferometer (Teilung der Amplitude)

Im Interferometer von MACH-ZEHNDER werden die Wellenzüge an einer teildurchlässigen Schicht aufgespalten (Abb. 2.52). Die Amplituden der Teilwellen sind kleiner als die Ausgangsamplitude, weshalb man von der Teilung der Amplitude spricht.

Nach dem Durchlaufen unterschiedlicher Lichtwege, wodurch eine Phasendifferenz entsteht, werden die Teilbündel an einer teildurchlässigen Schicht vereinigt. Jedes aus einer Welle stammende Teilbündelpaar hat während der gesamten Überdeckungszeit konstante Phasendifferenz. Diese ist für alle Teilbündelpaare gleich und nur durch die Geometrie der Interferenzanordnung bestimmt.

Da sich zwei Teilwellen ausreichend überdecken müssen, wenn sie miteinander interferieren sollen, muß der optische Wegunterschied kleiner als die optische Länge eines Wellenzuges sein. Der maximal zulässige optische Wegunterschied ist die Kohärenzlänge.

Die Länge der Wellenzüge hängt gesetzmäßig mit der spektralen Bandbreite zusammen, so daß bei festem optischen Wegunterschied die Bandbreite begrenzt sein muß.

Im Youngschen Interferometer (Abb. 2.53) werden durch Spalte oder Löcher aus den Wellenzügen schmale Ausschnitte ausgeblendet. Deshalb spricht man auch von der Teilung der Wellenfront.

Die Wiedervereinigung der Teilbündel wird durch die Beugung des Lichtes hervorgerufen. Jeder Punkt der feinen Öffnungen sendet nach dem Huygensschen Prinzip Kugelwellen in den gesamten dahinter liegenden Halbraum aus, in dem sie miteinander interferieren. Wir fassen zusammen:

> Ein Wellenzug kann mit sich selbst interferieren, wenn entweder seine Amplitude oder seine Wellenfront geteilt wird. Die Intensität hängt von der Phasendifferenz zwischen den interferierenden Teilbündeln ab. Diese entsteht durch den optischen Wegunterschied und durch Phasensprünge an reflektierenden Flächen.
> Die äquivalente Wegdifferenz darf nicht größer sein als die Kohärenzlänge. Diese ist der Halbweite der Spektrallinie umgekehrt proportional.

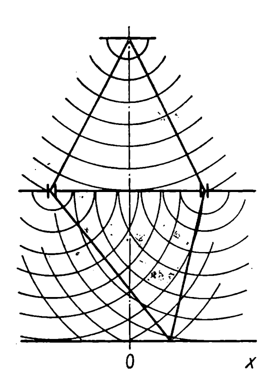


Abb. 2.53
Interferenz im Youngschen Interferometer (Teilung der Wellenfront)

Intensität beim Youngschen Interferometer. Wir stellen uns die Aufgabe, die beim Youngschen Interferometer meßbare Intensität zu berechnen. Ein Punkt der Lichtquelle strahle quasimonochromatisches Licht aus. Die zugehörige Intensität ist in der Abb. 2.54 schematisch dargestellt. Die in einem Punkt des Schirmes interferierenden Teilwellen mit der Phasendifferenz δ_{12} ergeben nach Gl. (2.119) die Intensität

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta_{12}.$$

In der Umgebung von $x = 0$ können wir annehmen, daß

$$I_1 = I_2 \tag{2.138}$$

ist. Es gilt also

$$I_{12} = 2I_1(1 + \cos\delta_{12}). \tag{2.139}$$

In der Abb. 2.55 ist die Funktion $I(\delta)$ grafisch dargestellt. Die zu den verschiedenen Wellenlängen, also zu verschiedenen δ_{12} gehörenden Wellenanteile interferieren nicht miteinander, ihre Intensitäten sind zu summieren. Es ist mit $I_\delta = (\mathrm{d}I_1)/(\mathrm{d}\delta_{12})$ (Abb. 2.56)

$$I_{12}\,\mathrm{d}\delta_{12} = 2I_\delta(1 + \cos\delta_{12})\,\mathrm{d}\delta_{12} \tag{2.140}$$

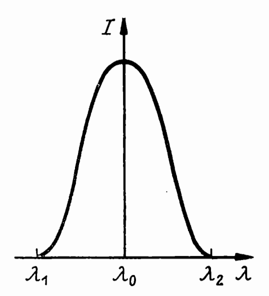


Abb. 2.54
Intensitätsverteilung für quasimonochromatisches Licht (schematisch)

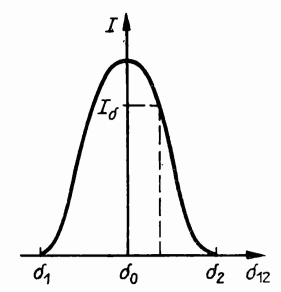


Abb. 2.55
Darstellung der spektralen Intensitätsverteilung über der Phasendifferenz

und

$$I = \int_{\delta_1}^{\delta_2} 2I_\delta (1 + \cos \delta_{12})\, \mathrm{d}\delta_{12}. \tag{2.141}$$

Wir setzen

$$2I_\delta = f(\delta_{12}), \quad \delta_{12} = \delta_0 + \delta, \quad \mathrm{d}\delta_{12} = \mathrm{d}\delta$$

und erhalten

$$I = \int_{\delta_1 - \delta_0}^{\delta_2 - \delta_0} f(\delta_0 + \delta)\, [1 + \cos(\delta_0 + \delta)]\, \mathrm{d}\delta. \tag{2.142}$$

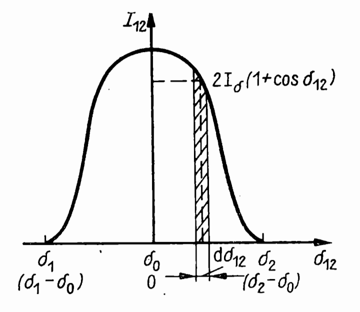


Abb. 2.56
Zur Summation über die Interferenzanteile der Intensität und Koordinatentransformation

Anwenden der Additionstheoreme ergibt

$$I = \int_{\delta_1-\delta_0}^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta)\, \mathrm{d}\delta + \cos \delta_0 \int_{\delta_1-\delta_0}^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta) \cos \delta \cdot \mathrm{d}\delta$$
$$- \sin \delta_0 \int_{\delta_1-\delta_0}^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta) \sin \delta \cdot \mathrm{d}\delta. \tag{2.143}$$

Häufig ist die Funktion $f(\delta_0 + \delta)$ symmetrisch, und das Integral über $f(\delta_0 + \delta) \sin \delta$ verschwindet ($\sin \delta$ ist unsymmetrisch).

Die Gl. (2.143) geht über in

$$I = \int_{-(\delta_2-\delta_0)}^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta)\, d\delta + \cos\delta_0 \int_{-(\delta_2-\delta_0)}^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta) \cos\delta \cdot d\delta$$

oder

$$I = 2 \int_0^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta)\, d\delta + 2 \cos\delta_0 \int_0^{\delta_2-\delta_0} f(\delta_0 + \delta) \cos\delta \cdot d\delta. \qquad (2.144)$$

Die Gl. (2.144) gilt allgemein für die Intensität, die bei der Interferenz von Lichtwellen entsteht, in denen eine Phasendifferenz δ_0 mit maximaler Intensität und eine symmetrisch dazu liegende Verteilung der Phasendifferenzen δ vorliegt.

Modell der „kastenförmigen Spektrallinie“. Wir wenden die Gl. (2.144) auf einen einfachen Modellfall an. Die Intensität sei im Intervall $\delta_0 \leqq \delta \leqq \delta_2$ konstant und gleich $f_0(\delta_2 - \delta_0)$ (Abb. 2.57). Es gilt

$$I = 2f_0 \int_0^{\delta_2-\delta_0} d\delta + 2f_0 \cos\delta_0 \int_0^{\delta_2-\delta_0} \cos\delta \cdot d\delta. \qquad (2.145)$$

Ausrechnen der Integrale ergibt

$$I = 2f_0[\delta_2 - \delta_0 + \cos\delta_0 \cdot \sin(\delta_2 - \delta_0)] \qquad (2.146)$$

oder mit $(\delta_2 - \delta_0) f_0 = I_0$

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\delta_0 \frac{\sin(\delta_2 - \delta_0)}{\delta_2 - \delta_0}\right]. \qquad (2.147)$$

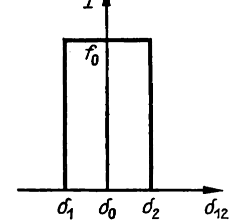


Abb. 2.57
Modell der „kastenförmigen“ Spektrallinie

Die Intensitätsverteilung Abb. 2.57 soll im folgenden ausschließlich durch die zeitlich begrenzte Ausstrahlungsdauer bestimmt sein. Sie stellt dann das Modell der Intensität in einer Spektrallinie dar. Wir berechnen mit Gl. (2.147) die Interferenzintensität im Youngschen Interferometer, die durch das Licht, das von einem Punkt der Quelle ausgeht, auf dem Schirm hervorgerufen wird. Aus $\delta = (2\pi\Delta L)/\lambda$ folgt bei konstanter optischer Weglängendifferenz ΔL für jede Stelle des Schirms

$$\delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L, \quad d\delta = -\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} d\lambda. \qquad (2.148\text{a, b})$$

Für „schmale" Spektrallinien kann näherungsweise

$$\delta_2 - \delta_0 = \Delta\delta = -\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \tag{2.149}$$

gesetzt werden. Mit Gl. (2.149) folgt aus Gl. (2.147)

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L\right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda\right)}{\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda} \right]. \tag{2.150}$$

Die optische Wegdifferenz ΔL ist an den einzelnen Stellen des Schirms verschieden. Für kleine Werte $\Delta\lambda$, die wir voraussetzten, bestimmt der Faktor

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L\right)$$

die Lage der Intensitätsmaxima und -minima. Es gilt:

Für $\Delta L = k\lambda_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

ist $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L\right) = 1$

und

$$I_{\text{Max}} = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda\right)}{\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda} \right].$$

Für $\Delta L = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

ist $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L\right) = -1$

und

$$I_{\text{Min}} = 2I_0 \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda\right)}{\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda} \right]. \tag{2.151a, b}$$

Für die Sichtbarkeit der Interferenzlinien ist der Intensitätsunterschied zwischen den Maxima und den Minima wesentlich.

> Der auf die Summe aus der maximalen und der minimalen Intensität normierte Intensitätsunterschied zwischen den Maxima und Minima wird als Kontrast bezeichnet.

Formelmäßig gilt also

$$K = \frac{I_{\text{Max}} - I_{\text{Min}}}{I_{\text{Max}} + I_{\text{Min}}}. \tag{2.152}$$

Für unseren Modellfall beträgt der Interferenzkontrast mit Gl. (2.151a, b)

$$K = \frac{\sin\left(\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda\right)}{\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2} \Delta\lambda}. \tag{2.153}$$

Ein bestimmter Mindestkontrast ist erforderlich, damit ein Empfänger das Interferenzbild auflöst. Wir legen als Erfahrungswert für visuell gute Sichtbarkeit den

Mindestkontrast

$$K = 0{,}2$$

zugrunde. Durch Auflösen der transzendenten Gleichung (2.153) folgt

$$\frac{2\pi\Delta L}{\lambda_0^2}\Delta\lambda = 2{,}65 \qquad (2.154)$$

oder

$$\Delta L\Delta\lambda = 0{,}42\lambda_0^2. \qquad (2.155)$$

Bei vorgegebener halber Breite $\Delta\lambda$ der „Modellspektrallinie" ist die maximal zulässige optische Weglänge ΔL, also die Kohärenzlänge, begrenzt. Das Interferenzbild kann deshalb nur in einem Bereich des Schirms beobachtet werden, der in der durch Gl. (2.155) bestimmten Umgebung der Stelle mit $\Delta L = 0$ liegt (Abb. 2.58).

Die spektrale Breite einer Spektrallinie ist für einen festen Punkt der Lichtquelle mit dem zeitlichen Verlauf der Lichtausstrahlung und -ausbreitung gekoppelt. Deshalb wird das Vorliegen einer bestimmten Kohärenzlänge als zeitliche Kohärenz bezeichnet.

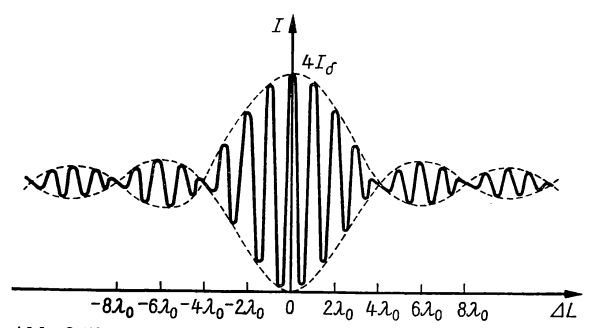


Abb. 2.58
Interferenzbild im Youngschen Interferometer (linienförmige Lichtquelle, quasimonochromatisches Licht mit „kastenförmiger" Intensitätsverteilung

Die prinzipielle Struktur der Gl. (2.155) bleibt erhalten, wenn konkrete Spektrallinien betrachtet werden, bei denen die Funktion $f(\delta_0 + \delta)$ im wesentlichen symmetrisch ist. Es ergibt sich aber ein anderer Zahlenfaktor als 0,42, und für $\Delta\lambda$ ist $\Delta\lambda_{0,5}$ einzusetzen. Es gilt z. B.

$$\text{für natürliche Dämpfung } \Delta L\Delta\lambda_{0,5} = 0{,}26\lambda_0^2, \qquad (2.156)$$

$$\text{für Doppler-Dämpfung } \Delta L\Delta\lambda_{0,5} = 0{,}34\lambda_0^2. \qquad (2.157)$$

Für quasimonochromatisch strahlende Lichtquellen gilt bei Normaltemperatur der Erfahrungswert

$$\Delta L\Delta\lambda_{0,5} = 0{,}5\lambda_0^2. \qquad (2.158)$$

Mit dem Faktor 0,5 ist der Einfluß der verschiedenen Erscheinungen, die die Breite der Spektrallinien beeinflussen, näherungsweise erfaßt.

2.4.4. Räumliche Kohärenz bei spontaner Emission

Wir legen weiterhin das Youngsche Interferometer zugrunde (Abb. 2.59). Während wir im Abschnitt 2.4.3. einen Punkt der Lichtquelle herausgriffen, der quasimonochromatisches Licht aussendet, betrachten wir jetzt den Einfluß der räumlichen Ausdehnung der Lichtquelle auf den Kontrast im Interferenzbild. Hinsichtlich der zeitlichen Kohärenz beschränken wir uns hier auf den Grenzfall des monochromatischen Lichtes.

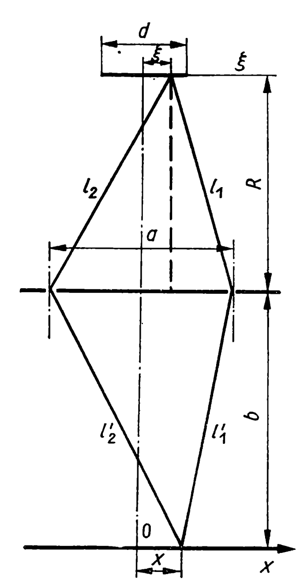


Abb. 2.59
Größen am Youngschen Interferometer

Das Licht, das nahezu zur gleichen Zeit vom gleichen Punkt der Lichtquelle ausgestrahlt wird, ist kohärent. Licht, das von verschiedenen Punkten der Lichtquelle stammt, ist inkohärent. Auf dem Auffangschirm überlagern sich kohärente und inkohärente Wellen.

Die Lichtquelle sei senkrecht zur Zeichenebene sehr lang, ihre Breite sei d. Sie beleuchte zwei schmale Spalte gleicher Breite, die ebenfalls senkrecht zur Zeichenebene sehr lang sind. Die Lichtquelle liege symmetrisch zur Mittelsenkrechten auf der Spaltebene. Die Spalten sollen wie im Abschnitt 2.4.3. so schmal sein, daß zwischen zwei Randstrahlen ein gegenüber der halben Wellenlänge sehr kleiner Wegunterschied besteht.

Die Abstände Lichtquelle — Spaltebene und Spaltebene — Auffangschirm werden als sehr groß gegenüber der Lichtquellenbreite und dem Spaltabstand vorausgesetzt. Es gilt also

$$R \gg a, \quad R \gg d, \quad b \gg a \quad \text{und} \quad b \gg x. \tag{2.159}$$

Infolge Beugung strahlen die Spalte in den gesamten Halbraum hinter der Spaltebene (entsprechend dem Huygensschen Prinzip). Die Annahme einer streifenförmigen

Lichtquelle bedingt, daß die Intensität und die Phasendifferenz nur von einer Koordinate abhängen. Dadurch sind die Gleichungen (2.143) und (2.144) unmittelbar anwendbar.

Berechnung der Phasendifferenz. Der optische Wegunterschied zwischen zwei Strahlen, die durch verschiedene Spalte gehen und in demselben Punkt der Lichtquelle beginnen, beträgt (Abb. 2.59)

$$\Delta L = n(l_2 + l_2' - l_1 - l_1') \tag{2.160}$$

oder

$$\Delta L = n(l_2 - l_1) + n(l_2' - l_1'). \tag{2.161}$$

Nach dem Pythagoreischen Lehrsatz ist

$$l_1^2 = \left(\frac{a}{2} - \xi\right)^2 + R^2 = \frac{a^2}{4} - a\xi + \xi^2 + R^2$$

und

$$l_2^2 = \left(\frac{a}{2} + \xi\right)^2 + R^2 = \frac{a^2}{4} + a\xi + \xi^2 + R^2.$$

Subtraktion ergibt

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = 2a\xi. \tag{2.162}$$

Wir können wegen Gl. (2.159) angenähert $l_2 - l_1 = 2R$ setzen und erhalten

$$l_2 - l_1 = \frac{a}{R}\,\xi. \tag{2.163}$$

Entsprechend finden wir

$$l_2' - l_1' = \frac{a}{b}\,x. \tag{2.164}$$

Insgesamt beträgt nach den Gleichungen (2.161), (2.163) und (2.164) der optische Wegunterschied

$$\Delta L = na\left(\frac{\xi}{R} + \frac{x}{b}\right). \tag{2.165}$$

Die zugeordnete Phasendifferenz erhalten wir aus $\delta = 2\pi\Delta L/\lambda_0$ mit $\lambda_0/n = \lambda$:

$$\delta = \frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{\xi}{R} + \frac{x}{b}\right). \tag{2.166}$$

Für Licht, das von der Mitte der Lichtquelle ausgeht ($\xi = 0$), beträgt die Phasendifferenz

$$\delta_0 = \frac{2\pi a x}{\lambda b}. \tag{2.167}$$

Für Licht, das von einem Randpunkt der Lichtquelle ausgeht ($\xi = d/2$), beträgt die Phasendifferenz

$$\delta_2 = \frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{d}{2R} + \frac{x}{b}\right). \tag{2.168}$$

Es ist also

$$\delta_2 - \delta_0 = \frac{\pi a d}{\lambda R}. \tag{2.169}$$

Diskussion der Intensitätsverteilung. Strahlt die Lichtquelle mit konstanter Intensität über die gesamte Breite hinweg, dann können wir die Gl. (2.147) übernehmen. Wir erhalten auf dem Schirm die Interferenzintensität

$$I = 2I_0\left[1 + \cos\delta_0 \frac{\sin(\delta_2 - \delta_0)}{\delta_2 - \delta_0}\right].$$

Wir diskutieren diese Gleichung.

Linienförmige Lichtquelle. Wegen $d = 0$ ist

$$\delta_2 - \delta_0 = 0 \text{ und } \lim_{d\to 0} \frac{\sin(\delta_2 - \delta_0)}{\delta_2 - \delta_0} = 1,$$

also

$$I = 2I_0(1 + \cos\delta_0). \tag{2.170}$$

Die Maxima haben den Betrag $I = 4I_0$ und liegen wegen $\cos\delta_0 = 1$ bei

$$x = \pm\frac{kb\lambda}{a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.171}$$

Für $\cos\delta_0 = -1$ verschwindet die Intensität. Die Nullstellen liegen bei

$$x = \pm\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b\lambda}{a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.172}$$

Die Intensität hängt kosinusförmig vom Ort ab (Abb. 2.60a). Das Interferenzbild besteht aus Streifen mit dem Kontrast $K = 1$.

Ausgedehnte Lichtquelle. Bei $d \neq 0$ vermindert der Faktor $[\sin(\delta_2 - \delta_0)]/(\delta_2 - \delta_0)$ die Intensität in den Maxima und erhöht sie in den Minima. Der Faktor

$$\gamma = \frac{\sin(\delta_2 - \delta_0)}{\delta_2 - \delta_0} \tag{2.173}$$

ist ein Maß dafür, wie groß der kohärente Anteil ist. Wir nennen $|\gamma|$ den Kohärenzgrad.

Die Intensität in den Maxima bzw. Minima beträgt

$$I_{\text{Max}} = 2I_0(1 + \gamma) \text{ und } I_{\text{Min}} = 2I_0(1 - \gamma). \tag{2.174a, b}$$

Der Kontrast im Interferenzbild ergibt sich nach Gl. (2.152) zu

$$K = \gamma. \tag{2.175}$$

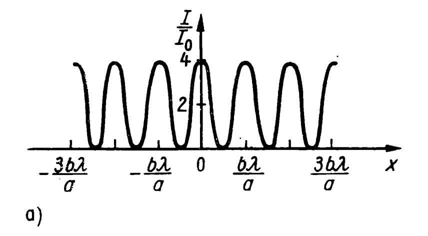
Der Betrag des Kontrastes im Interferenzbild ist dem Kohärenzgrad $|\gamma|$ gleich.

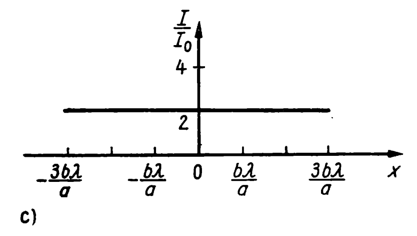
Der Kohärenzgrad für vier Werte von $\delta_2 - \delta_0$ ist in die Tab. 2.17 eingetragen. Die dazugehörigen Intensitätsverteilungen sind in den Abb. 2.60a...d grafisch dargestellt.

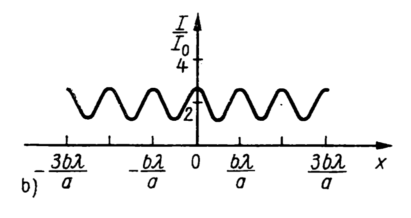
Negativer Kontrast bedeutet eine Kontrastumkehr. Dort, wo bei positivem Kontrast die Maxima liegen, befinden sich bei negativem Kontrast die Minima und umgekehrt.

Tabelle 2.17
Kohärenzgrad in Abhängigkeit von der Lichtquellenbreite

$\delta_2 - \delta_0$	d	K	$\|\gamma\|$	Bemerkungen
0	0	1	1	linienförmige Lichtquelle
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\lambda R}{2a}$	$\frac{2}{\pi} \approx 0{,}63$	0,63	verminderter Kontrast
π	$\frac{\lambda R}{a}$	0	0	kein beobachtbares Interferenzbild
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\lambda R}{2a}$	$-\frac{2}{3\pi} \approx -0{,}21$	0,21	negativer Kontrast (Kontrastumkehr)







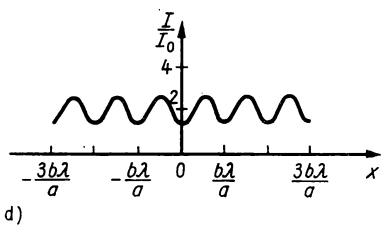


Abb. 2.60
Interferenzintensität
a) linienförmige monochromatische Lichtquelle, b) ausgedehnte Lichtquelle, c) verschwindender Interferenzkontrast, d) Kontrastumkehr

Kohärenzbedingung. Die Interferenzlinien sind nur bei einem ausreichenden Kontrast gut sichtbar. Geben wir z. B. den Mindestkontrast $K = 0{,}2$ vor, dann muß nach Gl. (2.154)

$$\delta_2 - \delta_0 = 2{,}65$$

sein. Zusammen mit Gl. (2.169) folgt daraus

$$\frac{ad}{\lambda R} = 0{,}84. \tag{2.176}$$

Wir führen den halben Öffnungswinkel der Beleuchtung u entsprechend Abb. 2.61 durch $a/R = 2 \tan u$ ein und erhalten

$$d \tan u = 0{,}42\lambda. \tag{2.177}$$

Bei kleinem Öffnungswinkel können wir $\tan u \approx \sin u = A$ setzen. Die Größe A ist die numerische Apertur der Beleuchtung. Es gilt

$$Ad = 0{,}42\lambda. \tag{2.178}$$

Für ausreichenden Kontrast ist damit die Forderung

$$Ad \ll \frac{\lambda}{2} \tag{2.179}$$

als Kriterium zur Abschätzung der zulässigen Lichtquellengröße anzusehen. Die Gl. (2.179) wird als Kohärenzbedingung bezeichnet.

> Das Produkt aus der Beleuchtungsapertur A und der Lichtquellenbreite d muß sehr klein gegen $\lambda/2$ sein.

Bei einer im Unendlichen liegenden Quelle ist die Kohärenzbedingung (2.179) nicht anwendbar. In diesem Falle ist die Lichtquellengröße durch die scheinbare Größe $2w$ zu beschreiben (Abb. 2.61). Es ist $d/R = 2 \tan w$ und

$$a \tan w = 0{,}42\,\lambda. \tag{2.180}$$

Die Kohärenzbedingung nimmt die Form

$$wa \ll \frac{\lambda}{2} \tag{2.181}$$

an.

> Das Produkt aus der halben scheinbaren Größe w der Lichtquelle und der für die Abmessung der Interferenzanordnung charakteristischen Größe a muß sehr klein gegen $\lambda/2$ sein.

Es zeigt sich also, daß es Bereiche der Lichtquelle gibt, innerhalb deren das ausgestrahlte Licht als ausreichend kohärent angesehen werden kann.

Für $|\gamma| = 0$ liegt inkohärentes Licht vor,

für $|\gamma| = 1$ ist das Licht kohärent,

für $0 < |\gamma| < 1$ wird von partiell-kohärentem Licht gesprochen.

Die Erscheinung, daß für die Erzeugung von Interferenzen eine bestimmte Ausdehnung der Lichtquelle zulässig ist bzw. daß zwei Punkten des Wellenfeldes ein Kohärenzgrad zugeordnet werden kann, wird als räumliche Kohärenz bezeichnet.

Inkohärenz des Lichtes kann entsprechend unseren Ausführungen in den Abschnitten 2.4.2. bis 2.4.4. drei physikalisch unterschiedliche Ursachen haben.

— Über die Beobachtungszeit hinweg überlagern sich viele Wellenzüge mit statistisch verteilten Phasendifferenzen zwischen den einer Wellenlänge zugeordneten Anteilen (unterschiedliche Lichtquellen oder Lichtquellenpunkte ohne Teilung der Amplitude oder der Wellenfront).

— Die überlagerten Wellen haben eine zu große spektrale Breite, d. h., die Wellen sind zeitlich inkohärent (zu kurze Wellenzüge).

— Die überlagerten Wellen haben eine zu große Variationsbreite der optischen Weglänge, d. h., die Wellen sind räumlich inkohärent (zu weit entfernte Lichtquellenpunkte sind an der Beleuchtung beteiligt).

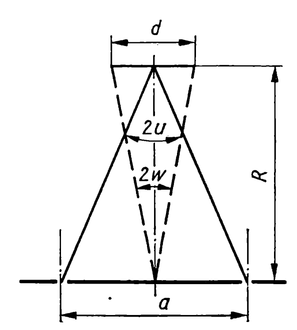


Abb. 2.61
Zur Ableitung der Kohärenzbedingung

Kohärenzfunktion und komplexer Kohärenzgrad. Die Interferenz mit partiellkohärentem Licht im Youngschen Interferometer läßt sich allgemeiner darstellen. Ein Lichtquellenelement $L_i(\xi, \eta)$ erzeugt in zwei Punkten des beugenden Schirms die komplexen Amplituden $a_{i1} = A_{i1} \exp(j\alpha_{i1})$ und $a_{i2} = A_{i2} \exp(j\alpha_{i2})$. Bis zum Aufpunkt ändern sich die komplexen Amplituden auf $a_{i1} \exp(j\delta_{i1})$ bzw. $a_{i2} \exp(j\delta_{i2})$, wobei keine Veränderung des Betrages der Amplituden angenommen wird.

Die Interferenz der beiden kohärenten Teilbündel ergibt die komplexe Amplitude

$$a_i = a_{i1}\, e^{j\delta_{i1}} + a_{i2}\, e^{j\delta_{i2}}.$$

Es ist $I_i \sim a_i a_i^*$, und die von den verschiedenen Punkten der Lichtquelle ausgehenden Intensitätsanteile sind zu summieren. Das ergibt für einen festen Aufpunkt

$$I = I_1 + I_2 + 2\,\mathrm{Re}[\Gamma_{12}(\delta_{12})], \tag{2.182a}$$

$(\delta_{12} = \delta_{i1} - \delta_{i2})$ mit

$$\Gamma_{12}(\delta_{12}) = \frac{\varepsilon c}{2}\, e^{j\delta_{12}} \sum_i a_{i1} a_{i2}^*. \tag{2.182b}$$

Die Größe $\Gamma_{12}(\delta_{12})$ bezeichnen wir als Kohärenzfunktion. Diese kann mittels

$$\gamma_{12}(\delta_{12}) = \frac{\Gamma_{12}(\delta_{12})}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

normiert werden.

Die normierte Kohärenzfunktion für $\delta_{12} = 0$ ist der komplexe Kohärenzgrad $\gamma_{12}(0)$, dessen Betrag $|\gamma_{12}(0)|$ den von uns bereits eingeführten Kohärenzgrad darstellt. Die Intensität läßt sich damit als

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,|\gamma_{12}(0)| \cos(\delta_{12} + \alpha_{12}) \tag{2.183}$$

schreiben. Für die symmetrisch vor den beugenden Öffnungen liegende Lichtquelle wird $\alpha_{12} = 0$. Wir kommen zur Gl. (2.119) zurück, mit dem Unterschied, daß der Kohärenzgrad berücksichtigt ist.

Führt man in der Ebene des Schirms für die beiden beugenden Öffnungen die Koordinaten x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 ein und setzt zur Abkürzung

$$\nu = \frac{x_1 - x_2}{R}, \quad \mu = \frac{y_1 - y_2}{R}, \quad \psi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2)}{2R},$$

dann kann man für die kontinuierlich ausgedehnte Lichtquelle den normierten komplexen Kohärenzgrad aus

$$\gamma_0(\nu, \mu) = e^{j\psi}\,\frac{\iint I(\xi, \eta)\, e^{-2\pi j(\xi\nu + \eta\mu)}\, d\xi\, d\eta}{\iint I(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta} \tag{2.184}$$

berechnen.

> Der normierte Kohärenzgrad ist bis auf einen Faktor gleich der Fourier-Transformierten der Intensität in der Lichtquellenebene.

Für beugende Öffnungen mit dem Abstand a, die symmetrisch zur Mittelsenkrechten auf der Lichtquelle liegen, ist $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, $\psi = 0$, $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = a$ zu setzen. Mit

$$v = \frac{\pi a d}{\lambda R} \tag{2.185}$$

gilt für die spaltförmige Quelle konstanter Intensität (d = Breite des Spaltes)

$$\gamma_0\left(\frac{a}{\lambda R}\right) = \frac{\sin v}{v}. \tag{2.186}$$

Die erste Nullstelle liegt bei $v = \pi$, so daß für das Kohärenzintervall

$$d \ll \frac{\lambda R}{a}$$

gilt, wie es den Gleichungen (2.173) und (2.169) entspricht.

Für die kreisförmige Quelle (d = Durchmesser der Quelle) geben wir ohne Beweis das Ergebnis

$$\gamma_0\left(\frac{a}{\lambda R}\right) = \frac{2J_1(v)}{v} \tag{2.187}$$

an. (J_1 ist eine Zylinderfunktion.) Die erste Nullstelle liegt bei $v = 3{,}81$, für das Kohärenzintervall gilt

$$d \ll 1{,}22\,\frac{\lambda R}{a}. \tag{2.188}$$

2.4.5. Kohärenz bei induzierter Emission

Ein Laser ist eine Lichtquelle, die auf der Basis der induzierten Emission arbeitet. Das kommt bereits im Namen zum Ausdruck, denn Laser ist eine Kurzform von engl. „*L*ight *a*mplification by *s*timulated *e*mission of *r*adiation". Vor der Entwicklung von Lichtquellen mit induzierter Emission gab es bereits Quellen für Mikrowellen, die nach diesem Prinzip arbeiten (Maser). Die Maser wurden nahezu gleichzeitig (1954) in der UdSSR von Basow und Prochorow, in den USA von Gordon, Townes und Zeiger erfunden.

Die erste Veröffentlichung über einen Laser stammt von Maiman (1960).

Bevor wir das grundlegende Arbeitsprinzip der Laser darstellen, erläutern wir die Unterschiede zwischen dem Licht, das durch Laser erzeugt wird und dem Licht, das von spontan strahlenden Lichtquellen ausgeht.

1. Das Licht, das ein Laser ausstrahlt, hat unter bestimmten Bedingungen gegenüber dem Licht, das spontan strahlende Lichtquellen aussenden, eine geringere spektrale Bandbreite.

Nach den Ausführungen des Abschnittes 2.4.3. bedeutet das einen höheren Grad an zeitlicher Kohärenz, also eine größere Kohärenzlänge. Während beispielsweise eine bestimmte Quecksilberlinie unter günstigen Bedingungen die Kohärenzlänge $\Delta L \approx 0{,}6$ m hat, wird bei einem Helium—Neon-Gaslaser ohne besondere Maßnahmen $\Delta L \approx 15\,000$ m erreicht. Stabilisierte Helium—Neon-Laser ermöglichen Kohärenzlängen über 1000 km.

2. Das Licht eines Lasers breitet sich vorwiegend in eine Richtung aus. Die Austrittsöffnung eines Lasers sendet unter bestimmten Anregungsbedingungen einen Ausschnitt einer ebenen Welle aus. Sie ist also räumlich kohärent. Die Abb. 2.62a, b stellen die Lichtausstrahlung bei einer spontan strahlenden Lichtquelle und bei einem Laser nach dem Huygensschen Prinzip schematisch dar.

Bei einer spontan strahlenden Lichtquelle senden die einzelnen Punkte inkohärente Elementarwellen aus. Damit ist eine Ausstrahlung von inkohärentem Licht nach allen Richtungen verbunden (abgesehen von dem Kohärenzintervall entsprechend Abschnitt 2.4.4.).

Bei der induziert strahlenden Lichtquelle können die Elementarwellen kohärent

sein. Die Austrittsöffnung wirkt wie die beugende Öffnung einer Linse, die eine punktförmige Lichtquelle in das Unendliche abbildet (Abb. 2.63). So wird z. B. der Hauptanteil der Intensität bei einer Öffnung mit 10 mm Durchmesser und der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm in einen Lichtkegel mit $2u = 30''$ Öffnung gestrahlt. Das entspricht einer Verbreiterung des Lichtbündels um 1,5 m auf 10 km Entfernung. (Bis zu dem 384400 km entfernten Mond verbreitert sich das Bündel um ungefähr 58 km.)

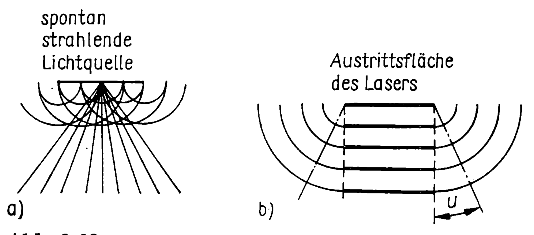


Abb. 2.62
Ausbreitung einer Lichtwelle a) nach dem Huygensschen Prinzip, b) bei räumlicher Kohärenz

3. Laser können mit höheren Intensitäten strahlen als spontan strahlende Lichtquellen (höhere spektrale Energiedichte).

4. Laserstrahlung ist amplitudenstabiler als das Licht von spontan strahlenden Lichtquellen.

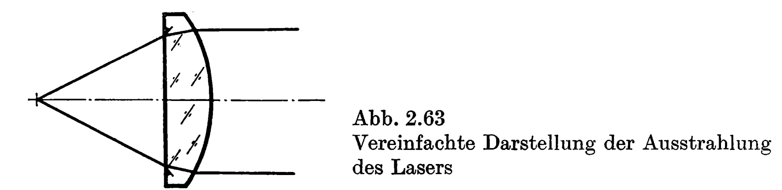


Abb. 2.63
Vereinfachte Darstellung der Ausstrahlung des Lasers

Allgemein läßt sich der Laser folgendermaßen charakterisieren:

> Der Laser ist eine Lichtquelle, die nach dem Prinzip der induzierten Emission strahlt.
> Der Laser enthält ein Element, in dem durch induzierte Emission Lichtwellen erregt werden. Dieses Element enthält einen aktiven Stoff, in dem eine Besetzungsinversion von Atomzuständen aufrechterhalten wird.
> Das aktive Bauelement ist als Resonator ausgebildet, so daß zwischen der induzierten Welle und den angeregten Atomen eine Rückkoppelung hergestellt wird. Damit erreicht man eine rauscharme Verstärkung der Welle, bevor sie aus dem Resonator ausgekoppelt wird.

Damit sind drei Probleme näher zu erläutern: Induzierte Emission, Besetzungsinversion, Rück- und Auskoppelung.

Die induzierte Emission wurde im Abschnitt 2.4.1. behandelt. Die wesentlichen Ergebnisse sind:

- Die Wahrscheinlichkeiten für die induzierte Emission und für die Absorption eines Quants sind gleich.
- Bei hohen Frequenzen (optischer Bereich) ist die induzierte Emission in gewissem Umfang mit spontaner Emission verbunden. (Die spontane Emission stellt die wesentliche Rauschquelle dar.)
- Die induzierte Welle hat die gleiche Richtung wie die induzierende Welle. Angeregte Eigenschwingungen werden bevorzugt verstärkt.

Besetzungsinversion. Wir betrachten ein System gleichartiger Atome. Im thermischen Gleichgewicht besteht eine statistische Verteilung der angeregten Zustände auf die Atome. Die Anzahl der Atome höherer Energiezustände ist geringer als die Anzahl niedriger Energiezustände. Für zwei Niveaus mit den mittleren Besetzungszahlen N_2 (oberes Niveau) und N_1 (unteres Niveau) ist

$$N_1 > N_2.$$

Es gilt die Boltzmann-Formel

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{2.189}$$

(k = Boltzmann-Konstante, T = dem atomaren System zuordenbare absolute Temperatur)

Durch Einstrahlung von Licht mit der Frequenz ν wird das obere Niveau angeregt, wenn die Energie der Lichtquanten absorbiert wird. Da jedoch die Wahrscheinlichkeiten für die Absorption und die induzierte Emission gleich sind, aber mehr Atome im unteren Niveau vorliegen, überwiegt die Absorption die induzierte Emission. Die Anzahl der induzierten Lichtquanten ist geringer als die Anzahl der absorbierten Lichtquanten, so daß keine Lichtausstrahlung beobachtet wird. Sollte es jedoch gelingen, den tieferen Zustand um mehr als 50% zu entleeren, dann ist

$$N_1 < N_2.$$

Die Anzahl der induzierten Quanten überwiegt die Anzahl der absorbierten Quanten.

> In einem atomaren System, in dem mehr Atome in einem höheren Energieniveau als in einem niedrigeren Energieniveau enthalten sind, besteht eine Besetzungsinversion. Das Erzeugen einer Besetzungsinversion durch Lichteinstrahlung wird als optisches Pumpen bezeichnet.

Umformen von Gl. (2.189) nach T ergibt

$$T = -\frac{h\nu}{k \ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}. \tag{2.190}$$

Für $N_2 > N_1$ wird $T < 0$. Wir erhalten einen Zustand, dem eine negative absolute Temperatur zugeordnet ist. Diese Auslegung folgt jedoch aus der formalen Anwen-

dung der Boltzmann-Formel auf die Energieniveaus. Physikalisch bedeutet eine negative absolute Temperatur das Vorliegen einer Besetzungsinversion. Wir erläutern das Erzeugen einer Besetzungsinversion an zwei Beispielen.

Rubinlaser. Rubin besteht aus einem Al_2O_3-Kristallgitter, in das Cr^{3+} -Ionen eingelagert sind. Die für das optische Pumpen wesentlichen Energieniveaus sind in der Abb. 2.64 dargestellt. Durch eine Blitzröhre wird in den Rubinkristall kurzwelliges Licht gestrahlt. Der für die Besetzungsinversion entscheidende Prozeß besteht darin, auf dem Umweg über Absorptionsbanden und strahlungslose Übergänge den metastabilen Zustand von Cr^{3+} aufzufüllen. Aus diesem Zustand ist der Übergang zum Grundzustand fast ausschließlich durch induzierte Emission möglich.

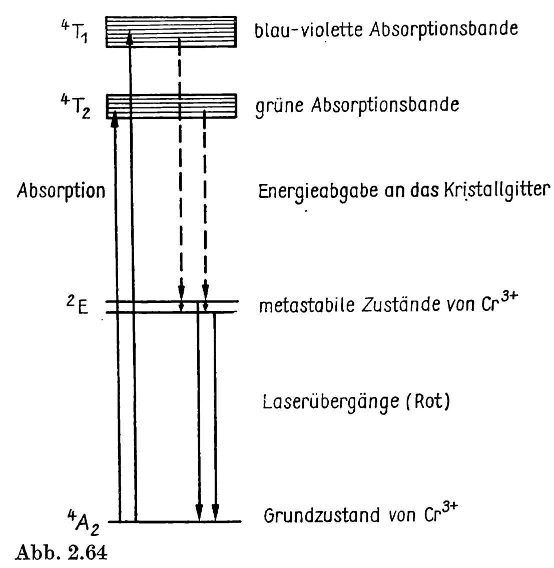


Abb. 2.64
Laserübergänge beim Rubinlaser

Helium—Neon-Gaslaser. Die wesentlichen Energieniveaus sind in der Abb. 2.65 angegeben. Eine Gasentladungsröhre enthält ein Gemisch aus Helium und Neon. Helium hat zwei metastabile Niveaus 2^1S und 2^3S, die wenig höher liegen als die angeregten Niveaus 3 s und 2 s des Neons. Dadurch kann die Energie der Heliumniveaus durch unelastische Stöße (Stöße 2. Art) auf die Neonniveaus übertragen werden.

Bei einem geeigneten Mischungsverhältnis zwischen Helium und Neon entsteht eine Besetzungsinversion zwischen den Niveaus 2 s und 2 p sowie 3 s und 3 p. (Die Niveaus haben Multiplettstruktur, d. h., sie bestehen aus mehreren dicht beieinander liegenden Niveaus. Das wurde in der Abb. 2.65 berücksichtigt.) Beim He—Ne-Gaslaser wird also die Besetzungsinversion auf dem Umweg über die He-Atome und die Stöße zweiter Art erzeugt. Es handelt sich nicht um ein optisches Pumpen.

Außer den Festkörperlasern und den Gaslasern gibt es auch noch Farbstoff- und Halbleiterlaser.

Rückkoppelung. Wir betrachten das Beispiel des Rubinstabes mit normal durchlässigen Oberflächen. Die Blitzröhre strahlt das Licht in verschiedenen Richtungen in den Rubinkristall ein. Infolgedessen werden auch die induzierten Wellen in verschiedene Richtungen verlaufen. Die spektrale Breite des induzierten Lichtes unterscheidet sich dann im wesentlichen nicht von der spektralen Breite bei spontaner Emission. Das Licht verläßt den Rubinkristall nach kurzer Zeit, eine nennenswerte Verstärkung findet nicht statt.

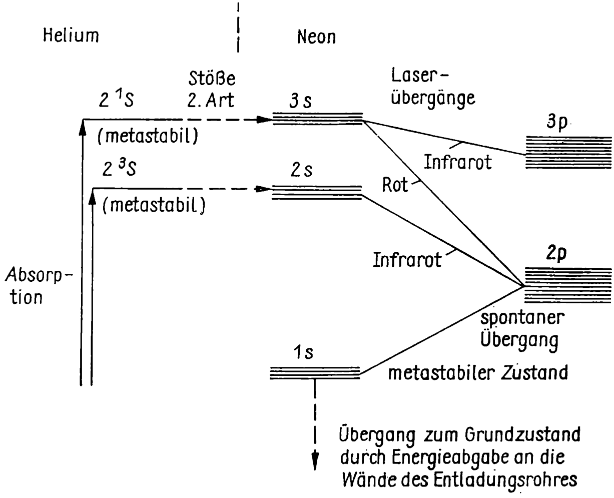


Abb. 2.65
Laserübergänge beim Helium—Neon-Gaslaser

Die Verhältnisse ändern sich grundlegend, wenn wir die Endflächen des Rubinstabes vollständig verspiegeln und damit den Rubinstab als Resonator ausbilden (Abb. 2.66). Die schräg auf die Spiegel auftreffenden Wellen verlassen nach kurzer Zeit den Rubinstab seitlich. Nur die senkrecht zu den Spiegeln hin- und herlaufenden Wellen bleiben im Resonator und werden durch induzierte Emission gleichphasig verstärkt. Die Verstärkung strebt einer Grenze zu, der aktive Stoff wird „gesättigt".

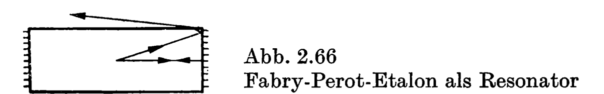


Abb. 2.66
Fabry-Perot-Etalon als Resonator

Im Resonator bilden sich stehende Lichtwellen aus. Auf den Spiegeloberflächen liegen Schwingungsknoten, so daß zwischen der Resonatorlänge L und der Wellenlänge λ der Eigenschwingungen der Zusammenhang

$$L = k\,\frac{\lambda}{2} \quad (k \text{ ganzzahlig}) \tag{2.191}$$

besteht. (Bei $\lambda = 500$ nm und $L = 500$ mm liegt k in der Größenordnung 10^6.)

Die Laserstrahlung besteht aus einem äquidistanten Spektrum sehr scharfer Linien. (Relative Linienbreite bei Gaslasern bis zu $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-14}$ herab.) Diese Linien liegen innerhalb des Linienprofils, das ohne Resonator entstehen würde. Damit ist die Rückkoppelung als Ursache für die zeitliche wie auch für die räumliche Kohärenz des Lasers anzusehen.

Die Anregung und Verstärkung einer geringen Anzahl von Eigenschwingungen schmaler Frequenzbänder erklärt auch die hohe spektrale Energiedichte der Laserstrahlung.

Auskoppelung. Die Laserstrahlung muß aus dem Resonator ausgekoppelt werden. Das wird erreicht, wenn ein Resonatorspiegel teildurchlässig ist. Damit die Verluste im Resonator klein bleiben, werden die Spiegel mit sehr geringer Durchlässigkeit hergestellt. Die Bedingung (2.191) für die Ausbildung stehender Wellen bleibt trotzdem gültig. Die Beugung an der Austrittsöffnung verbreitert das Laserbündel. Das wurde bereits in der Abb. 2.62b berücksichtigt. Der Resonator muß nicht aus Planspiegeln bestehen. Die Strahlung kann auch über Öffnungen im Spiegel ausgekoppelt werden. Die damit zusammenhängenden Probleme sind z. B. in [1] dargestellt.

Gaußsche Bündel. Im Laserresonator sind nicht nur longitudinale, sondern auch transversale Eigenschwingungen möglich. Jede Eigenschwingung wird als Mode bezeichnet und mit dem Symbol TEM charakterisiert (Transverse Electric and Magnetic Field). Für den Resonator mit zylindrischem Querschnitt wird durch Indizes die Anzahl der kreisförmigen und radialen Knoten der transversalen Moden gekennzeichnet (Abb. 2.67).

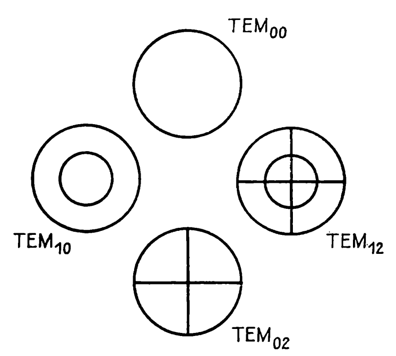


Abb. 2.67
Transversale Moden

Besondere Bedeutung, vor allem für Gaslaser, hat der konfokale Resonator. Dieser besteht aus Kugelspiegeln, deren Brennpunkte zusammenfallen (Abb. 2.68). Im Grundmodus (TEM_{00}) bildet sich beim konfokalen Resonator eine Eigenschwingung aus, bei der die Intensität quer zur Ausbreitungsrichtung der Welle nach einer Gaußfunktion abnimmt (Gaußsches Bündel, Abb. 2.69). An der Stelle $z = 0$ nimmt die auf die Intensität im Achsenpunkt normierte Intensität radial gemäß

$$i(r) = \mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{w_0^2}}$$

ab. Bis zu dem Radius $r = w_0$ sinkt die Intensität auf $1/e^2$ ab. Es läßt sich zeigen, daß

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda l}{2\pi}} \tag{2.192}$$

ist (l = Abstand der Spiegel = Resonatorlänge). Weitere Kenngrößen des Gaußschen Bündels sind der Bündelradius an der Stelle z

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}, \tag{2.193}$$

der Krümmungsradius der Wellenflächen

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] \tag{2.194}$$

und der halbe Divergenzwinkel

$$\Theta(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{2.195}$$

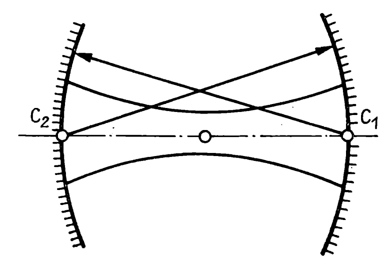


Abb. 2.68
Konfokaler Resonator aus Kugelspiegeln

Kohärenz des Laserlichtes. Nach den Ausführungen über den Aufbau der Laser und ihre prinzipielle Funktion kommen wir noch einmal auf den eigentlichen Gegenstand dieses Abschnitts zurück. Sowohl eine große zeitliche wie auch eine große räumliche Kohärenz setzt einen kontinuierlich arbeitenden Laser im Einmoden-

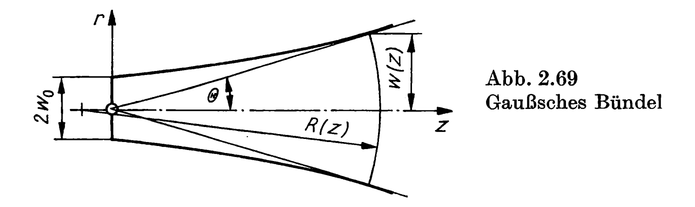


Abb. 2.69
Gaußsches Bündel

betrieb voraus. Impulslaser und Gaslaser im Mehrmodenbetrieb haben im allgemeinen keine bessere zeitliche Kohärenz als thermische Lichtquellen. Halbleiterlaser strahlen in relativ große Divergenzwinkel (einige Grad).

Besonders gute zeitliche Kohärenz ist mit Gaslasern im Einmodenbetrieb, z. B. dem Helium—Neon-Gaslaser, mit konfokalem Resonator, erreichbar, wenn der Aufbau hinsichtlich mechanischer und akustischer Störungen sehr gut stabilisiert

ist. Dazu können auch Regelkreise, z. B. zur piezoelektrischen Stabilisierung der Resonatorlänge, eingesetzt werden. Es lassen sich so die bereits oben erwähnten Kohärenzlängen über 100000 km erreichen (entsprechend einer Linienbreite von ca. 100 Hz). Theoretisch sind noch kleinere Bandbreiten möglich (bis auf etwa 1 Hz herab). Auch die Langzeitstabilität ist auf diese Weise zu sichern. Zum Beispiel kann die relative Frequenzänderung bei entsprechendem Aufwand über eine längere Zeit $\Delta\nu/\nu = 10^{-12}$ betragen.

Für die räumliche Kohärenz läßt sich mit dem Gaslaser im Einmodenbetrieb nahezu der theoretische Grenzwert erreichen, der durch die beugungsbedingte Divergenz gegeben ist. Die sogenannte Fresnel-Zahl

$$F = \frac{d^2}{4\lambda l n}, \tag{2.196}$$

(n = Brechzahl im Resonator der Länge l, d = genutzter Spiegeldurchmesser) kann z. B. bei Gaslasern $F = 2$ sein. Ab $F < 50$ ist aber die Beugung nicht zu vernachlässigen.

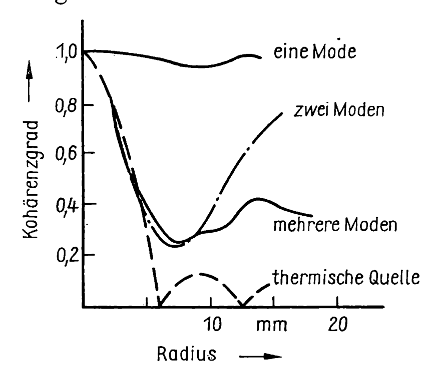


Abb. 2.70
Räumliche Kohärenz bei Lasern (nach [3])

Young [3] hat gezeigt, daß bereits bei der Anregung zweier Transversalmoden die räumliche Kohärenz wesentlich abnimmt. Bei Vielmodenbetrieb ist das Kohärenzintervall nicht größer als bei thermischen Lichtquellen (Abb. 2.70).

Das Produkt aus der Fläche des Kohärenzintervalls und der Kohärenzlänge stellt das Kohärenzvolumen dar. Zur Charakterisierung der Kohärenzeigenschaften des Lichtes wird der Entartungsparameter verwendet, der die mittlere Anzahl der Photonen im Kohärenzvolumen angibt. Zugleich ist er das Verhältnis aus den Übergangswahrscheinlichkeiten für induzierte und spontane Emission

$$\delta = \frac{\ddot{U}_{\text{induziert}}}{\ddot{U}_{\text{spontan}}}.$$

Für thermische Quellen ist maximal $\delta = 10^{-3}$, während bei Lasern unter bestimmten Bedingungen $\delta = 10^{13}$ möglich ist.

Auf Grund der Kohärenz von Gaslasern im Einmodenbetrieb kann auch Licht von zwei verschiedenen Lasern interferieren.

Beschreibung der Kohärenz mit Korrelationsfunktionen. Die Kohärenzfunktion $\Gamma_{12}(\delta_{12})$ für spontan emittiertes Licht beschreibt die Korrelation der elektrischen Feldstärken in zwei Punkten des Wellenfeldes zu zwei Zeitpunkten. Das geht daraus hervor, daß die Phasendifferenz δ_{12} im Aufpunkt mittels $\delta_{12} = 2\pi\nu(t_1 - t_2) = 2\pi\nu\tau$ auf die Zeitdifferenz τ zurückgeführt werden kann. Wenn wir die Lage der beiden Raumpunkte durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ angeben und nur einen Punkt der Lichtquelle betrachten, dann gilt nach Gl. (2.182b)

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \frac{\varepsilon c}{2}\, a(\boldsymbol{r}_1, t + \tau) \cdot a^*(\boldsymbol{r}_2, t).$$

Gl. (2.15) und damit auch Gl. (2.182b) gehen aus dem Poyntingvektor durch Zeitmittelung hervor, wobei der Betrag der Amplitude zeitlich konstant angenommen wurde. Für den Fall des stationären Wellenfeldes mit zeitlich veränderlicher Amplitude gilt entsprechend

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \frac{\varepsilon c}{2} \langle a(\boldsymbol{r}_1, t + \tau) \cdot a^*(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle$$

und nach Normierung

$$\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0)} \cdot \sqrt{\Gamma(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2, 0)}}.$$

Die Kohärenzfunktion $\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ ist eine Korrelationsfunktion erster Ordnung. Das Licht ist vollständig kohärent, wenn $\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0) = 1$, also

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \sqrt{\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0)} \cdot \sqrt{\Gamma(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2, 0)}$$

gilt. Der kohärente Zustand ist bei spontan emittiertem Licht dadurch charakterisiert, daß sich die Kohärenzfunktion als Produkt aus zwei Funktionen darstellen läßt, von denen jede nur von den Koordinaten eines Punktes abhängt.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie läßt sich zeigen, daß zwischen spontan emittiertem Licht und Laserlicht grundsätzliche Unterschiede bezüglich der Korrelation der Phasen und der Amplituden bestehen. Die Korrelation der elektrischen Feldstärken ist bei Laserlicht in $2n$ Punkten des Ortes und der Zeit möglich. Die verallgemeinerte Kohärenzfunktion für ein stationäres Wellenfeld lautet

$$\begin{aligned}&\Gamma_n(\boldsymbol{r}_1, t + \tau_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t + \tau_n, \boldsymbol{r}_{n+1}, t + \tau_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{r}_{2n}, t + \tau_{2n})\\ &= \langle a(\boldsymbol{r}_1, t + \tau_1) \ldots a(\boldsymbol{r}_n, t + \tau_n)\, a^*(\boldsymbol{r}_{n+1}, t + \tau_{n+1}) \ldots a^*(\boldsymbol{r}_{2n}, t + \tau_{2n})\rangle.\end{aligned}$$

Wenn sich die verallgemeinerte Kohärenzfunktion in ihrer quantentheoretischen Schreibweise analog zur Kohärenzfunktion erster Ordnung als Produkt von Funktionen darstellen läßt, die nur je von der Koordinate eines Raum-Zeit-Punktes abhängen, dann heißt der zugeordnete Zustand maximal oder quantentheoretisch kohärent. Diese Zustände lassen sich bei Laserlicht angenähert realisieren.

Bezüglich der Kohärenz unterscheidet sich Laserlicht also von spontan erzeugtem Licht durch die Anteile höherer Ordnung der Korrelationsfunktion.

Eng verbunden mit den Korrelationen der elektrischen Feldstärke sind die Korrelationen der Intensität. Bei spontan emittiertem Licht beträgt die Intensitäts-

korrelation in zwei Raum-Zeit-Punkten für stationäre Felder

$$\langle I(\boldsymbol{r}_1, t + \tau) \cdot I(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle = \langle a(\boldsymbol{r}_1, t + \tau)\, a^*(\boldsymbol{r}_1, t + \tau)\, a(\boldsymbol{r}_2, t)\, a^*(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle.$$

Diese Größe ist ein Maß für die Amplitudenfluktuationen im Wellenfeld. Für zeitlich konstante Amplituden gilt offenbar

$$\langle I(\boldsymbol{r}_1, t + \tau) \cdot I(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle = |\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)|^2.$$

Bei zeitlich schwankenden Amplituden wird statt dessen (der Beweis sei hier übergangen)

$$\langle I(\boldsymbol{r}_1, t + \tau) \cdot I(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle = |\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)|^2 + \langle I(\boldsymbol{r}_1, t) \cdot I(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle.$$

Für spontan emittiertes Licht konnte experimentell nachgewiesen werden, daß die Größe $\langle I(\boldsymbol{r}_1, t) \cdot I(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle$ nicht verschwindet (Hanbury-Brown und Twiss, siehe z. B. [15]). Das ist eine Folge der durch die kurzen Wellenzüge hervorgerufenen Amplitudenfluktuationen.

Im Quantenmodell stellt sich die Amplitudenfluktuation als Schwankung der Photonenanzahl n dar. Das mittlere Schwankungsquadrat ergibt sich aus statistischen Untersuchungen zu

$$\langle \Delta n^2\rangle = \langle n\rangle + \langle n\rangle^2.$$

Die relative Streuung beträgt

$$\frac{\langle \Delta n^2\rangle}{\langle n\rangle^2} = 1 + \frac{1}{\langle n\rangle}.$$

Bei großen Photonenanzahlen ist das mittlere Schwankungsquadrat gleich dem Quadrat der mittleren Photonenanzahl, so daß die Intensitätsschwankungen in der Größenordnung der Intensität selbst liegen.

Für Laserlicht ergibt sich im Idealfall keine Korrelation der Intensitäten (auch dann nicht, wenn man höhere Intensitätskorrelationen hinzunimmt). Das mittlere Schwankungsquadrat der Photonenanzahl beträgt

$$\langle \Delta n^2\rangle = \langle n\rangle,$$

so daß die relative Streuung

$$\frac{\langle \Delta n^2\rangle}{\langle n\rangle^2} = \frac{1}{\langle n\rangle}$$

bei großen Photonenanzahlen gegen Null geht. Das bedeutet eine hohe Amplitudenstabilität. Das Licht eines stabilisierten Einmodenlasers kann in sehr guter Näherung als monochromatische Welle mit einem sehr kleinen Rauschanteil betrachtet werden. Damit ergibt sich zusammenfassend:

> Spontan emittiertes Licht kann höchstens kohärent in der ersten Ordnung sein und hat eine große Amplitudenfluktuation.
> Laserlicht kann kohärent von höherer Ordnung sein und ist im Idealfall amplitudenstabil.

Für sehr kleine Photonenanzahlen, für die $\langle n \rangle^2$ gegen $\langle n \rangle$ vernachlässigt werden kann, besteht kein Unterschied zwischen den mittleren Schwankungsquadraten für spontan emittierte Strahlung und Laserstrahlung. Das ist noch einmal ein Hinweis darauf, daß bei sehr kleinen Intensitäten der Quantencharakter in den Vordergrund tritt.

Auf diese Andeutungen müssen wir uns hier beschränken. Die vollständige Behandlung der Kohärenz der Laserstrahlung erfordert die konsequente Anwendung der Quantenfeldtheorie und der Photonenstatistik und geht über das Anliegen dieses Buches hinaus. Wir verweisen z. B. auf [18].

2.5. Interferenz

2.5.1. Amplituden und Phasendifferenzen an der planparallelen Platte

Berechnung der Amplituden. Es sei eine nichtabsorbierende planparallele Platte der Dicke d vorgegeben. Die Platte habe die Brechzahl n'' und grenze beiderseits an einen Stoff mit der Brechzahl n an. Wir lassen eine ebene Welle unter dem Winkel ε auf die Platte auftreffen. An jeder Fläche wird ein Teil des Lichtes reflektiert, ein Teil hindurchgelassen und dabei gebrochen. Es liegt also eine Teilung der Amplitude vor. Das auf beiden Seiten aus der Platte austretende Licht besteht aus mehreren Teilbündeln, die sich überlagern. Durch die unterschiedlichen Lichtwege der Teilbündel in der Platte entstehen Phasendifferenzen. Wir können die durch Interferenz entstehende Intensität bestimmen, wenn wir diese Phasendifferenzen und die Amplituden der Teilbündel berechnen. Für die Ableitung der Formeln nehmen wir $n < n''$ an.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 2.71 gilt für die Amplitudenverhältnisse nach den Fresnelschen Formeln an der 1. Fläche

$$\alpha_1 = \frac{A'}{A}, \quad \sigma_1 = \frac{A''}{A} \tag{2.197a, b}$$

und an der 2. Fläche bzw. für die Mehrfachreflexionen ($k \geqq 2$)

$$\alpha_2 = \frac{B_1'}{A''} = \frac{B_k'}{B_{k-1}'}, \quad \sigma_2 = \frac{A_1''}{A''} = \frac{A_k''}{B_{2k-2}'}. \tag{2.198a, b}$$

Diese Formeln gelten sowohl für die s-Komponente wie für die p-Komponente. Mit den Fresnelschen Formeln (2.49) und (2.50) lassen sich die Beziehungen

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \tag{2.199}$$

und

$$\alpha_2^2 + \sigma_1\sigma_2 = 1 \tag{2.200}$$

beweisen.

Weiter ist

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = R. \tag{2.201}$$

Aus Gl. (2.200) und Gl. (2.201) geht

$$\sigma_1\sigma_2 = 1 - R \tag{2.202}$$

hervor.

Für die Amplituden der aus der Platte austretenden Bündel können wir allgemeine Beziehungen angeben. Aus Gl. (2.197a) und Gl. (2.199) folgt



$$A' = -\alpha_2 A. \tag{2.203}$$

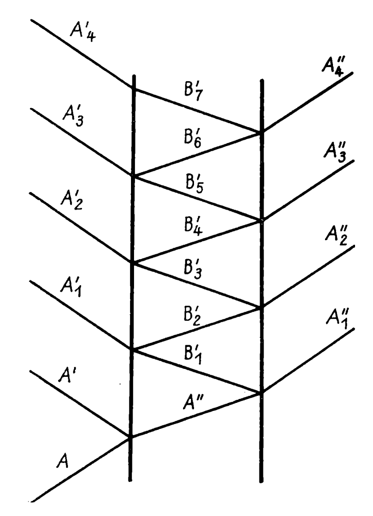


Abb. 2.71
Teilung der Amplitude an der planparallelen Platte

Die weiteren Bündel sind einmal in die Platte hinein- und einmal aus der Platte herausgegangen. Das ergibt den Faktor $\sigma_1\sigma_2$. Das erste im reflektierten Licht enthaltene Teilbündel wurde innen einmal reflektiert, so daß

$$A_1' = \alpha_2\sigma_1\sigma_2 A \tag{2.204}$$

ist. Zwischen den weiteren Teilbündeln liegen jeweils zwei weitere innere Reflexionen. Es gilt

$$A_k' = \alpha_2^{2k-1}\sigma_1\sigma_2 A. \tag{2.205}$$

Das direkt hindurchgehende Licht wurde nicht reflektiert, seine Amplitude beträgt

$$A_1'' = \sigma_1\sigma_2 A. \tag{2.206}$$

Zwischen den weiteren Teilbündeln, die durch die Platte hindurchgehen, liegen wieder zwei innere Reflexionen, so daß sie die Amplituden

$$A_k'' = \alpha_2^{2k-2}\sigma_1\sigma_2 A \tag{2.207}$$

haben.

Unter Verwendung von Gl. (2.201) und Gl. (2.202) formen wir die Gleichungen (2.203), (2.205) und (2.207) um in

$$A' = -\sqrt{R}A, \tag{2.208}$$

$$A'_k = (1 - R)\, R^{k-\frac{1}{2}} A, \tag{2.209}$$

$$A''_k = (1 - R)\, R^{k-1} A. \tag{2.210}$$

Berechnung der Phasendifferenzen. Es genügt, die Phasendifferenz zwischen den Bündeln mit den Amplituden A' und A'_1 zu berechnen. Sowohl im reflektierten wie auch im hindurchgelassenen Licht haben zwei aufeinander folgende Teilbündel dieselbe Phasendifferenz.

Bis zum Punkt A und von der Ebene BC an haben beide Teilbündel den gleichen Weg (Abb. 2.72). Die Phasendifferenz entsteht durch den optischen Wegunterschied

$$\Delta L = n''(\mathrm{AD} + \mathrm{DC}) - n\,\mathrm{AB}. \tag{2.211}$$

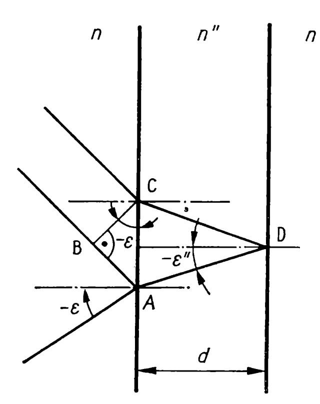


Abb. 2.72
Zur Ableitung der Phasendifferenz zwischen benachbarten Bündeln

Die Strecken drücken wir durch bekannte Größen aus. Nach Abb. 2.72 ist

$$-\sin\varepsilon = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}, \quad \cos\varepsilon'' = \frac{d}{\mathrm{AB}}, \quad -\tan\varepsilon'' = \frac{\mathrm{AC}}{2d}. \tag{2.212a...c}$$

Aus Gl. (2.212a) und Gl. (2.212c) folgt

$$\mathrm{AB} = -\mathrm{AC}\sin\varepsilon = 2d\sin\varepsilon\tan\varepsilon''. \tag{2.213}$$

Einsetzen der Gleichungen (2.212b) und (2.213) in die Gleichung (2.211) ergibt mit $\mathrm{AD} + \mathrm{DC} = 2\mathrm{AD}$

$$\Delta L = \frac{2n''d}{\cos\varepsilon''} - 2nd\sin\varepsilon\tan\varepsilon'' \tag{2.214}$$

oder

$$\Delta L = \frac{2n''d}{\cos\varepsilon''}\left[1 - \frac{n}{n''}\sin\varepsilon\sin\varepsilon''\right].$$

Mit dem Brechungsgesetz und $1 - \sin^2 \varepsilon'' = \cos^2 \varepsilon''$ formen wir um in

$$\Delta L = 2n''d \cos \varepsilon''. \tag{2.215}$$

Den Brechungswinkel können wir mittels

$$\cos \varepsilon'' = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon''} = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n''}\right)^2 \sin^2 \varepsilon} = \frac{n}{n''} \sqrt{\left(\frac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon}$$

eliminieren. Gl. (2.215) geht über in

$$\Delta L = 2nd \sqrt{\left(\frac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon}. \tag{2.216}$$

Die Phasendifferenz folgt aus

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L.$$

Wir setzen $\lambda_0/n'' = \lambda''$ und erhalten aus Gl. (2.215)

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda''} d \cos \varepsilon'', \tag{2.217a}$$

bzw. mit $\lambda_0/n = \lambda$ aus Gl. (2.216)

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon}. \tag{2.217b}$$

2.5.2. Intensitäten an der planparallelen Platte

Berechnung der Intensität. Wir berechnen die Intensität, die sich bei der Überlagerung der durch die Platte hindurchgehenden Teilbündel ergibt. Nach Gl. (2.106) sind zunächst die komplexen Amplituden der Teilwellen zu addieren:

$$a'' = \sum_k a''_k. \tag{2.218}$$

Die komplexen Amplituden der Teilwellen betragen

$$a''_k = A''_k \, e^{j\delta''_k} \tag{2.219}$$

also mit Gl. (2.210)

$$a''_k = (1 - R) \, R^{k-1} A \, e^{j(k-1)\delta}. \tag{2.220}$$

Wir setzen a''_k nach Gl. (2.220) in Gl. (2.218) ein und nehmen an, daß sich p Teilwellen überlagern. Wir erhalten

$$a'' = (1 - R) \, A \sum_{k=1}^{p} R^{k-1} \, e^{j(k-1)\delta}. \tag{2.221}$$

Wir führen den neuen Summationsindex

$$m = k - 1$$

ein:

$$a'' = (1 - R)\, A \sum_{m=0}^{p-1} R^m\, e^{jm\delta}. \tag{2.222}$$

Die Summe stellt eine geometrische Reihe mit endlich vielen Gliedern dar, die mit der Formel

$$S = \frac{a(1 - q^p)}{1 - q}$$

(Anfangsglied $a = 1$, Quotient $q = R \cdot \exp(j\delta)$, Gliedanzahl p) aufzusummieren ist. Das Ergebnis lautet

$$a'' = (1 - R)\, A\, \frac{1 - R^p\, e^{jp\delta}}{1 - R\, e^{j\delta}}. \tag{2.223}$$

Die Intensität beträgt nach Gl. (2.112)

$$I'' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} A^2 (1 - R)^2\, \frac{1 - R^p\, e^{jp\delta}}{1 - R\, e^{j\delta}} \cdot \frac{1 - R^p\, e^{-jp\delta}}{1 - R^{-j\delta}}. \tag{2.224}$$

In der Gl. (2.224) ist

$$I = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} A^2 \tag{2.225}$$

die Intensität des einfallenden Lichtes. Weiter gilt

$$(1 - R^p\, e^{jp\delta})\,(1 - R^p\, e^{-j\delta}) = 1 - 2R^p \cos p\delta + R^{2p}. \tag{2.226}$$

Mit der Hilfsformel $\cos p\delta = 1 - 2\sin^2 (p\delta/2)$ geht die rechte Seite von Gl. (2.226) über in

$$(1 - R^p)^2 + 4R^p \sin^2 \frac{p\delta}{2}.$$

Der Nenner der Gl. (2.224) wird entsprechend umgeformt. Insgesamt ergeben die Gleichungen (2.224) und (2.225) dann

$$I'' = I(1 - R)^2\, \frac{(1 - R^p)^2 + 4R^p \sin^2 \dfrac{p\delta}{2}}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \dfrac{\delta}{2}} \tag{2.227}$$

oder

$$I'' = I\, \frac{(1 - R^p)^2 + 4R^p \sin^2 \dfrac{p\delta}{2}}{1 + \dfrac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \dfrac{\delta}{2}}. \tag{2.228}$$

Für unendlich viele Bündel ist der Grenzübergang $\lim\limits_{p\to\infty} R^p = 0$ vorzunehmen ($R < 1$!), so daß

$$I'' = I \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \dfrac{\delta}{2}} \tag{2.229}$$

wird.

Wegen des Energieerhaltungssatzes muß die Intensität bei der Überlagerung der unendlich vielen reflektierten Teilbündel

$$I' = I - I''$$

betragen. Daraus folgt mit Gl. (2.229)

$$I' = I \frac{\dfrac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \dfrac{\delta}{2}}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \dfrac{\delta}{2}}. \tag{2.230}$$

Diskussion der Intensitätsgleichungen (unendlich viele Bündel). Wir diskutieren die Gl. (2.229) und die Gl. (2.230) für die hindurchgelassene bzw. die reflektierte Intensität bei der Interferenz unendlich vieler Teilbündel. Für die Maxima und Minima gelten die Bedingungen, die in der Tab. 2.18 zusammengefaßt sind.

Tabelle 2.18
Maximums- und Minimumsbedingung bei planparallelen Platten

Reflektierte Intensität Gl. (2.230)	Hindurchgelassene Intensität Gl. (2.229)
Für $\sin^2 \dfrac{\delta}{2} = 0,\ \dfrac{\delta}{2} = k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ 2d\sqrt{\left(\dfrac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon} = k\lambda$ (2.231)	Für $\sin^2 \dfrac{\delta}{2} = 0,\ \dfrac{\delta}{2} = k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ 2d\sqrt{\left(\dfrac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon} = k\lambda$ (2.231)
erhalten wir das Minimum $I'_{\text{Min}} = 0.$	erhalten wir das Maximum $I''_{\text{Max}} = I.$ (2.232a, b)
Für $\sin^2 \dfrac{\delta}{2} = 1,\ \dfrac{\delta}{2} = (2k+1)\,\pi,\ k = 0, 1, 2 \ldots,\ 2d\sqrt{\left(\dfrac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon} = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ (2.233)	Für $\sin^2 \dfrac{\delta}{2} = 1,\ \dfrac{\delta}{2} = (2k+1)\,\pi,\ k = 0, 1, 2 \ldots,\ 2d\sqrt{\left(\dfrac{n''}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon} = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ (2.233)
erhalten wir das Maximum $I'_{\text{Max}} = I \dfrac{4R}{(1+R)^2}$	erhalten wir das Minimum $I''_{\text{Min}} = I \left(\dfrac{1-R}{1+R}\right)^2.$ (2.234a, b)
Der Kontrast beträgt $K' = 1$	$K'' = \dfrac{2R}{1+R^2}$ (2.235a, b)

In der Abb. 2.73 ist der Intensitätsverlauf im hindurchgelassenen Licht grafisch dargestellt. Es ist zu erkennen, daß bei größerem Reflexionsvermögen schmalere Maxima und ein höherer Kontrast vorliegen. Abbildung 2.74 enthält K'' als Funktion des Reflexionsvermögens.

Die Erhöhung des Reflexionsvermögens ist ein Mittel, mit dem im Interferenzbild des hindurchgelassenen Lichtes ein größerer Kontrast und schmalere Maxima erzielt werden können.

Diskussion der Intensitätsgleichungen (endlich viele Bündel). In Interferenzanordnungen können oft nur endlich viele Bündel überlagert werden. Das kann z. B. daran liegen, daß die verwendeten Platten endlich ausgedehnt sind. Manchmal überdecken sich nicht sämtliche Teilbündel oder die wirksame Bündelanzahl wird durch Absorption begrenzt.

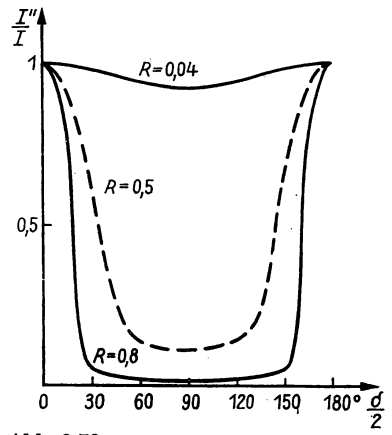


Abb. 2.73
Intensität bei der Interferenz unendlich vieler Bündel

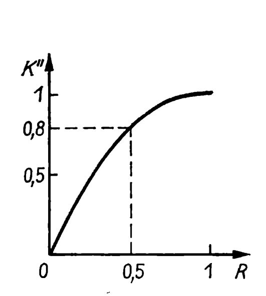


Abb. 2.74
Kontrast bei der Interferenz unendlich vieler Bündel

Bei den praktischen Anwendungen wird im allgemeinen das hindurchgelassene Licht beobachtet. Wir beschränken uns deshalb darauf, die Intensität für diesen Fall zu diskutieren. Zur besseren Übersicht sind in der Abb. 2.75 Zähler und Kehrwert des Nenners von Gl. (2.228) für $p = 8$ und $R = 0{,}8$ grafisch dargestellt. Der Kehrwert des Nenners hat den Maximalwert Eins bei $\sin(\delta/2) = 0$ und Minima bei $|\sin(\delta/2)| = 1$. Der Zähler hat Maxima für $|\sin(p\delta/2)| = 1$ mit der Größe

$$(1 - R^p)^2 + 4R^p = 1{,}364$$

und Minima für $\sin(p\delta/2) = 0$ mit der Größe

$$(1 - R^p)^2 = 0{,}693.$$

Im Bereich einer Periode des Nenners durchläuft der Zähler p Perioden. Das Intensitätsverhältnis erhalten wir durch grafische Multiplikation beider Kurven der

Abb. 2.75. Auf diese Weise entsteht die Abb. 2.76. Es ergeben sich Hauptmaxima, Nebenmaxima und Minima.

Hauptmaxima liegen bei

$$\sin\frac{\delta}{2} = 0$$

bzw.

$$\frac{\delta}{2} = k\pi\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.236}$$

Die Intensität beträgt

$$I''_{\text{Max}} = I(1 - R^p)^2. \tag{2.237}$$

Nebenmaxima entstehen bei nicht zu kleinem p fast genau für

$$\left|\sin\frac{p\delta}{2}\right| = 1, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\delta}{2} = \frac{2z+1}{p}\,\frac{\pi}{2}, \quad z = 1, 2, 3, \ldots, (p-2). \tag{2.238}$$

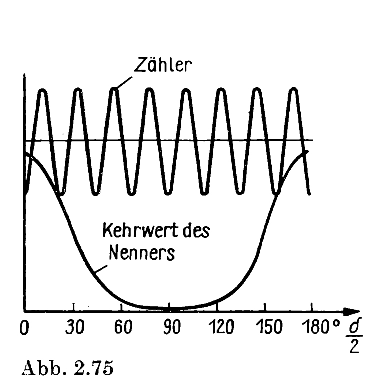


Abb. 2.75
Zähler und Kehrwert des Nenners der Gl. (2.228) als Funktion von $\delta/2$

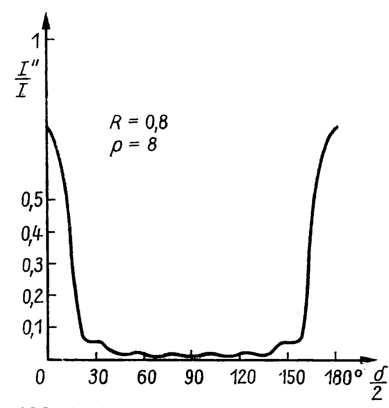


Abb. 2.76
Intensität bei der Interferenz endlich vieler Bündel

Das maximale z finden wir durch folgende Überlegung:

Da $3/(2p)$ der Abstand des 1. Nebenmaximums vom Hauptmaximum ist, muß

$$k + \frac{2z_{\text{Max}} + 1}{2p} = k + 1 - \frac{3}{2p},$$

also $z_{\text{Max}} = p - 2$ sein.

Minima erhalten wir für

$$\sin\frac{p\delta}{2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\delta}{2} = \frac{z\pi}{p}, \quad z = 1, 2, 3, \ldots, (p-1). \tag{2.239}$$

Die Gl. (2.239) führt im Gegensatz zur Gl. (2.236) auf Minima, weil der Nenner für jedes Argument des Sinus groß ist. Die Minima liegen insgesamt bei

$$\frac{\delta}{2}\left(k + \frac{z}{p}\right)\pi, \quad z = 1, 2, 3, \ldots, (p - 1). \tag{2.240}$$

Für eine große Bündelanzahl p wird der durch die Nebenmaxima entstehende Lichtschleier zwischen den Hauptmaxima sehr gering. Der Verlauf des Intensitätsverhältnisses nähert sich demjenigen für $p = \infty$.

2.5.3. Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten

Monochromatische Parallelbündel. Wir lassen ein Parallelbündel monochromatischen Lichtes auf eine planparallele Platte auftreffen und beobachten im reflektierten Licht. Das Parallelbündel kann mittels einer sehr weit entfernten kleinen Lichtquelle oder einer ins Unendliche abgebildeten kleinen Lichtquelle weitgehend angenähert werden.

Wir variieren entweder den Einfallswinkel ε, indem wir die Platte drehen (Abb. 2.77), oder die Plattendicke d, indem wir den Abstand zweier Glasplatten ändern (Luftplatte, Abb. 2.78). Über die gesamte Plattendicke hinweg sind ε bzw. d konstant.

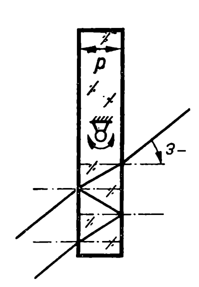


Abb. 2.77
Variation des Einfallswinkels an der planparallelen Platte

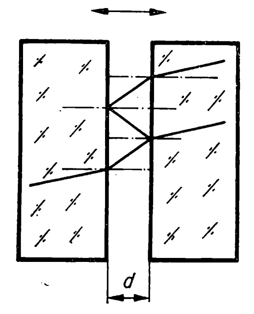


Abb. 2.78
Variation des Abstandes zweier paralleler Glasplatten

Mit wachsender Dicke oder mit abnehmendem Einfallswinkel werden nach Gl. (2.231) und (2.233) nacheinander Maxima und Minima steigender Ordnung durchlaufen. Die Platte erscheint also über ihre gesamte Fläche hinweg abwechselnd hell und dunkel.

Poly- und quasimonochromatisches Parallelbündel. Wir beobachten im reflektierten Licht und beleuchten mit einem polychromatischen Parallelbündel. Bei wachsender Plattendicke oder abnehmendem Einfallswinkel erscheint die Platte einheitlich in sich ändernden Interferenzfarben. Die Interferenzerscheinung durchläuft die Farben Gelb, Rot, Blau, Grün. Bei großen Plattendicken verblassen die Farben allmählich.

Wir erläutern das Entstehen der Interferenzfarben am Beispiel einer Platte veränderlicher Dicke. Es gelte

$$\varepsilon = 0, \quad \frac{n''}{n} = 1{,}5 \quad \text{und} \quad 400\,\text{nm} \leqq \lambda \leqq 760\,\text{nm}.$$

Nach Gl. (2.231) gilt für die Nullstellen der Intensität

$$d = \frac{k\lambda}{3}.$$

Bei $k = 0$ ist diese Gleichung unabhängig von λ erfüllt. Bei sehr kleinen Plattendicken ($d \leqq \lambda/3$) wird das gesamte Licht ausgelöscht. Die Platte erscheint dunkel.

Für $k = 1$ wird das Licht der kleinsten Wellenlänge $\lambda_1 = 400$ nm bei der Plattendicke

$$d_0 = \frac{\lambda_1}{3} = 133{,}33\,\text{nm}$$

ausgelöscht. Allgemein gilt

$$\frac{d}{d_0} = k\,\frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

Für $\lambda = 400$ nm, $\lambda/\lambda_1 = 1$, ist $d/d_0 = k$,
für $\lambda = 760$ nm, $\lambda/\lambda_1 = 1{,}9$, ist $d/d_0 = 1{,}9k$.

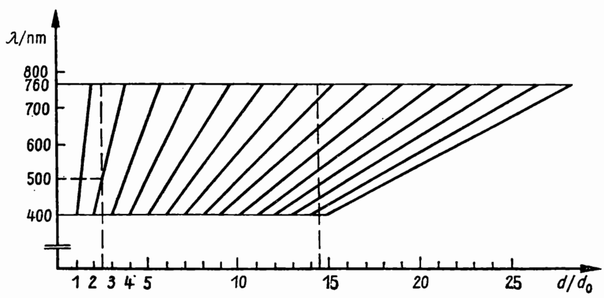


Abb. 2.79
Zur Auslöschung einzelner Wellenlängen bei wachsender Plattendicke

Die Funktion $d/d_0 = f(\lambda)$ ist in der Abb. 2.79 grafisch dargestellt. Bei kleinen Plattendicken wird bei jeder Plattendicke eine Wellenlänge, also eine Farbe, ausgelöscht ($d < 3d_0$). Die Platte erscheint in der zur ausgelöschten Farbe komplementären Farbe.

So wird z. B. bei $d = 2{,}5d_0$ die Wellenlänge $\lambda = 500$ nm (grünes Licht) in der zweiten Ordnung ausgelöscht, die Platte sieht rot aus.

Bei mittleren Plattendicken werden einige Farben in unterschiedlicher Ordnung ausgelöscht (Tab. 2.19). Die Platte erscheint in einer Interferenzfarbe, die aus der Mischung der übrigen Farben besteht. Ihre Sättigung nimmt dadurch ab. Mit

steigender Plattendicke werden immer mehr Farben in unterschiedlichen Ordnungen gleichzeitig ausgelöscht (Tab. 2.19). Die Folge davon ist, daß im gesamten Wellenlängenintervall eine Anzahl von schmalen Bereichen fehlt. Der Gesamteindruck wird mit steigender Anzahl solcher dunkler Linien im kontinuierlichen Spektrum „weißlicher", die Interferenzfarben verblassen immer stärker. Schließlich erhalten wir das sogenannte „Weiß höherer Ordnung". (Die Erscheinung ähnelt äußerlich den Fraunhoferschen Linien im Sonnenspektrum.)

Tabelle 2.19
Ausgelöschte Ordnungen bei verschiedenen Plattendicken

Ordnung	ausgelöschte Wellenlänge bei $d = 2{,}5d_0$ (in nm)	ausgelöschte Wellenlänge bei $d = 3{,}5d_0$ (in nm)	ausgelöschte Wellenlänge bei $d = 14{,}5d_0$ (in nm)
1			
2	500	700,00	
3		466,67	
4			
5			
6			
7			
8			725,00
9			644,44
10			580,00
11			527,27
12			483,33
13			446,15
14			414,29

Die geschilderte Farbänderung bei variabler Dicke kann an Ölschichten gut beobachtet werden. Bei der Ausbreitung des Öls sinkt die Schichtdicke, wobei erst die Farben dünner Plättchen auftreten und bei sehr geringen Dicken eine graue Oberfläche entsteht.

Auch die Anlaßfarben sind eine Folge der Interferenz an der wachsenden Oxidschicht.

Bei geringen örtlichen Dickenschwankungen treten die Interferenzfarben räumlich nebeneinander auf.

Die Interferenzerscheinung bei der Beleuchtung mit quasimonochromatischem Licht ist qualitativ derjenigen für polychromatisches Licht gleich. Infolge des kleineren Wellenlängenintervalls sind die Interferenzfarben in den höheren Ordnungen gesättigter und besser wahrzunehmen.

Haidingersche Ringe. Wir beleuchten eine planparallele Platte mit einer ausgedehnten Lichtquelle monochromatisch und bilden die Interferenzerscheinung in der Brennebene eines Fernrohrobjektivs ab (Abb. 2.80). Jeder Punkt der Lichtquelle sendet ein Strahlenbündel aus. Die Strahlen, die von verschiedenen Punkten der Lichtquelle ausgehen und dieselbe Richtung haben, werden vom Objektiv in

einem Punkt der Brennebene vereinigt. Da alle diese Strahlen denselben Einfallswinkel an der planparallelen Platte haben, bestehen zwischen den interferierenden Teilbündeln die gleichen Phasendifferenzen. Die Intensität im Punkt P′ folgt aus Gl. (2.228) oder Gl. (2.229). Die Phasendifferenz ist nach Gl. (2.217) einzusetzen.

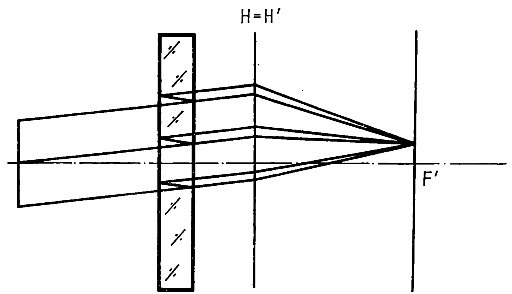


Abb. 2.80
Erzeugung Haidingerscher Ringe

Wegen der Rotationssymmetrie um die optische Achse sind die Kurven gleicher Intensität konzentrische Kreise in der Brennebene. Die Intensität ändert sich längs des Radius so, wie es in der Abb. 2.73 bzw. in der Abb. 2.76 dargestellt ist.

Jeder Kreis gleicher Intensität ist einem Einfallswinkel zugeordnet. Wir sprechen deshalb von Streifen gleicher Neigung oder Haidingerschen Ringen. Diese entstehen ohne optische Abbildung im Unendlichen. Sie sind daran erkennbar, daß sie bei einer Parallelverschiebung der Platte am gleichen Ort bleiben.

Bei Abweichungen von der Parallelität der Flächen sind die Kreise deformiert. Haidingersche Ringe sind deshalb ein empfindliches Kriterium zur Prüfung von planparallelen Platten.

Bei dicken Platten treten nur sehr hohe Ordnungen auf, so daß zahlreiche Ringe unter sehr kleinem Winkelabstand erscheinen. Das Interferenzbild wird durch das Auge ohne optische Hilfsmittel nicht aufgelöst. Außerdem kann auch bei zu großen Plattendicken die Kohärenzlänge des Lichtes zu klein sein, um Interferenzen entstehen zu lassen.

Wegen

$$0 \leqq \sin^2 \varepsilon \leqq 1 \tag{2.241}$$

gilt nach Gl. (2.235) für die Maxima im hindurchgelassenen Licht

$$\frac{2dn''}{\lambda n} \geqq k \geqq \frac{2d}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{n''}{n}\right)^2 - 1}. \tag{2.242}$$

Bei $\dfrac{n''}{n} = 1{,}5$, $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$, $d = 5\,\mathrm{mm}$ und $\sqrt{\left(\dfrac{n''}{n}\right)^2 - 1} \approx 1{,}1$ ergibt sich z. B.

$$30000 \geqq k \geqq 22000.$$

Aus Gl. (2.242) entnehmen wir, daß die Ordnung der Ringe nach außen hin abnimmt. In der Mitte ist die Ordnung also am größten, und die niedrigen Ordnungen sind nur bei dünnen Platten vorhanden.

2.5.4. Interferenzerscheinungen an keilförmigen Platten

Berechnung der Intensität. Wir beleuchten einen Keil mit einem Parallelbündel monochromatischen Lichtes. Der Einfallswinkel sei so gewählt, daß das an der ersten Fläche gebrochene Licht senkrecht auf die zweite Fläche auftrifft (Abb. 2.81). Das an der ersten und das an der zweiten Fläche reflektierte Teilbündel interferieren an der Keiloberfläche miteinander. Das Interferenzbild entsteht auf der Keiloberfläche.

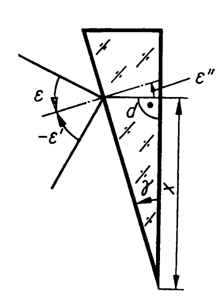


Abb. 2.81
Bündelteilung am Keil bei senkrechtem Lichteinfall an der zweiten Fläche

Für die komplexen Amplituden gilt:

An der ersten Fläche reflektiertes Licht (Phasensprung π beachten!) $\quad a' = -\alpha_1 A,$

an der ersten Fläche hindurchgegangenes Licht $\quad a'' = \sigma_1 A,$

an der zweiten Fläche reflektiertes Licht $\quad a_2' = \alpha_2 \sigma_1 A \, e^{j\frac{\delta}{2}},$

an der ersten Fläche hindurchgelassenes Licht $\quad a_1'' = \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 A \, e^{j\delta}.$

Entsprechend den Gleichungen (2.219), (2.201) und (2.202) ist

$$\alpha_1 = \sqrt{R_1}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{R_2}, \qquad \sigma_1 \sigma_2 = 1 - R_1$$

zu setzen. Die Intensität beträgt nach Gl. (2.117)

$$I' = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 c}{2} \left[R_1 A^2 + R_2 (1 - R_1)^2 A^2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\,(1 - R_1)\, A^2 \cos\delta\right]$$

bzw.

$$I' = I\left[R_1 + R_2(1 - R_1)^2 - 2\sqrt{R_1 R_2}\,(1 - R_1) \cos\delta\right]. \tag{2.243}$$

Für kleine Keilwinkel gilt $R_1 \approx R_2 = R$, $R \ll 1$ und

$$I' = 2IR(1 - \cos\delta). \tag{2.244}$$

Der optische Wegunterschied der Teilbündel beträgt

$$\Delta L = 2n''d, \tag{2.245}$$

woraus mit $d = x \sin \gamma$ und $n''/\lambda_0 = 1/\lambda''$ die Beziehung für die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda''} x \sin \gamma \tag{2.246}$$

hervorgeht.

Diskussion der Intensitätsbeziehung. Die Nullstellen der Intensität ergeben sich für

$$\cos \delta = 1, \quad \text{also} \quad \delta = 2k\pi.$$

Die dunklen Streifen verlaufen parallel zur Keilkante und haben von dieser die Entfernungen

$$x = \frac{k\lambda''}{2 \sin \gamma}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.247}$$

Abbildung 2.82 enthält die Funktion $I''/I = f(x)$ für $R = 0{,}05$.

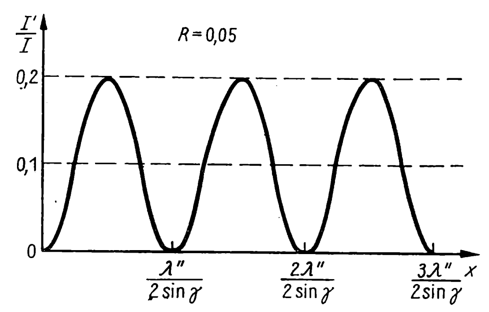


Abb. 2.82
Intensität bei der Interferenz am Keil

Das durch Amplitudenteilung am Keil entstehende Interferenzbild liegt im Endlichen. Die Streifen konstanter Intensität befinden sich an den Stellen konstanter Keildicke. Sie werden deshalb als Streifen gleicher Dicke bezeichnet. Beim Verschieben des Keils bewegen sich die Streifen mit.

Beim Beleuchten mit weißem Licht ist die Keilkante dunkel, denn nach Gl. (2.247) ist unabhängig von λ'' für $k = 0$ auch $x = 0$.

Die weiteren Streifen sind farbig. Es können aber nur wenige Streifen beobachtet werden, weil die Interferenzerscheinung mit der Entfernung von der Keilkante in das „Weiß höherer Ordnung" übergeht. Abbildung 2.79 ist sinngemäß auch auf den Keil anwendbar.

Beliebiger Einfallswinkel am Keil. Für einen Keil, an dessen Oberfläche das Licht nicht gebrochen wird (Abb. 2.83), ist bei beliebiger Lichteinfallsrichtung

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda} \cos (\varepsilon_1 + \gamma) \tag{2.248}$$

und

$$l_3 = -d \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \gamma}. \tag{2.249}$$

Für $\varepsilon_1 = -\gamma$ ist $\varepsilon_2 = 0$, das Interferenzbild liegt in der Keiloberfläche.

Für $|\varepsilon_1| < \gamma$, $\varepsilon_1 < 0$ ist $l_3 < d$, das Interferenzbild liegt unterhalb der Keiloberfläche (virtuelles Interferenzbild),

für $|\varepsilon_1| > \gamma$, $\varepsilon_1 < 0$ ist $l_3 > d$, das Interferenzbild liegt oberhalb der Keiloberfläche (reelles Interferenzbild).

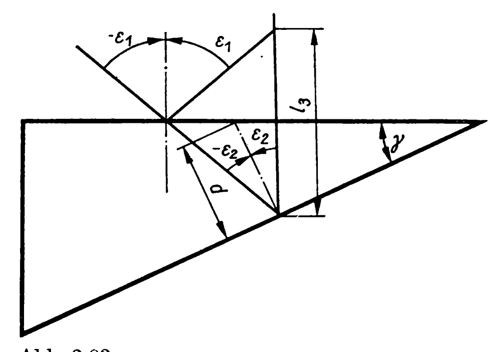


Abb. 2.83
Bündelteilung am Keil bei beliebigem Lichteinfall

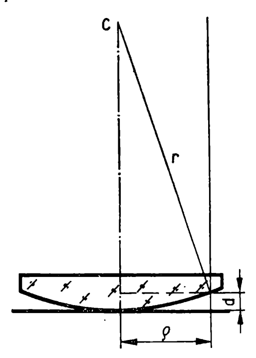


Abb. 2.84
Erzeugung Newtonscher Ringe

Newtonsche Ringe sind Streifen gleicher Dicke, die an rotationssymmetrischen keilförmigen Schichten entstehen. Wir legen eine Plankonvexlinse mit großem Krümmungsradius auf eine Planplatte (Abb. 2.84). Das an der konvexen Linsenfläche und das an der Oberseite der Planplatte reflektierte Licht kommen zur Interferenz.

Aus dem Pythagoreischen Lehrsatz folgt

$$r^2 = (r - d)^2 + \varrho^2.$$

Wir vernachlässigen d^2 und lösen nach d auf:

$$d = \frac{\varrho^2}{2r}. \tag{2.250}$$

Der optische Wegunterschied nach Gl. (2.245) beträgt

$$\Delta L = \frac{n''\varrho^2}{r}.$$

Daraus ergibt sich die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda''} \frac{\varrho^2}{r}. \tag{2.251}$$

Die dunklen Ringe, für die die Bedingung $\delta = 2k\pi$ gilt, haben die Radien

$$\varrho = \sqrt{k\lambda'' r}. \tag{2.252}$$

Je größer k ist, desto dichter liegen die Ringe. Bei weißem Licht sind nur etwa fünf farbige Ringsysteme zu beobachten.

Probegläser. Newtonsche Ringe, die an der Luftschicht zwischen einer polierten Linsenoberfläche und einem Probeglas entstehen, das den Sollradius enthält, dienen der Prüfung der Linse im Fertigungsprozeß. Die sogenannte „Passe", ein Maß für die Genauigkeit des Flächenradius, wird in Ringen angegeben. An der Form der Newtonschen Ringe, d. h. an den Abweichungen von deren Kreisförmigkeit, ist zusätzlich zu erkennen, welche Abweichungen von der Rotationssymmetrie vorliegen (Rundpasse, Sattelpaßfelder usw.).

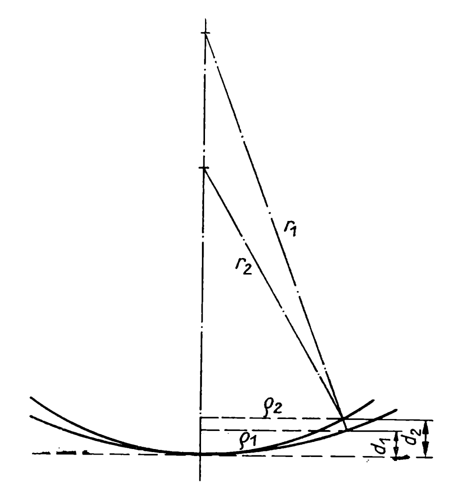


Abb. 2.85
Interferenz am Probeglas

Nach Abb. 2.85 ist näherungsweise ($\varrho_1 \approx \varrho_2$)

$$d_1 = \frac{\varrho^2}{2r_1}, \quad d_2 = \frac{\varrho^2}{2r_2},$$

also

$$d_2 - d_1 = \frac{\varrho^2}{2} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.$$

Darin kann $r_1 r_2 \approx r^2$ gesetzt werden, so daß

$$\Delta d = \frac{\varrho^2}{2r^2} \Delta r \tag{2.253}$$

ist. Für die Phasendifferenz gilt angenähert

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\varrho^2}{r^2} \Delta r. \tag{2.254}$$

Bei k dunklen Ringen auf der Linsenoberfläche mit dem Durchmesser $D = 2\varrho$ beträgt die Radienabweichung

$$\Delta r = \frac{4k\lambda r^2}{D^2}. \tag{2.255}$$

Beispiel: Für $r = 40$ mm, $D = 40$ mm, $\lambda = 500$ nm, $k = 2$ ist $\Delta r = 4\ \mu$m und $\Delta r/r = 10^{-4} \triangleq 0{,}1‰$.

Bei $k = 1$ ist $\Delta r = 2\ \mu$m, so daß für $\Delta r < 2\ \mu$m oder $\Delta r/r < 0{,}05‰$ keine Ringe mehr zu sehen sind („Nullpasse").

2.5.5. Weitere Interferenzerscheinungen

Zwei völlig gleichartige planparallele Platten seien parallel zueinander angeordnet. Das Licht soll zunächst von einer weit entfernten punktförmigen Lichtquelle ausgehen (Abb. 2.86). Die Brechung bringt keine Besonderheiten hervor, deshalb bleibt sie in der Abb. 2.86 unberücksichtigt. Außerdem wollen wir annehmen, daß nur das maximal zweimal reflektierte Licht von merklicher Intensität ist. Behandelt wird das hindurchgehende Licht, in dem vier Anteile mit zwei Reflexionen enthalten sind. Zwischen den Teilwellen mit den Amplituden A_1'' und A_4'' besteht eine

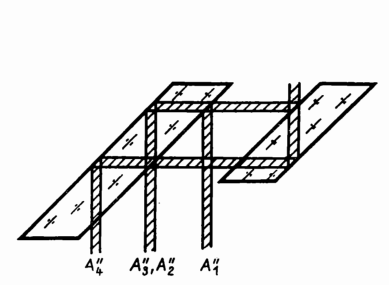


Abb. 2.86
Interferenz an zwei parallelen Platten

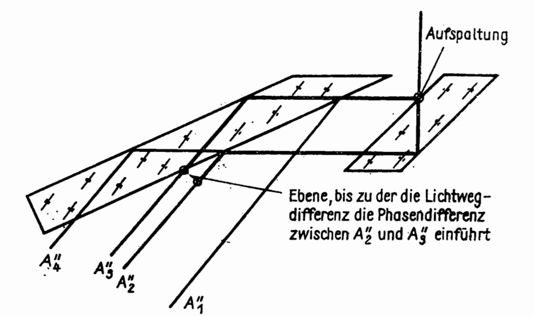


Abb. 2.87
Interferenz an zwei schräg zueinander stehenden Platten

sehr große Phasendifferenz; zwischen den Teilwellen mit den Amplituden A_2'' und A_3'' ist die Phasendifferenz Null. Diese Aussage ist unabhängig vom Einfallswinkel an der Platte, so daß die gesamten Anteile A_2'' und A_3'' zur maximalen Intensität interferieren. Die Anteile A_1'' und A_4'' geben wegen der großen Phasendifferenz keine beobachtbare Interferenzerscheinung. Dieselbe Interferenz tritt bei der Beleuchtung mit Parallelbündeln und mit ausgedehnten Lichtquellen ein.

Die Verhältnisse ändern sich, wenn zwischen den Platten ein kleiner Keilwinkel vorhanden ist (Abb. 2.87). Bei der Beleuchtung mit einem Parallelbündel besteht zwischen den Anteilen mit den Amplituden A_2'' und A_3'' eine konstante Phasendifferenz über die gesamte Anordnung hinweg. Es ergibt sich eine einheitliche Interferenzintensität, die aber nicht gleich der maximalen Intensität sein muß.

Bei der Beleuchtung mit einer punktförmigen Lichtquelle entstehen Interferenzstreifen im Unendlichen, die Brewsterschen Streifen. Der Abstand der Streifen beträgt

$$a = \frac{n\lambda}{2\gamma d} \tag{2.256}$$

(n = Brechzahl, γ = Keilwinkel, d = Plattendicke). Dieselbe Erscheinung läßt sich mit einer ausgedehnten Lichtquelle erreichen, deren Größe jedoch eingeschränkt sein muß, wenn der Interferenzkontrast eine ausreichende Größe haben soll.

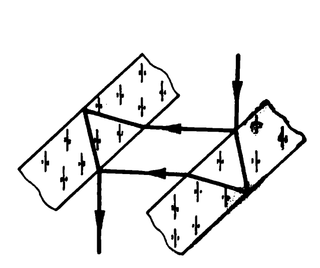


Abb. 2.88
Prinzip des Jaminschen Interferometers

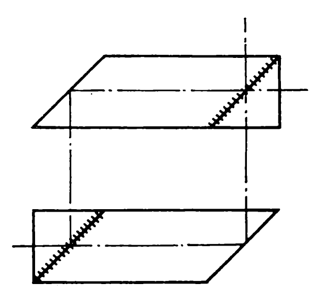


Abb. 2.89
Mach-Zehnder-Interferometer

Die Interferenz an zwei planparallelen Platten mit kleinem Keilwinkel wird im Jaminschen Interferometer angewendet, um zwei räumlich getrennte interferenzfähige Bündel zu erzeugen (Abb. 2.88). Werden z. B. in beide Teilbündel mit Luft gefüllte Küvetten eingebracht, so verschieben sich die Brewsterschen Streifen,

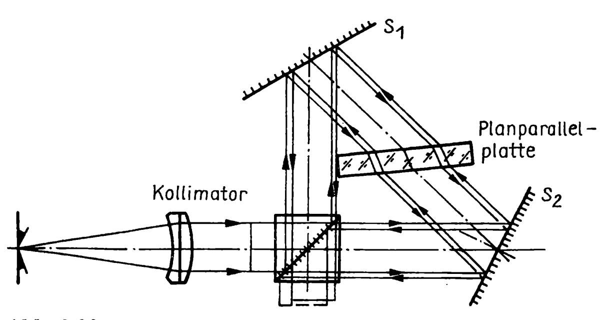


Abb. 2.90
Dreieckinterferometer

wenn der Luftdruck in einer Küvette geändert wird. Auf diese Weise ist die Druckabhängigkeit der Brechzahl in Luft meßbar.

In ähnlicher Art wirkt das Mach-Zehnder-Interferometer, bei dem eine noch größere Trennung der Teilbündel möglich ist als beim Jaminschen Interferometer. Abbildung 2.89 zeigt eine Ausführungsform mit Prismen (vgl. Abb. 2.52).

Shearinginterferometer führen eine Versetzung von zwei Teilwellen ein. Damit ist es möglich, eine deformierte Wellenfläche mit sich selbst zur Interferenz zu bringen. Abbildung 2.90 enthält das Optik-Schema einer Ausführungsform als Dreieckinterferometer. In der Abb. 2.91 wird die seitliche Aufspaltung durch Doppelbrechung erreicht. Zwischen Polarisator P und Analysator A befindet sich eine

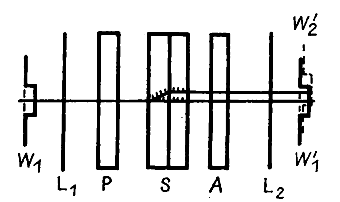


Abb. 2.91
Erzeugung von zwei versetzten Wellen mittels Savartscher Doppelplatte

Anordnung aus zwei planparallelen Platten eines optisch einachsigen Stoffes, die das Licht in zwei parallel versetzte Lichtbündel mit senkrecht zueinander stehenden Schwingungsrichtungen und der Phasendifferenz Null aufspaltet (Savartsche Doppelplatte). Der Analysator sorgt dafür, daß beide Wellen wieder gleiche Schwingungsebenen haben und damit interferieren können.

2.6. Beugung

2.6.1. Mathematische Fassung des Huygensschen Prinzips

Wir wenden das Huygenssche Prinzip an, um den Einfluß von Hindernissen auf die Lichtausbreitung zu untersuchen. In der Abb. 2.92 befindet sich die als punktförmig angenommene Lichtquelle in sehr großer Entfernung vor der Mitte des Spaltes. Auf den Spalt trifft eine ebene Welle auf. Wie sämtliche Punkte im Wellenfeld,

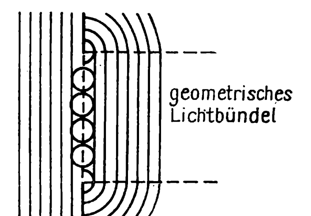


Abb. 2.92
Beugung am Spalt nach dem Huygensschen Prinzip

so senden auch die Punkte in der Spaltebene Elementarwellen aus. Hinter den Kanten werden jedoch die nach den Seiten laufenden Elementarwellen nicht ausgelöscht, weil von dort keine Elementarwellen entgegenkommen. Die Folge ist eine Ausbreitung des Lichtes in alle Richtungen hinter dem Spalt.

> Die Ausbreitung des Lichtes in den geometrischen Schatten hinter Hindernissen hinein wird als Beugung bezeichnet.

Als Folge der Beugung tritt eine makroskopisch beobachtbare Interferenzerscheinung auf. Das gesamte Licht innerhalb der Spaltöffnung stammt bei der Anordnung nach Abb. 2.92 von einer punktförmigen Lichtquelle und ist deshalb kohärent. In jede Richtung wird von jedem Punkt der Öffnung eine Welle gestrahlt. Die Gesamtheit aller Wellen einer Richtung interferiert miteinander; wegen der Parallelstrahlen einer Richtung allerdings erst in sehr großen Entfernungen vom Spalt. Das Interferenzbild läßt sich aber auch in der Brennebene einer Linse erzeugen.

Die Beschreibung der Beugung mit dem Huygensschen Prinzip in der bisher dargestellten Form hat nur qualitativen Charakter. Die Berechnung der Lichtintensitäten in den verschiedenen Richtungen hinter dem Spalt erfordert, daß wir das Huygenssche Prinzip mathematisch fassen. Zu diesem Zweck müssen wir einfache Annahmen über den Einfluß der beugenden Hindernisse auf die Lichtwelle treffen. Dies erkennen wir, wenn wir bedenken, daß z. B. eine periodische elektromagnetische Welle auf einem Metallschirm periodische Influenzladungen erzeugen würde, die zur Anregung einer neuen Welle werden könnten.

Wir nehmen folgende Aussagen als ausreichend an:

— Die Anwesenheit eines Schirms verändert die Lichtwelle in den Öffnungen des Schirmes nicht.
— Die Rückseite des Schirmes sendet keine Welle aus und beeinflußt die gebeugte Welle nicht.
— Der Schirm ist schwarz, so daß er kein Licht reflektiert.

Wir beschränken uns auf die Behandlung Fraunhoferscher Beugungserscheinungen. Diese entstehen bei einer Lichtquelle, die so weit vor dem Schirm steht, daß die Lichtwelle vor den beugenden Objekten als eben angesehen werden kann. Bei den Fresnelschen Beugungserscheinungen befindet sich die Lichtquelle im Endlichen.

Huygenssches Prinzip für Fraunhofersche Beugung. Wir berechnen die komplexe Amplitude des Lichtes, das sich in eine vorgegebene Richtung hinter dem Spalt ausbreitet. In der Theorie der Beugung ist es üblich, statt von der komplexen Amplitude von der Lichterregung zu sprechen.

Die Bezeichnungen gehen aus der Abb. 2.93 hervor. Der dargestellte Spalt soll zunächst senkrecht zur Zeichenebene sehr lang sein. Wir haben eine Wellenfläche AB vor dem Spalt eingezeichnet. Bis zu dieser ist die Phase über den gesamten Bündelquerschnitt konstant. Die Fläche CD stellt keine Wellenfläche dar. Von CD ab entstehen aber über den Bündelquerschnitt einer Richtung hinweg keine Phasenunterschiede mehr. Die Phasendifferenzen innerhalb eines gebeugten Bündels werden durch den unterschiedlichen optischen Weg zwischen der Wellenfläche AB und der Bezugsfläche CD hervorgerufen, den Teilbündel zurücklegen, welche durch verschiedene Längenelemente $d\xi$ der Öffnung gehen.

Der optische Wegunterschied eines beliebig herausgegriffenen Teilbündels zum Randbündel beträgt (Abb. 2.93)

$$\Delta L = n(l_0 + l - l_{00}). \tag{2.257}$$

Sind α_0 und α die Richtungskosinus der Wellen vor bzw. hinter dem Spalt, so gilt (d = Spaltbreite)

$$l_0 = \xi\alpha_0, \qquad l = (d - \xi)\,\alpha, \qquad l_{00} = \alpha d \tag{2.258}$$

und nach Gl. (2.257)

$$\Delta L = n\xi(\alpha_0 - \alpha). \tag{2.259}$$

Die Phasendifferenz beträgt

$$\Delta\delta = \frac{2\pi n\xi}{\lambda_0}(\alpha_0 - \alpha) \tag{2.260}$$

oder mit $\lambda_0/n = \lambda$

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\,\xi(\alpha_0 - \alpha). \tag{2.261}$$

Die komplexe Amplitude einer Teilwelle lautet mit Gl. (2.261)

$$a_\xi = A_\xi\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}\xi(\alpha_0 - \alpha)}. \tag{2.262}$$

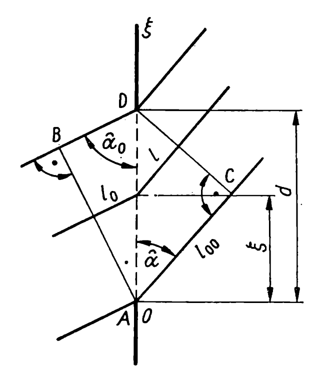


Abb. 2.93
Zur Berechnung der Phasendifferenzen

A kann als unabhängig von ξ angenommen werden, weil wir eine ebene Welle beugen und der Spalt völlig durchlässig sein soll.

Die durch Interferenz entstehende Gesamtlichterregung in einem sehr weit vom Schirm entfernten Aufpunkt ist die Summe der komplexen Einzelamplituden. Da wir jedoch stetig veränderliche Phasendifferenzen zwischen den Teilbündeln haben, ist die Summation durch eine Integration zu ersetzen. Sind mehrere Spalte im Schirm vorhanden, so muß über sämtliche Öffnungen integriert werden. Die Lichterregung folgt also aus

$$a = A \int\limits_{\text{Öffnungen}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}\xi(\alpha_0 - \alpha)}\, \mathrm{d}\xi. \tag{2.263}$$

Berücksichtigen wir, daß der Schirm eine Fläche darstellt, auf die die ebene Welle auftrifft, dann haben wir deren Richtung durch die Richtungskosinus gegenüber der

ξ- und der η-Achse zu beschreiben. Die Integration über den Schirm ergibt

$$a = A \iint\limits_{\text{Öffnungen}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}[\xi(\alpha_0-\alpha)+\eta(\beta_0-\beta)]}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{2.264}$$

Mit der aus Gl. (2.264) berechneten Lichterregung bilden wir aa^*. Dieses Absolutquadrat der komplexen Amplitude ist der Lichtintensität proportional.

Eine strenge Beugungstheorie hat von der Wellengleichung auszugehen. Für die elektrische Feldstärke lautet diese

$$\triangle \boldsymbol{E} = \frac{1}{c_0^2}\,\ddot{\boldsymbol{E}}.$$

Die Wellengleichung ist für die durch die Schirme vorgegebenen Randbedingungen zu lösen. Die Feldgrößen sind Vektoren, also müssen auch die Polarisationszustände von Einfluß auf die Beugung sein. Strenge Lösungen von Beugungsproblemen gibt es nur für wenige Spezialfälle der beugenden Objekte.

Für praktische Aufgaben reicht im allgemeinen die Annahme skalarer Wellen aus. Die skalare Wellengleichung

$$\triangle U = \frac{1}{c_0^2}\,\ddot{U}$$

(U ist eine skalare Feldgröße, z. B. eine Komponente der elektrischen Feldstärke) geht für eine zeitlich periodische Welle mit $U = u(x, y, z) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}\,ct\right)$ und $c/\lambda = c_0/\lambda_0$ über in

$$\triangle u + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,u = 0.$$

Die Berechnung der komplexen Amplitude $u_\mathrm{P} \equiv a$ in einem Aufpunkt P im Inneren einer geschlossenen Fläche mit beugenden Öffnungen führt auf ein Integral über die Fläche, auf der die komplexe Amplitude bekannt sein muß. Dieses Integral wird als Kirchhoffsche Beugungsformel bezeichnet. Für den Fall, daß die Entfernungen der Lichtquelle und des Aufpunktes sehr groß gegenüber den Abmessungen der beugenden Öffnungen sind (Fraunhofersche Beugung), geht die Kirchhoffsche Beugungsformel bis auf konstante Faktoren in die Gl. (2.264) über.

2.6.2. Fraunhofersche Beugung am Rechteck

Berechnung der normierten Intensität. Wir wenden die Gl. (2.264) auf die Beugung einer ebenen Welle an einer rechteckigen Öffnung an (Abb. 2.94). Wenn der Ursprung in der Mitte des Rechtecks mit den Kantenlängen l und b liegt, dann lautet Gl. (2.264):

$$a = A \int\limits_{-l/2}^{l/2} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{\lambda}[\xi(\alpha_0-\alpha)+\eta(\beta_0-\beta)]}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{2.265}$$

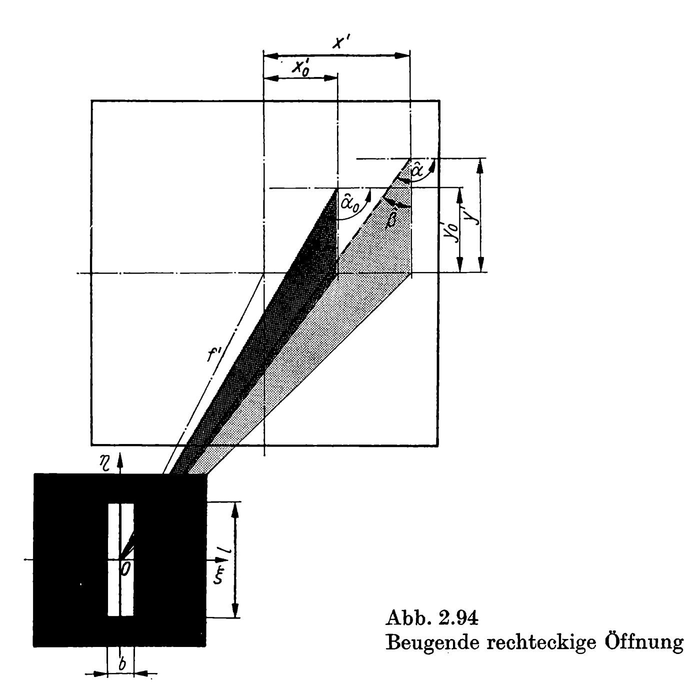


Abb. 2.94
Beugende rechteckige Öffnung

Die Integration ergibt

$$a = A\left(\frac{\lambda}{2\pi j}\right)^2 \frac{1}{(\alpha_0 - \alpha)\,(\beta_0 - \beta)} \left[e^{\frac{j\pi l}{\lambda}(\alpha_0-\alpha)} - e^{-\frac{j\pi l}{\lambda}(\alpha_0-\beta)}\right]$$

$$\times \left[e^{\frac{j\pi b}{\lambda}(\beta_0-\beta)} - e^{-\frac{j\pi b}{\lambda}(\beta_0-\beta)}\right]. \tag{2.266}$$

Mit $\exp(jx) - \exp(-jx) = 2j \sin x$ erhalten wir

$$a = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 A \frac{\sin\frac{\pi l}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha)}{\alpha_0 - \alpha} \frac{\sin\frac{\pi b}{\lambda}(\beta_0 - \beta)}{\beta_0 - \beta} \tag{2.267}$$

oder mit den Abkürzungen

$$\frac{\pi l}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha) = v, \quad \frac{\pi b}{\lambda}(\beta_0 - \beta) = w, \tag{2.268}$$

$$a = Alb \frac{\sin v}{v} \frac{\sin w}{w}. \tag{2.269}$$

Für das ungebeugte Licht ist $\alpha = \alpha_0$ und $\beta = \beta_0$. Wegen $\lim\limits_{v\to 0} (\sin v/v) = 1$ beträgt die Lichterregung

$$a_0 = Alb. \tag{2.270}$$

a und a_0 sind reell. Wir erhalten deshalb durch Division von a^2 nach Gl. (2.269) und a_0^2 nach Gl. (2.270), wobei der Proportionalitätsfaktor in der Formel für die Intensität wegfällt, die — auf die Intensität des ungebeugten Lichtes bezogene — normierte Intensität

$$i = \frac{a^2}{a_0^2} = \left[\frac{\sin v}{v} \frac{\sin w}{w}\right]^2. \tag{2.271}$$

Hinter dem Spalt ordnen wir eine Sammellinse an, in deren Brennebene die Interferenzerscheinung abgebildet wird (von Abbildungsfehlern sehen wir ab). Nach Abb. 2.95 ist ($\alpha = \cos \hat{\alpha}$):

$$\cot \hat{\alpha}_0 = \frac{x_0'}{f'}, \quad \cot \hat{\alpha} = \frac{x'}{f'}. \tag{2.272}$$

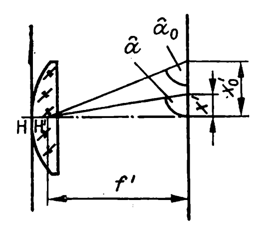


Abb. 2.95
Abbildung der Fraunhoferschen Beugungserscheinung

Für geringe Neigungen der einfallenden Lichtstrahlen gegenüber der Normalen auf der Schirmebene ist $\hat{\alpha}_0$ wenig verschieden von 90°. Das gebeugte Licht hat nur für Winkel in der Nähe von $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0$ merkliche Intensität, so daß bei $\hat{\alpha}_0 \approx 90°$ auch $\hat{\alpha}$ wenig von 90° abweichend angenommen werden darf. Wir können $\cot \hat{\alpha} \approx \cos \hat{\alpha} = \alpha$ und $\cot \hat{\alpha}_0 \approx \cos \hat{\alpha}_0 = \alpha_0$ setzen und erhalten

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{x_0' - x'}{f'}. \tag{2.273a}$$

Dieselbe Rechnung wiederholen wir für die y'-Richtung, wobei sich

$$\beta_0 - \beta = \frac{y_0' - y'}{f'} \tag{2.273b}$$

ergibt. Die Gl. (2.273) setzen wir in die Gl. (2.268) ein:

$$v = \frac{\pi l}{\lambda f'} (x_0' - x'), \qquad w = \frac{\pi b}{\lambda f'} (y_0' - y'). \tag{2.274a, b}$$

Diskussion der Beugungsintensität. Wir diskutieren die Gl. (2.271) für die normierte Intensität. Zunächst betrachten wir die Abhängigkeit der Intensität von x'. Die Funktion $f(v) = [(\sin v)/v]^2$ ist in der Abb. 2.96 grafisch dargestellt.

Nullstellen der Intensität erhalten wir für

$$v = \pm z\pi; \qquad z = 1, 2, 3 \ldots \tag{2.275}$$

Die Nullstellen der Intensität liegen also bei

$$x_0' - x' = \pm \frac{z\lambda f'}{l}. \tag{2.276}$$

Die Nebenmaxima bestimmen wir aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{\sin v}{v}\right) = \frac{v \cos v - \sin v}{v^2} = 0,$$

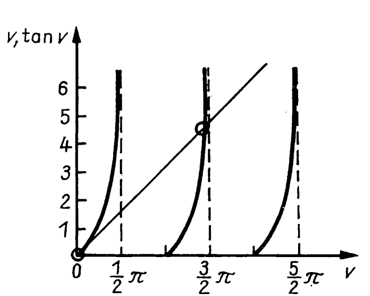


Abb. 2.97
Zur Lösung der Gleichung $\tan v_\mathrm{m} = v_\mathrm{m}$

Abb. 2.96
Normierte Intensität bei der Beugung am Spalt

woraus die Gleichung

$$\tan v_\mathrm{m} = v_\mathrm{m} \tag{2.277}$$

hervorgeht. Wir lösen Gl. (2.277) grafisch, indem wir die Funktion $\tan v$ mit der Geraden $v = v$ zum Schnitt bringen. Abbildung 2.97 läßt erkennen, daß die Nebenmaxima mit guter Näherung bei

$$v_\mathrm{m} = \pm(2z + 1)\frac{\pi}{2}; \quad z = 1, 2, 3 \ldots$$

liegen. Aus Gl. (2.274a) folgt

$$x_0' - x_\mathrm{m}' = \pm \frac{2z + 1}{2}\frac{\lambda f'}{l}. \tag{2.278}$$

Die Intensität in den Nebenmaxima beträgt

$$\dot{\imath}_\mathrm{m} = \left(\frac{\sin v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{m}}\right)^2 = \left(\frac{\sin v_\mathrm{m}}{\tan v_\mathrm{m}}\right)^2 = \cos^2 v_\mathrm{m}$$

oder

$$\dot{\imath}_\mathrm{m} = \frac{1}{1 + v_\mathrm{m}^2}. \tag{2.279}$$

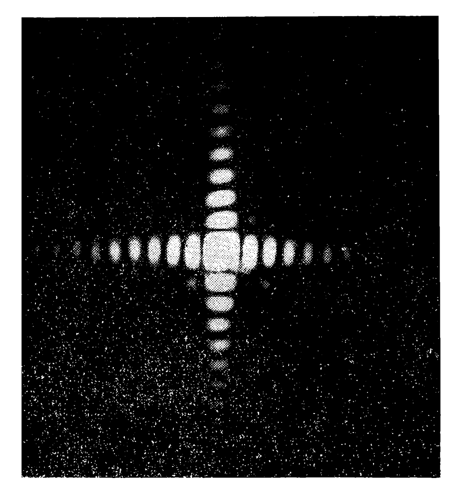
ı der Tab. 2.20 sind die grafisch ermit
ie normierten Intensitäten angegeben.
Für die y'-Richtung gelten die gleiche

$$y_0' - y' = \pm \frac{z\lambda f'}{b} \qquad \text{fü}$$

$$y_0' - y_m' = \pm \frac{2z+1}{2} \frac{\lambda f'}{b} \qquad \text{fü}$$

Tabelle 2.20
Nebenmaxima bei der Beugung am

$\frac{v_m}{\pi}$	$\frac{2z+1}{2}$	i_m
1,43	1,5	0,047
2,46	2,5	0,017
3,47	3,5	0,008
4,48	4,5	0,005



bb. 2.98
eugung am Quadrat

ʼas Interferenzbild bei der Beugung an
Die Interferenzstreifen einer Richtunᶃ
ichter beisammen, je länger die zugeo
palt ist die eine Kante sehr groß gege
nien der x'-Richtung gehen dann in de
ın einfaches Streifensystem (Abb. 2.99)

Sicherung der Kohärenz. Weißes Licht. Unsere bisherige Rechnung setzt voraus, daß das Licht, das von den einzelnen Spaltpunkten aus in eine Richtung gestrahlt wird, kohärent ist. Bei der Beleuchtung mit einer ausgedehnten Lichtquelle ist das Lichtbündel einer Beugungsrichtung in sich partiell-kohärent. Nach der Kohärenzbedingung Gl. (2.181) für unendlich ferne Lichtquellen muß

$$b \tan w \ll \frac{\lambda}{2}$$

sein. Bei einer vorgegebenen Winkelgröße $2w$ der Lichtquelle darf der Spalt nicht breiter sein als es nach

$$b \ll \frac{\lambda}{2 \tan w} \tag{2.282}$$

zulässig ist. Die Sonne z. B. hat die Winkelgröße 32'. Es ist $\tan w = 0{,}004654$ und bei einer Wellenlänge von $\lambda = 500$ nm

$$b \ll \frac{5{,}0 \cdot 10^{-4}}{9{,}3 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}05 \text{ mm}.$$

Nur mit einem Spalt, dessen Breite klein gegen 0,05 mm ist, kann die Beugung des Sonnenlichtes an einem Spalt direkt beobachtet werden.

Experimentell läßt sich die Fraunhofersche Beugung am Spalt nur untersuchen, wenn auch zur Beleuchtung ein Spalt verwendet wird, der parallel zum beugenden Spalt steht und der die notwendige Kohärenz sichert.

Die Gleichungen (2.276) und (2.278) enthalten die Wellenlänge des Lichtes. Sie gelten also zunächst nur für monochromatisches Licht. Bei einer polychromatisch (z. B. weiß) strahlenden Lichtquelle ist Gl. (2.276) für jede Wellenlänge gesondert anzuwenden. Das ungebeugte Licht bleibt polychromatisch wie das einfallende Licht. Die Interferenzstreifen werden jedoch farbig. Es entstehen dabei keine Spektralfarben, sondern Mischfarben. Diese kommen folgendermaßen zustande:

Wegen der Proportionalität von x' und λ nach Gl. (2.276) werden die Spektralfarben innerhalb jeder Ordnung in der Reihenfolge blau, grün, gelb und rot ausgelöscht. Die übrigbleibenden Farben mischen sich zur Komplementärfarbe der ausgelöschten Farbe. Die Streifen niedriger Ordnung erscheinen in der Reihenfolge gelb, rot, blau und grün gefärbt. Die Streifen höherer Ordnung sind nicht zu sehen, weil sich die Farben wieder zu einem Weiß mischen, in dem eine gewisse Anzahl ganz schmaler Wellenlängenbereiche fehlen („Weiß höherer Ordnung“).

2.6.3. Fraunhofersche Beugung am Kreis

Abbildung 2.100 zeigt einen Schirm mit einer kreisförmigen Öffnung (Durchmesser $2\varrho_{\mathrm{m}}$). Die einfallende Lichtwelle sei eben. Das in eine Richtung gebeugte Licht soll durch eine dicht hinter dem Schirm stehende Sammellinse (in Abb. 2.100 nicht eingezeichnet) in einen Punkt der x'-y'-Ebene fokussiert werden. In der Schirmebene

werden Polarkoordinaten mittels

$$\xi = \varrho \cos \varphi, \quad \eta = \varrho \sin \varphi \tag{2.283}$$

eingeführt. In der Brennebene der Linse soll der Ursprung mit dem Bildpunkt des ungebeugten Lichtes zusammenfallen. Es ist deshalb

$$x' - x_0' = r' \cos \vartheta, \quad y' - y_0' = r' \sin \vartheta \tag{2.284}$$

zu setzen. Außerdem gelten die Beziehungen

$$\cot \hat{\alpha} = \frac{x'}{f'}, \quad \cot \hat{\alpha}_0 = \frac{x_0'}{f'}, \quad \cot \hat{\beta} = \frac{y'}{f'}, \quad \cot \hat{\beta}_0 = \frac{y_0'}{f'}. \tag{2.285}$$

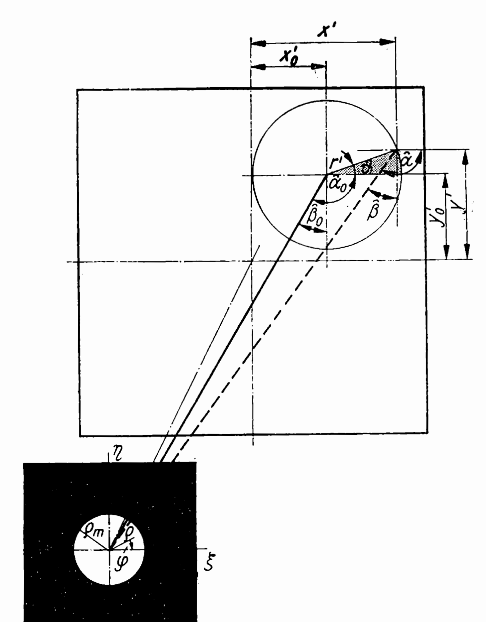


Abb. 2.100
Beugende kreisförmige Öffnung

Daraus ergeben sich wegen $\cot \hat{\alpha} \approx \cos \hat{\alpha} = \alpha$ für Winkel in der Nähe von 90° die Gleichungen

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{x_0' - x'}{f'} \quad \text{und} \quad \beta_0 - \beta = \frac{y_0' - y'}{f'}. \tag{2.286}$$

Mit den Gleichungen (2.283), (2.284) und (2.286) erhalten wir

$$\xi(\alpha_0 - \alpha) + \eta(\beta_0 - \beta) = -\frac{\varrho r'}{f'} (\cos \vartheta \cdot \cos \varphi + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi)$$

oder

$$\xi(\alpha_0 - \alpha) + \eta(\beta_0 - \beta) = -\frac{\varrho r'}{f'} \cos (\vartheta - \varphi). \tag{2.287}$$

Gleichung (2.287) setzen wir in das Integral von Gl. (2.264) ein. Das Flächenelement lautet in Polarkoordinaten

$$\mathrm{d}A = \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi . \tag{2.288}$$

Die Integrationsgrenzen sind:

$$0 \leqq \varrho \leqq \varrho_\mathrm{m} \quad \text{und} \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi . \tag{2.289}$$

Wir erhalten mit den Gleichungen (2.287) bis (2.289) aus der Gl. (2.264)

$$a = A \int_0^{\varrho_\mathrm{m}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{j} \varrho r'}{\lambda f'} \cos(\delta - \varphi)} \, \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi . \tag{2.290}$$

Das Integral über $\mathrm{d}\varphi$ berechnen wir mit der Formel (siehe z. B. [7])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x \cos\varphi} \, \mathrm{d}\varphi = J_0(x) . \tag{2.291}$$

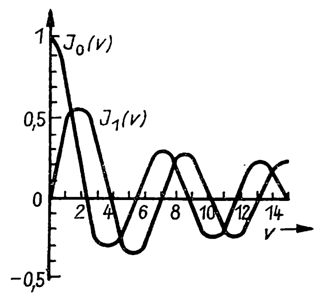


Abb. 2.101
Grafische Darstellung der Zylinderfunktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$

$J_0(x)$ ist die Zylinderfunktion erster Art der nullten Ordnung. $J_0(x)$ und die in der weiteren Rechnung benötigte Funktion $J_1(x)$ sind in der Abb. 2.101 grafisch dargestellt. Der Vergleich von Gl. (2.290) und Gl. (2.291) zeigt, daß

$$x = \frac{2\pi \varrho r'}{\lambda f'} \tag{2.292}$$

zu setzen ist. Es bleibt

$$a = 2\pi A \int_0^{\varrho_\mathrm{m}} J_0 \left(\frac{2\pi \varrho r'}{\lambda f'} \right) \varrho \, \mathrm{d}\varrho \tag{2.293}$$

zu berechnen. Dazu dient nach [7] die Formel

$$\int_0^x J_0(x) \, x \, \mathrm{d}x = x J_1(x) . \tag{2.294}$$

Wir führen in der Gl. (2.293) wieder die Substitution

$$x = \frac{2\pi\varrho r'}{\lambda f'}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\pi r'}{\lambda f'}\,\mathrm{d}\varrho, \quad 0 \leqq x \leqq \frac{2\pi\varrho_\mathrm{m} r'}{\lambda f'} \tag{2.295}$$

durch und berechnen

$$a = \frac{\lambda^2 f'^2 A}{2\pi r'^2} \int\limits_0^{\frac{2\pi\varrho_\mathrm{m} r'}{\lambda f'}} J_0(x)\, x\, \mathrm{d}x. \tag{2.296}$$

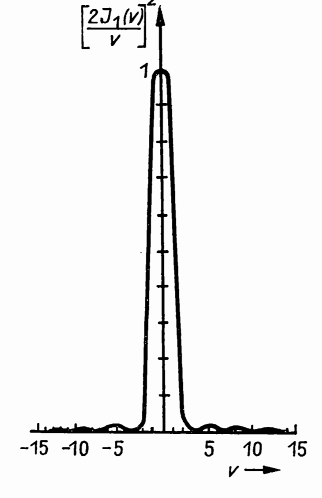


Abb. 2.102
Normierte Intensität bei der Beugung am Kreis

Wir erhalten mit Gl. (2.294) und der Abkürzung

$$v = \frac{2\pi\varrho_\mathrm{m} r'}{\lambda f'} \tag{2.297}$$

das Ergebnis

$$a = 2\pi\varrho_m^2 A\,\frac{J_1(v)}{v}. \tag{2.298}$$

Für das ungebeugte Licht ergibt das Integral in Gl. (2.290) wegen $r' = 0$ unmittelbar die Fläche der beugenden Öffnung, für die Lichterregung also

$$a_0 = \pi\varrho_m^2 A. \tag{2.299}$$

Die normierte Intensität in der Brennebene der Linse beträgt

$$i = \frac{a^2}{a_0^2} = \left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2. \tag{2.300}$$

Die normierte Intensität hängt über v nur vom Radius r' in der Brennebene der Linse ab; sie ist also auf Kreisen konstant. Das Interferenzbild besteht aus konzen-

trischen Kreisen um den Punkt x_0', y_0'. Die Funktion nach Gl. (2.300) ist in der Abb. 2.102 dargestellt. Wir diskutieren Gl. (2.300).

Die Nullstellen liegen auf Kreisen, deren Radien aus $J_1(v_n) = 0$ folgen. Diese Nullstellen entnehmen wir einer Tafel (siehe [7]). Aus Gl. (2.297) ergeben sich dann die Radien, die in die Tab. 2.21 eingetragen sind.

Die Nebenmaxima berechnen wir mit Hilfe der Formel (vgl. [7])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right] = -\frac{2J_2(v)}{v}. \tag{2.301}$$

Tabelle 2.21
Nullstellen der Intensität bei derBeugung am Kreis

n	v_n	$\frac{r'\varrho_m}{f'\lambda}$
1	3,832	0,6098
2	7,016	1,117
3	10,173	1,619
4	13,324	2,121

Tabelle 2.22
Nebenmaxima bei der Beugung am Kreis

m	v_m	$\frac{r'\varrho_m}{f'\lambda}$	i_m
1	5,135	0,817	0,0175
2	8,417	1,340	0,00415
3	11,620	1,849	0,00160
4	14,796	2,355	0,00078

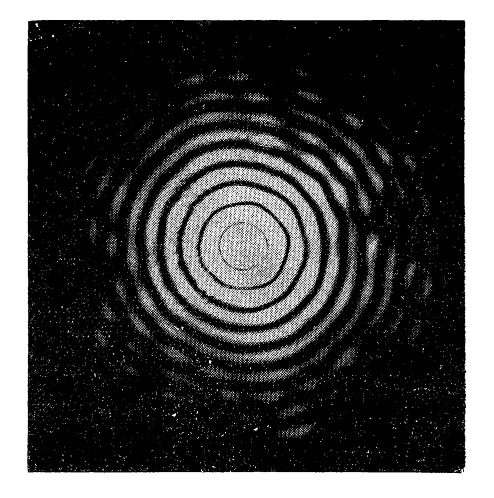


Abb. 2.103
Beugung an der kreisförmigen Öffnung

Die Lage der Nebenmaxima folgt aus $J_2(v_m) = 0$. Tabelle 2.22 enthält die aus [7] entnommenen Werte für v_m sowie die nach Gl. (2.300) berechneten normierten Intensitäten i_m. Wir erkennen, daß die Nebenmaxima noch lichtschwächer als bei der Beugung am Rechteck sind.

Die Ausführungen über die Kohärenzbedingung und über die Beugung von weißem Licht im Abschnitt 2.6.2. gelten sinngemäß auch für kreisförmige Öffnungen. Abbildung 2.103 zeigt die fotografische Aufnahme der Beugungserscheinung an der kreisförmigen Öffnung.

2.6.4. Beugung am Liniengitter

Wir untersuchen die Beugung an einer ebenen Struktur, die sowohl den Betrag als auch die Phase der komplexen Amplitude als Funktion des Ortes verändert. Die einfallende Welle sei eben und habe den Betrag der Amplitude A. Die Struktur hat eine vom Ort abhängige Durchlässigkeit, so daß der Betrag der Amplitude hinter der Struktur $A(\xi, \eta)$ ist. Auch die Phase des Lichtes ist hinter der Struktur verändert. Sie hängt aus zwei Gründen vom Ort ab.

— Durch die Beugung wird eine Phasendifferenz über den Bündelquerschnitt einer Richtung hinweg eingeführt. Sie hat analog zu Gl. (2.261) den Betrag

$$\Delta\delta_B = \frac{2\pi}{\lambda}\,[\xi(\alpha_0 - \alpha) + \eta(\beta_0 - \beta)]. \tag{2.302}$$

— Es kann auch innerhalb der Struktur eine Phasenänderung

$$\delta = \delta(\xi, \eta) \tag{2.303}$$

entstehen.

Mit Gl. (2.302) und Gl. (2.303) erhalten wir für die komplexe Amplitude hinter der Struktur

$$a_{\xi,\eta} = A\sigma(\xi, \eta) \cdot e^{j\delta(\xi,\eta)} \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}[\xi(\alpha_0-\alpha)+\eta(\beta_0-\beta)]}. \tag{2.304}$$

Für den Anteil, der den Einfluß der beugenden Struktur widerspiegelt, führen wir die Abkürzung

$$f(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta)\, e^{j\delta(\xi,\eta)} \tag{2.305}$$

ein. Bei $\sigma = 1$ ist

$$f(\xi, \eta) = e^{j\delta(\xi,\eta)}, \tag{2.306}$$

es liegt eine reine Phasenstruktur vor. Bei $\delta = 0$ wird

$$f(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta), \tag{2.307}$$

und es liegt eine reine Amplitudenstruktur vor.

Die Lichterregung erhalten wir, wenn wir nach dem Vorbild der Ableitung von Gl. (2.264) das Huygenssche Prinzip anwenden und $a_{\xi,\eta}$ nach Gl. (2.264) über die Fläche der Struktur integrieren. Es ist also

$$a = A \iint f(\xi, \eta) \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}[\xi(\alpha_0-\alpha)+\eta(\beta_0-\beta)]}\, d\xi\, d\eta. \tag{2.308}$$

Wir spezialisieren Gl. (2.308) für ein ebenes Liniengitter (Abb. 2.104). Dieses stellt eine eindimensionale periodische Struktur dar, d. h., die Strukturfunktion hängt nur von einer Variablen ab und ist in dieser periodisch.

Ein Liniengitter entsteht z. B., wenn mit einem Diamanten in gleichen Abständen Linien auf eine Glasplatte geritzt werden. Für die Strukturfunktion eines Liniengitters schreiben wir

$$f(\xi, \eta) = f(\xi) = \sigma(\xi) \cdot e^{j\delta(\xi)}. \tag{2.309}$$

Die Periode g ist der Abstand homologer Gitterstellen, den wir Gitterkonstante nennen.

Die Periodizität der Funktion $f(\xi)$ drückt sich in der Gleichung

$$f(\xi + kg) = f(\xi), \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2.310}$$

aus. Die Linien sollen die Länge l haben; die Gesamtlinienanzahl sei N. Das Koordinatensystem legen wir so, wie es in die Abb. 2.104 eingezeichnet ist. Damit geht Gl. (2.308) über in

$$a = A \int_0^{Ng} \int_{-(l/2)}^{l/2} f(\xi) \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}[\xi(\alpha_0 - \alpha) + \eta(\beta_0 - \beta)]} \, d\xi \, d\eta. \tag{2.311}$$

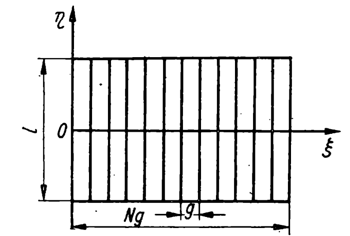


Abb. 2.104
Ebenes Liniengitter

Die Integration über $d\eta$ ist ohne Kenntnis der Funktion $f(\xi)$ ausführbar und ergibt

$$\int_{-(l/2)}^{-l/2} e^{\frac{2\pi j}{\lambda}\eta(\beta_0 - \beta)} \, d\eta = \frac{l \sin L}{L}. \tag{2.312}$$

Die Funktion $(\sin L)/L$ mit der Abkürzung $L = \pi l(\beta_0 - \beta)/\lambda$ hat nach Tab. 2.20 nur merklich von Null verschiedene Werte, wenn

$$\frac{\pi l}{\lambda}(\beta_0 - \beta) \ll \pi, \qquad \text{also} \qquad \beta_0 - \beta \ll \frac{\lambda}{l} \tag{2.313}$$

ist. Die rechte Seite der Ungleichung (2.313) ist sehr klein (bei $l = 20$ mm und $\lambda = 400$ nm ist $\lambda/l = 2 \cdot 10^{-5}$), so daß nahezu

$$\beta_0 = \beta \tag{2.314}$$

sein muß und das Integral (2.312) durch l ersetzt werden kann.

> Ein Liniengitter erzeugt eine Intensitätsverteilung, die in Richtung der Gitterstriche schmal ist.

Mit Gl. (2.312) und $(\sin L)/L \approx 1$ geht Gl. (2.311) über in

$$a = Al \int_0^{Ng} f(\xi) \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}\xi(\alpha_0 - \alpha)} \, d\xi. \tag{2.315}$$

Die explizite Integration über $d\xi$ setzt die Kenntnis der Funktion $f(\xi)$ voraus. Wir können aber die Rechnung noch allgemein weiterführen, wenn wir die Periodizität dieser Funktion berücksichtigen. Wir stellen das Integral (2.315) als Summe über die einzelnen Furchen, d. h. über die einzelnen Periodizitätsbereiche, dar. Wir setzen also

$$a = Al \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kg}^{(k+1)g} f(\xi) \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda} \xi (\alpha_0 - \alpha)} \, d\xi. \tag{2.316}$$

Die Integrale werden unabhängig von dem Parameter k, wenn wir mittels

$$\xi = (k + \varkappa)\, g \tag{2.317}$$

die neue Variable $\varkappa$ einführen. Wir erhalten

$$d\xi = g\, d\varkappa, \quad 0 \leqq \varkappa \leqq 1, \tag{2.318}$$

und wegen der Periodizität

$$f(\xi) = f(kg + \varkappa g) = f(\varkappa g). \tag{2.319}$$

Mit den Gl. (2.317···2.319) formen wir Gl. (2.316) um in

$$a = Agl \int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{\frac{2\pi j \varkappa g}{\lambda} (\alpha_0 - \alpha)} \, d\varkappa \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi j k g}{\lambda} (\alpha_0 - \alpha)}. \tag{2.320}$$

Da nur $\varkappa$ variabel ist, schreiben wir im folgenden statt $f(\varkappa g)$ stets $f(\varkappa)$. Zur Abkürzung setzen wir

$$w = \frac{\pi g}{\lambda} (\alpha_0 - \alpha) \tag{2.321}$$

und erhalten

$$a = Agl \int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{2j\varkappa w} \, d\varkappa \sum_{k=0}^{N-1} e^{2jkw}. \tag{2.322}$$

Die Summe stellt eine geometrische Reihe mit N Gliedern dar. Wir summieren, wodurch Gl. (2.322) in

$$a = Agl \frac{1 - e^{2jNw}}{1 - e^{2jw}} \int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{2j\varkappa w} \, d\varkappa \tag{2.323}$$

übergeht.

Für das ungebeugte Licht ist $\alpha = \alpha_0$ und damit $w = 0$. Nach der Regel von DE L'HOSPITAL bilden wir den Grenzwert

$$\lim_{w \to 0} \frac{1 - e^{2jNw}}{1 - e^{2jw}} = \lim_{w \to 0} \frac{-2jN \cdot e^{2jNw}}{-2j \cdot e^{2jw}} = N. \tag{2.324}$$

Aus Gl. (2.323) folgt

$$a_0 = AglN \int_0^1 f(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa. \tag{2.325}$$

Für die normierte Intensität ergibt sich aus Gl. (2.323) und Gl. (2.325)

$$i = \frac{aa^*}{a_0a_0^*} = \left| \frac{\int_0^1 f(\varkappa) \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\varkappa w}\,\mathrm{d}\varkappa}{\int_0^1 f(\varkappa)\,\mathrm{d}\varkappa} \right|^2 \left[\frac{\sin Nw}{N \sin w}\right]^2. \tag{2.326}$$

Wir untersuchen den Faktor $[(\sin Nw)/(N \sin w)]^2$.

1. Wegen der Gesamtlinienanzahl N im Nenner, die bei Beugungsgittern sehr groß ist (z. B. kann sie $N = 10^5$ betragen), erhalten wir nur merklich von Null verschiedene Werte, wenn $\sin w$ in der Nähe von Null liegt, also $w \approx m\pi$ ist. Der Grenzwert für $w = m\pi$ folgt aus

$$\lim_{w \to m\pi} \left[\frac{\sin Nw}{N \sin w}\right]^2 = \lim_{w \to m\pi} \left[\frac{N \cos Nw}{N \cos w}\right]^2 = 1. \tag{2.327}$$

Die Hauptmaxima der normierten Intensität liegen also bei

$$w = m\pi. \tag{2.328}$$

Nach Gl. (2.321) gilt für die Richtungen, in die die Hauptmaxima fallen,

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{m\lambda}{g}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm\, 3, \ldots \tag{2.329}$$

2. Zwischen den Hauptmaxima liegen Nullstellen der Intensität bei

$$Nw = z\pi, \tag{2.330}$$

also in den Richtungen

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{z\lambda}{Ng}, \quad z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm (N-1). \tag{2.331}$$

3. Nebenmaxima erhalten wir zwischen den Nullstellen. Ihre Lage folgt aus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left[\frac{\sin Nw}{N \sin w}\right] = \frac{N^2 \cos Nw \sin w - N \sin Nw \cos w}{N^2 \sin^2 w} = 0$$

oder

$$N \tan w_m = \tan Nw_m. \tag{2.332}$$

Diese transzendente Gleichung hat bei großem N fast genau die Lösungen $w_m = (2z + 1)\,\pi/2N$, so daß für die Nebenmaxima

$$\alpha_0 - \alpha = \pm \frac{(2z + 1)\,\lambda}{2Ng}, \quad z = 1, 2, 3, \ldots, (N - 2) \tag{2.333}$$

gilt.

Die Nebenmaxima sind sehr lichtschwach. Die normierte Intensität beträgt in ihnen nur etwa $i = 1/N^2$. Wir können sie im allgemeinen vernachlässigen.

Da der Faktor $[(\sin Nw)/(N \sin w)]^2$ nur für $w = m\pi$ wesentlich ungleich Null ist, brauchen wir auch nur die Intensität für diese Werte des Arguments weiter zu untersuchen. Nach Gl. (2.326) beträgt die normierte Intensität in den Hauptmaxima

$$i_m = \left| \frac{\int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{2\pi j m \varkappa} \, d\varkappa}{\int_0^1 f(\varkappa) \, d\varkappa} \right|^2 . \tag{2.334}$$

Aus der Periodizität des Gitters folgt, daß nur in bestimmte Richtungen Licht merklicher Intensität gebeugt wird. Der Betrag dieser Intensität ist von der speziellen Strukturfunktion $f(\varkappa)$ abhängig.

$f(\varkappa)$ stellt eine Funktion dar, deren periodische Fortsetzung die Strukturfunktion (2.319) bildet. Wir können sie in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$f(\varkappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, e^{-2\pi j n \varkappa}. \tag{2.335}$$

Multiplikation mit $\exp(2\pi j m \varkappa)$ und Integration über $d\varkappa$ von Null bis Eins ergibt

$$\int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{2\pi j m \varkappa} \, d\varkappa = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^1 e^{2\pi j \varkappa (m-n)} \, d\varkappa. \tag{2.336}$$

Da m und n ganzzahlig sind und auf der rechten Seite von Gl. (2.336) über eine Periode der Funktion $\exp[2\pi j \varkappa (m - n)]$ integriert wird, erhalten wir

$$\int_0^1 e^{2\pi j \varkappa (m-n)} \, d\varkappa = \delta_{mn}. \tag{2.337}$$

δ_{mn} ist das Kronecker-Symbol. Auf der rechten Seite von Gl. (2.336) bleibt nur der Summand mit $m = n$ übrig, und wir finden

$$a_m = \int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{2\pi j m \varkappa} \, d\varkappa. \tag{2.338}$$

Für $m = 0$ ist speziell

$$a_0 = \int_0^1 f(\varkappa) \, d\varkappa. \tag{2.339}$$

Gl. (2.338) und Gl. (2.339) setzen wir in Gl. (2.334) ein. Die normierte Intensität in den Hauptmaxima beträgt

$$i_m = \left| \frac{a_m}{a_0} \right|^2 . \tag{2.340}$$

Das Ergebnis fassen wir zusammen:

> Die normierte Intensität hat bei der Beugung am Liniengitter nur für die einzelnen Ordnungen wesentliche Werte. Dafür ist allein die Periodizität des Gitters verantwortlich. Der Betrag der normierten Intensität ist das Absolutquadrat der auf a_0 bezogenen Fourier-Koeffizienten der Strukturfunktion $f(\varkappa)$.
> a_0 ist der Mittelwert der Strukturfunktion über eine Periode.

Sind einzelne Ordnungen in der Fourier-Entwicklung der Strukturfunktion nicht enthalten, dann fehlen sie auch im Spektrum des Gitters.

Als Beispiel betrachten wir ein reines Amplitudengitter mit „kastenförmiger" Durchlässigkeit. Es sei (Abb. 2.105):

$$f(\varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0, \\ 0 & \text{für} \quad \varkappa_0 \leqq \varkappa \leqq 1. \end{cases} \tag{2.341}$$

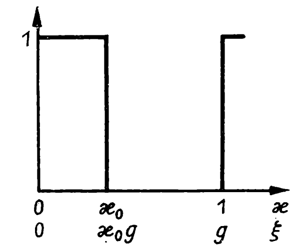


Abb. 2.105
Strukturfunktion des Amplitudengitters mit „kastenförmiger" Durchlässigkeit

Aus Gl. (2.339) folgt

$$a_0 = \int_0^{\varkappa_0} \mathrm{d}\varkappa = \varkappa_0 \tag{2.342}$$

und aus Gl. (2.338)

$$a_m = \int_0^{\varkappa_0} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} m \varkappa} \, \mathrm{d}\varkappa = \frac{1}{2\pi \mathrm{j} m} \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} m \varkappa_0} - 1\right). \tag{2.343}$$

Damit wird die normierte Intensität nach Gl. (2.340)

$$i_m = \frac{a_m a_m^*}{a_0^2} = \left[\frac{\sin \pi m \varkappa_0}{\pi m \varkappa_0}\right]^2. \tag{2.344}$$

Die normierte Intensität nimmt mit der Ordnung der Maxima ab (Abb. 2.106). Wenn für eine Ordnung die Gleichung

$$\pi m \varkappa_0 = k\pi, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{2.345}$$

erfüllt ist, dann fällt sie aus. Aus Gl. (2.345) folgt

$$\varkappa_0 = \frac{k}{m}, \tag{2.346}$$

so daß $\varkappa_0$ ein echter Bruch sein muß. (Es ist zu beachten, daß k und m ganzzahlig und $\varkappa_0 < 1$ ist.) Beispielsweise fehlen bei $\varkappa_0 = 0{,}5$ die geraden Ordnungen im Spektrum (Abb. 2.107).

Die Gl. (2.329) für die Richtungen der Hauptmaxima enthält die Wellenlänge des Lichtes. Ein Beugungsgitter erzeugt deshalb ein Spektrum, wenn weißes Licht ge-

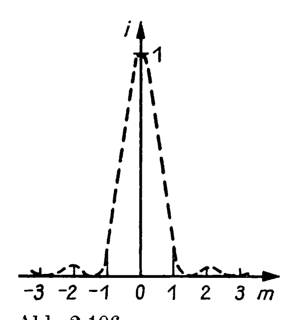


Abb. 2.106
Normierte Intensität in den Ordnungen (Strukturfunktion nach Abb. 2.105)

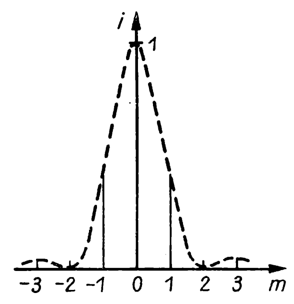


Abb. 2.107
Ausfall der geraden Ordnungen ($\varkappa_0 = 0{,}5$)

beugt wird. Nur die nullte Ordnung ist weiß. Der Richtungskosinus des gebeugten Lichtes ist der Wellenlänge proportional. Langwelliges Licht wird stärker abgelenkt als kurzwelliges. In einem bestimmten Winkelbereich ist die Winkeldispersion konstant. Deshalb wird das Gitterspektrum als Normalspektrum bezeichnet.

2.7. Abbildung

2.7.1. Optische Abbildung

Der Begriff „Abbildung" wird in verschiedenen Wissenschaftsgebieten verwendet. Vor allem stellt er eine philosophische Kategorie dar, die für die Erklärung des Erkenntnisprozesses von Bedeutung ist.

Auch in der Mathematik wird von einer Abbildung gesprochen, wenn eine Menge von Elementen mit bestimmten Relationen in die gleiche oder in eine andere Menge transformiert wird. So kann ein Raum als eine Menge von Punkten mit einer bestimmten Metrik in einen zweiten Raum abgebildet werden.

Die optische Abbildung transformiert mit Hilfe von technischen Systemen bestimmte Objekteigenschaften in Bildeigenschaften.

Es ist nun unsere Aufgabe, Gemeinsamkeiten der verschiedenen Abbildungen herauszuarbeiten, sie andererseits abzugrenzen und zu klassifizieren.

Gegeben ist in jedem Falle ein Objekt, das abgebildet werden soll. Das Objekt kann materiell sein. Bei der Erkenntnis von Erscheinungen der realen Welt sind die Objekte materiell. Das trifft damit auch auf die realen Objekte bei der realen optischen Abbildung zu.

Die Objekte können aber auch nichtmaterieller Natur sein. Sowohl bei der mathematischen Transformation wie auch bei der Abbildung von modellierten technischen Strukturen sind die Objekte nicht materiell gegeben. Zum Beispiel ist ein Kreis in der materiellen Welt nur angenähert realisierbar. Als Gegenstand der Mathematik stellt er ein nichtmaterielles Gebilde dar. Auch ein Objektpunkt ist nur das Modell für einen eng begrenzten Bereich der Objektstruktur.

Die Abbildung transformiert die wesentlichen Eigenschaften des Objektes in das Bild bzw. Abbild, d. h. in einen anderen Bereich, so daß aus dem Bild auf bestimmte Eigenschaften des Objektes zurückgeschlossen werden kann und am Bild modellmäßige Untersuchungen über das Objekt möglich sind. Das Bild kann auch dazu dienen, einen künstlerisch beeinflußten Eindruck von der objektiven Realität zu vermitteln.

Das Bild kann materiell sein, es ist dann ein materielles Modell des Objektes. Ein Prozeß, ein System oder eine Struktur können jedoch in den nichtmateriellen Bereich abgebildet werden, so daß das Bild ein nichtmaterielles Modell des Objektes darstellt.

In diesem Sinne läßt sich eine im materiellen Bereich vorliegende reale Abbildung selbst in den nichtmateriellen Bereich abbilden, also modellieren. Im modellierten Bereich sprechen wir von einer konkreten Abbildung, wenn die abbildende Struktur bzw. der abbildende Prozeß ebenfalls modellmäßig bekannt sind; wir sprechen von einer abstrakten Abbildung, wenn nur die Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangsgrößen, also die Funktion der abbildenden Struktur, betrachtet wird.

Wir fassen zusammen:

> Die Abbildung ist eine Transformation von wesentlichen Eigenschaften eines Objektbereichs in den Bildbereich zum Zweck der Erkenntnis, der Modellierung oder der künstlerischen Darstellung der objektiven Realität.

Wir übertragen nun die allgemeinen Erkenntnisse über die Abbildung auf die optische Abbildung. Wir halten zunächst fest:

> Die Realisierung der optischen Abbildung ist eine Hauptaufgabe der technischen Optik.

Die optische Abbildung wird durch technische Systeme vermittelt. Diese beeinflussen das vom Objekt ausgehende Licht so, daß es im Bildraum die wesentlichen Eigenschaften der Objektstruktur reproduzieren kann.

> Die optische Abbildung wird durch technische Systeme, die optischen Systeme, vermittelt. Träger der Informationen über das Objekt ist das Licht.

Wir unterscheiden die reale, die konkrete und die abstrakte optische Abbildung.

Die *reale optische Abbildung* transformiert die Eigenschaften einer materiellen Objektstruktur, die auf den räumlichen und zeitlichen Zustand des Lichtes einwirken, in die reale Bildstruktur. Das Licht ist der materielle Träger der Objektinformationen.

Es liegt eine reale technische Struktur vor, ein reales optisches System, die das

Licht so beeinflußt, daß die Bildstruktur entsteht. Diese kann subjektiv (visuell) oder objektiv ausgewertet werden.

Eine reale optische Abbildung verknüpft folgende Strukturen:

— das reale Objektsystem, das aus der Strahlungsquelle, dem Beleuchtungssystem und der Objektstruktur bestehen kann
— das reale optische System, das im allgemeinen eine Baugruppe darstellt, deren Hauptfunktion durch abbildende optische Bauelemente realisiert wird
— das reale Bildsystem, das aus der Bildstruktur, der Auffangfläche und dem Strahlungsempfänger bestehen kann.

Die *konkrete optische Abbildung* ist das nichtmaterielle Modell der realen optischen Abbildung. Objektsystem, optisches System und Bildsystem werden modellmäßig beschrieben. Da jedoch die Modelle der in der Abbildungskette auftretenden technischen Strukturen in die Betrachtung einbezogen werden, sind auch die Strukturen konkret gegeben.

So liegt z. B. das Modell des realen optischen Systems als konkrete Struktur aus Funktionselementen vor, die wir als konkretes optisches System bezeichnen. Dieses ist im allgemeinen eine Funktionsgruppe. Wir weisen noch darauf hin, daß das konkrete System auch die Fertigungsfehler modellmäßig erfassen kann.

Das Lichtsignal tritt als konkretes Modell des Lichtes auf, z. B. als Wellenmodell des Lichtes.

Die konkrete optische Abbildung kann nur theoretisch behandelt werden. Die Objektstruktur ist im allgemeinen durch die Objektfunktion mathematisch modelliert.

Die *abstrakte optische Abbildung* erfaßt den allgemeinen Zusammenhang zwischen Objekt- und Bildeigenschaften. Sie ist somit ebenfalls ein nichtmaterielles Modell der realen optischen Abbildung, aber ohne Berücksichtigung der konkreten technischen Strukturen. Das abstrakte Modell des optischen Systems erfüllt also nur bestimmte Funktionen. Diese bestehen darin, Eingangssignale so in Ausgangssignale umzuwandeln, daß die Merkmale einer Abbildung erfüllt werden. Das abstrakte optische System ist eine „black box", deren Funktion in Elementarfunktionen zerlegt werden kann.

Auch vom konkreten Modell des Lichtes ist soweit zu abstrahieren, daß das Licht als Signal ohne physikalische Modellstruktur behandelt wird. Das Licht tritt dann im eigentlichen Sinne nicht mehr in Erscheinung, und es werden allgemeine Gesetze der technischen Abbildung von Objektinformationen in Bildinformationen aufgedeckt oder anwendbar.

Wir wollen die bei der optischen Abbildung vorliegenden Einzelerscheinungen noch etwas genauer angeben und formulieren zunächst die allgemeinen Zusammenhänge.

— Die optische Abbildung stellt eine Transformation derjenigen Eigenschaften der Objektstruktur in die Bildstruktur dar, die eine Modulation des Lichtes hervorrufen. Moduliert werden können sämtliche Größen, die den räumlichen und zeitlichen Zustand des Lichtes beschreiben.

— Infolge der Modulation sind die Informationen über das Objekt im Lichtsignal verschlüsselt (codiert) enthalten.
— Da die Lichtdetektoren Leuchtdichte- und Farbunterschiede registrieren, muß die Bildstruktur eine Entschlüsselung darstellen, die die transformierte Objektstruktur in Farb- oder Hell-Dunkel-Kontrast umwandelt.
— Im allgemeinen treten bei der Abbildung beabsichtigte und unerwünschte Filterwirkungen auf, durch die bestimmte Objekteigenschaften im Bild hervorgehoben, abgeschwächt oder unterdrückt werden.
— Die Abbildung kann durch statistische Schwankungserscheinungen beeinflußt werden, die ein optisches Rauschen darstellen.

Die einzelnen Schritte erläutern wir am Beispiel des Liniengitters mit stückweise konstanter Strukturfunktion, das mit einem senkrecht zur Gitterebene einfallenden Parallelbündel beleuchtet wird. Ein Projektionsobjektiv bildet das Gitter auf einem Schirm ab. Die Lichtwelle soll in Form des skalaren Wellenmodells betrachtet werden.

Modulation. Das Liniengitter moduliert die Lichtwelle, indem es die komplexe Amplitude periodisch verändert. Die ebene Wellenfläche wird durch die örtlich periodisch variable Transparenz, die örtlich variable optische Weglänge und durch die Beugung in eine komplizierte Wellenfläche umgewandelt.

Codierung. Die am Liniengitter gebeugte Welle enthält die Objekteigenschaften verschlüsselt, indem sie die im Objekt periodisch veränderlichen Größen in Form von Amplituden- und Phasenverläufen in einem Wellenfeld transportiert.

Filterwirkung. Das Projektionsobjektiv hat einen begrenzten Durchmesser, so daß es niemals das gesamte am Liniengitter gebeugte Licht erfassen kann. Das hat zur Folge, daß im Bild nicht das gesamte vom Objekt ausgehende Licht zur Interferenz gebracht wird. Im Bild können dadurch nicht alle Objekteigenschaften erkannt werden, z. B. unter bestimmten Verhältnissen nicht die scharfen Kanten der einzelnen Periodizitätsbereiche. Das Liniengitter erscheint verwaschen, und nur die Periodizität ist in das Bild übertragen worden. Es sind also bestimmte Objekteigenschaften unterdrückt, d. h. durch eine Filterwirkung aus der Welle getilgt worden.

Entschlüsselung. Die Information über das Objekt, die die Lichtwelle enthält, muß in optisch wahrnehmbare Bildeigenschaften umgewandelt werden. Ohne besondere Maßnahmen wären z. B. Phasenunterschiede im Objekt nicht im Bild erkennbar. Es gibt jedoch Maßnahmen (Eingriffe in die Welle, die einer Filterung entsprechen), durch die Phasendifferenzen in Hell-Dunkel-Kontrast umgewandelt, also entschlüsselt werden können.

Optisches Rauschen. Bei der Projektion ist Streulicht vorhanden, das sowohl aus dem Abbildungsvorgang wie auch aus der Umgebung stammen kann. Im Bild setzt das Streulicht den Kontrast herab.

2.7.2. Ideale geometrisch-optische Abbildung

Die im vorangehenden Abschnitt gegebene allgemeine Beschreibung der optischen Abbildung läßt sich in einzelnen Zügen verfeinern, wenn ein bestimmtes Modell des Lichtes und damit eine konkrete theoretische Konzeption der optischen Abbildung zugrunde gelegt wird.

Wir stellen uns auf den Standpunkt der geometrischen Optik. In der geometrisch-optischen Theorie der Abbildung denken wir uns das Objekt aus leuchtenden Punkten aufgebaut. Dabei ist es gleichgültig, ob es sich um direkt ausgestrahltes, reflektiertes oder gestreutes Licht handelt. Von jedem Objektpunkt geht ein räumlicher Lichtkegel, ein Strahlenbündel aus.

> Jedes Strahlenbündel des Objektraums hat einen Konvergenzpunkt A, in dem sich die Strahlen schneiden. Deshalb wird es homozentrisch genannt.

Die Gesamtheit an Objektpunkten stellt die Objektstruktur dar. Als modellierbare Größen treten nur die räumliche Verteilung der Objektpunkte und die Strahlrichtungen auf.

Die punktförmige geometrisch-optische Abbildung wird nun folgendermaßen definiert:

> Eine punktförmige geometrisch-optische Abbildung liegt vor, wenn die homozentrischen Strahlenbündel mit den Konvergenzpunkten A in homozentrische Strahlenbündel mit den Konvergenzpunkten A′ verwandelt werden. Der einem Objektpunkt A zugeordnete Konvergenzpunkt A′ ist der Bildpunkt. A und A′ heißen konjugiert.

Die punktförmige geometrisch-optische Abbildung transformiert also eine Struktur aus Objektpunkten in eine Struktur aus konjugierten Bildpunkten.

> Die Gesamtheit aller möglichen Objektpunkte bildet den Objektraum; die Gesamtheit aller möglichen Bildpunkte bildet den Bildraum.

Da sowohl die Gesamtheit der möglichen Objektpunkte wie auch die Gesamtheit der möglichen Bildpunkte den Raum vollständig ausfüllen können, überdecken sich im allgemeinen Objekt- und Bildraum einer Abbildung.

Wir unterscheiden sowohl bei den Objekt- wie auch bei den Bildpunkten reelle und virtuelle Punkte.

> In einem reellen Punkt schneiden sich die Lichtstrahlen; in einem virtuellen Punkt schneiden sich die Verlängerungen der Lichtstrahlen.

Abbildung 2.108 demonstriert die punktförmige geometrisch-optische Abbildung am ebenen Spiegel. Zu jedem Objektpunkt gibt es am ebenen Spiegel einen Bildpunkt. Der Spiegel teilt sowohl den Objektraum wie auch den Bildraum. Der Halbraum vor dem Spiegel enthält die reellen Objekt- und Bildpunkte; der Halbraum hinter dem Spiegel enthält die virtuellen Objekt- und Bildpunkte. Abbildung 2.109

ist zu entnehmen, daß ein ebener Spiegel jede Objektstruktur in eine gleichgroße Bildstruktur abbildet, also transformiert. Eine geometrische Figur, z. B. ein Quadrat, wird in eine ähnliche Figur abgebildet. (Im Spezialfall des ebenen Spiegels ist es eine kongruente Figur.)

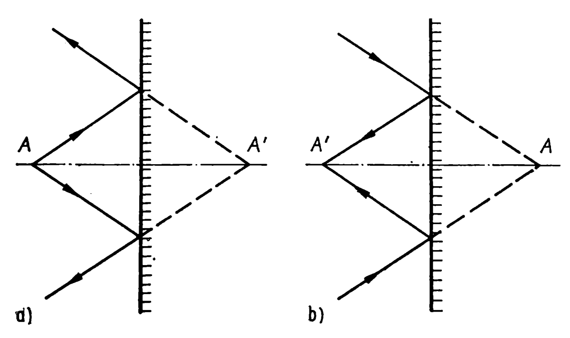


Abb. 2.108
a) Reelles Objekt, virtuelles Bild am ebenen Spiegel
b) Virtuelles Objekt, reelles Bild am ebenen Spiegel

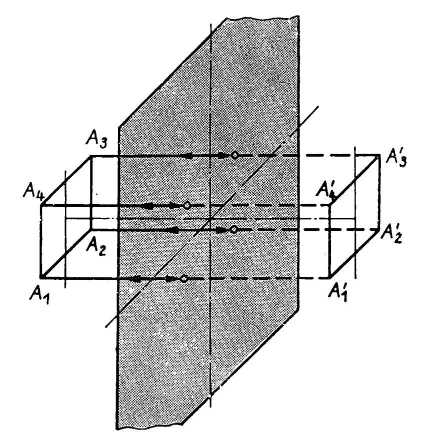


Abb. 2.109
Kongruentes Bild am ebenen Spiegel

Damit erfüllt der ebene Spiegel eine zweite Forderung, die an eine ideale geometrisch-optische Abbildung zu stellen ist, nämlich die Ähnlichkeit.

> Bei der ähnlichen Abbildung werden geometrische Figuren in ähnliche Figuren abgebildet.

Damit gilt:

> Die ideale geometrisch-optische Abbildung ist punktförmig und ähnlich.

Der unendlich ausgedehnte ebene Spiegel würde eine ideale geometrisch-optische Abbildung realisieren.

Besondere Bedeutung haben die rotationssymmetrischen optischen Abbildungen, bei denen sowohl im Objekt- wie auch im Bildraum eine Symmetrieachse, die optische Achse, existiert. Eine ideale geometrisch-optische rotationssymmetrische Abbildung, die den gesamten Raum punktförmig und geometrische Figuren in achssenkrechten Ebenen ähnlich abbildet, wird durch gebrochene lineare Funktionen mathematisch beschrieben. Sie ist im mathematischen Sinne eine rotationssymmetrische kollineare Abbildung. Außer mit dem Planspiegel ist die kollineare Abbildung nicht mit optischen Systemen realisierbar.

2.7.3. Geometrisch-optische Abbildung

Praktisch ist niemals der gesamte Objektraum abzubilden und eine exakt punktförmige und ähnliche Abbildung weder notwendig noch möglich.

In der geometrischen Optik ist die einzige physikalische Grundlage für die Bestimmung des Strahlenverlaufs das Fermatsche Prinzip, also die Extremaleigenschaft des Lichtweges. Durch das Fermatsche Prinzip sind die Strahlrichtungen innerhalb des Systems aus optisch wirksamen Flächen und Stoffen festgelegt, wenn die Objektpunkte und die objektseitigen Strahlrichtungen vorgegeben sind.

Die Strahlen eines objektseitig homozentrischen Bündels schneiden sich im Bildraum im allgemeinen nicht in einem Punkt, aber häufig in der Umgebung eines Punktes. Es sind damit zwei Einschränkungen, denen eine realisierbare geometrisch-optische Abbildung unterliegt:

1. Die abzubildende Objektstruktur ist räumlich begrenzt, d. h., die abzubildenden Objektpunkte sind auf ein bestimmtes Gebiet des Objektraums beschränkt.

2. Die Bildstruktur besteht nicht aus Bildpunkten, aber die Strahlen, die von einem Objektpunkt ausgehen, schneiden sich im Bildraum in der Umgebung eines Punktes.

Wir erläutern diese Bemerkungen an drei Beispielen.

— Bei der Projektion von Diapositiven hat das Projektionsobjektiv die Aufgabe, die ebene und begrenzte Objektstruktur ähnlich vergrößert auf die Projektionswand abzubilden. Es ist also ein Ausschnitt einer Objektebene in einen Ausschnitt der Bildebene abzubilden.

— Bei der fotografischen Aufnahme wird ein Teil der Objektebene in einen Teil der Filmebene abgebildet. Die abzubildenden Objektpunkte und die Punkte eines beiderseits der Objektebene liegenden Gebietes (des Schärfentiefenbereichs) sollen auf dem Endbild so kleine Zerstreuungsfiguren ergeben, daß ein den Forderungen genügender Bildeindruck erreicht wird.

— Beim Betrachten eines Fixsterns mit dem Fernrohr muß das Licht, das vom Fixstern ausgeht und von dem Fernrohr aufgenommen wird, auf eine so kleine Fläche konzentriert werden, daß der Stern als Punkt erscheint.

Die geometrisch-optische Abbildung muß unbestimmter definiert werden als die ideale geometrisch-optische Abbildung.

> Die geometrisch-optische Abbildung transformiert eine räumlich begrenzte Struktur aus Objektpunkten in eine Bildstruktur aus Zerstreuungsfiguren, deren Gesamtheit in Verbindung mit einem bestimmten Empfänger eine den Anforderungen des jeweiligen Anwendungszweckes genügende Aussage über wesentliche Objekteigenschaften erlaubt.

Wie groß die zulässigen Abweichungen von der Punktförmigkeit und von der Ähnlichkeit sind, hängt von der speziellen Aufgabe ab. Die genaue Beantwortung dieser Frage setzt umfassende Untersuchungen über die Bewertung optischer Systeme und Bilder voraus. Diese sind nicht allein auf geometrisch-optischer Grundlage möglich.

Durch eine entsprechende Kombination von abbildenden optischen Elementen in den optischen Systemen wird der Bereich der angenäherten punktförmigen und ähnlichen Abbildung auf die notwendige Größe erweitert.

3. Strahlungsphysik und Lichttechnik

3.1. Strahlungsphysikalische Größen

3.1.1. Strahlungsfluß

Eine wesentliche Seite des Lichtes ist seine Erscheinungsform als elektromagnetische Welle. Die Energie der Lichtwelle, also die elektromagnetische Feldenergie, ist unabhängig vom menschlichen Auge registrierbar. Es gibt eine Vielzahl an Strahlungsempfängern, die eine objektive Messung von energetischen Größen des Lichtes gestatten. Dazu gehören z. B. die lichtempfindlichen Schichten der Fotografie und die Fotozellen. Objektive Meßverfahren sind außerhalb des sichtbaren Gebietes

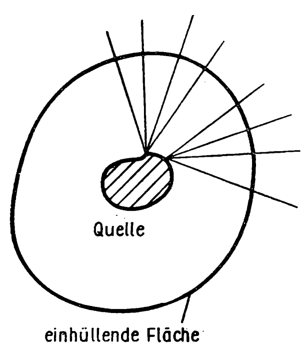


Abb. 3.1
Zur Definition des Strahlungsflusses

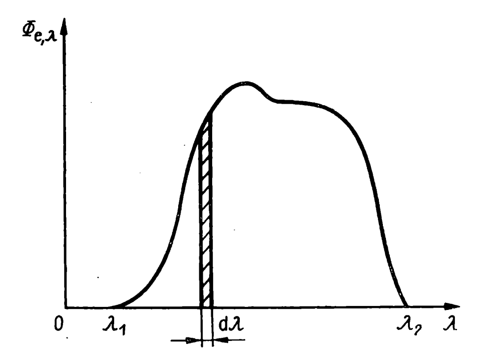


Abb. 3.2
Spektraler Strahlungsfluß

notwendig. Die objektiv gemessenen energetischen Größen der Lichtstrahlung werden zweckmäßig in denselben Einheiten angegeben wie für andere Energieformen der Physik.

> Die im Zusammenhang mit der Strahlungsenergie stehenden Größen werden als strahlungsphysikalische Größen bezeichnet, wenn sie in den physikalischen Maßeinheiten angegeben und unabhängig von den physiologisch-optischen Eigenschaften des menschlichen Auges gemessen werden.

Strahlungsphysikalische Größen eignen sich besonders dazu, die Wechselwirkung des Lichtes mit objektiven Empfängern zu beschreiben.

Gegeben sei eine zeitlich stationäre und räumlich begrenzte Strahlungsquelle. Wir legen eine geschlossene Fläche um die Strahlungsquelle und berechnen die im Zeitmittel pro Zeiteinheit durch die Fläche hindurchgehende Energie (Abb. 3.1).

Damit erhalten wir die gesamte Strahlungsleistung der Quelle, für die der Begriff des Strahlungsflusses Φ_e geprägt wird.

Der Strahlungsfluß Φ_e stellt die Strahlungsleistung einer Quelle dar. Er wird in der Einheit Watt gemessen.

In einem nichtabsorbierenden Stoff gilt der Energieerhaltungssatz für die Strahlungsenergie. Der Strahlungsfluß ist also eine primäre Größe, die beim Durchgang durch ein optisches System bei Vernachlässigung von Verlusten erhalten bleibt. Der Strahlungsfluß einer Quelle setzt sich im allgemeinen aus den Anteilen für die einzelnen Wellenlängen zusammen. Der spektrale Strahlungsfluß

$$\Phi_{e,\lambda} = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \quad [\Phi_{e,\lambda}] = \frac{W}{m} \tag{3.1}$$

bestimmt die Strahlungsleistung im Wellenlängenintervall $d\lambda$. Entsprechend gilt für den Strahlungsfluß (Abb. 3.2):

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_{e,\lambda}\, d\lambda. \tag{3.2}$$

3.1.2. Strahlstärke

Eine Strahlungsquelle strahlt im allgemeinen räumlich ungleichmäßig. Auch die einzelnen Elemente der Strahlungsquelle strahlen richtungsabhängig. Wir greifen einen Punkt der Quelle und ein Raumwinkelelement $d\Omega$ heraus, dessen Spitze im betrachteten Punkt liegt (Abb. 3.3). Der auf das Raumwinkelelement $d\Omega$ entfallende

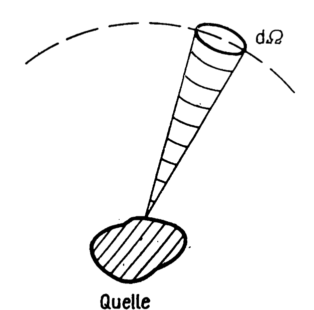


Abb. 3.3
Zur Definition der Strahlstärke

Strahlungsfluß wird als Strahlstärke I_e bezeichnet. Es gilt

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}, \quad [I_e] = \frac{W}{sr}. \tag{3.3}$$

Die Strahlstärke I_e ist der Strahlungsfluß pro Raumwinkelelement.

Eine punktförmige Strahlungsquelle ist nicht realisierbar. Die angegebene Definition der Strahlstärke ist aber auch anwendbar, wenn die Spitze des Raumwinkel-

elementes im Mittelpunkt eines Flächenelementes dq_1 der Quelle liegt. (Wir verwenden für Flächen das Symbol q, weil später die numerische Apertur A benötigt wird. Elemente der Quelle indizieren wir mit „1", Elemente des Empfängers mit „2".)

3.1.3. Strahldichte

Ein Flächenelement dq_1 der Quelle strahlt mit der richtungsabhängigen Strahlstärke $dI_e(\Omega)$. Die von der Flächeneinheit senkrecht zum Flächenelement ausgesendete Strahlstärke I_{e0} ist ein Maß für die Dichte der Energieabstrahlung. Diese wird Strahldichte L_{e0} genannt.

$$L_{e0} = \frac{dI_{e0}}{dq_1}, \quad [L_{e0}] = \frac{W}{sr \cdot m^2}. \tag{3.4}$$

Die Strahldichte L_{e0} ist die auf die Flächeneinheit der Quelle bezogene Lichtstärke, die senkrecht zu einem Flächenelement der Quelle wirksam wird.

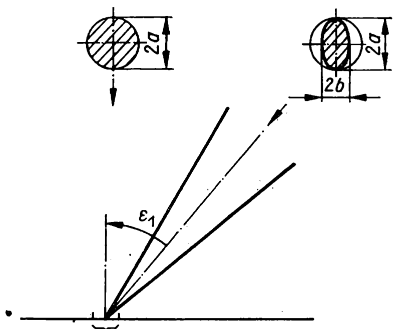


Abb. 3.4
Strahldichte schräg zu einer strahlenden Ebene

Die Strahldichtedefinition läßt sich für schräg zum Flächenelement stehende Empfänger erweitern. Eine ebene und kreisförmige Fläche habe in senkrechter Richtung die Strahldichte L_{e0}. Ein seitlich stehender Empfänger registriert die Strahlung scheinbar von einer elliptischen Fläche, die die kleine Halbachse

$$b = a \cos \varepsilon_1$$

hat (Abb. 3.4). Die Fläche der Ellipse ist also kleiner als die Fläche des Kreises. Die Strahldichte beträgt deshalb

$$L_e = \frac{1}{\cos \varepsilon_1} \frac{dI_e}{dq_1}. \tag{3.5}$$

3.1.4. Bestrahlungsstärke

Wir gehen vom theoretischen Grenzfall einer punktförmigen Quelle aus und legen um diese eine Kugel (Abb. 3.5). Der Strahlungsfluß trifft senkrecht auf die Kugelfläche auf. Für die Stärke der Bestrahlung der Kugelfläche ist der auf die Flächen-

einheit entfallende Strahlungsfluß $d\Phi_{e0}$ maßgebend. Die Bestrahlungsstärke E_{e0} ist damit durch

$$E_{e0} = \frac{d\Phi_{e0}}{dq_2}, \quad [E_{e0}] = \frac{W}{m^2} \tag{3.6}$$

definiert. In Worten:

> Die Bestrahlungsstärke E_{e0} ist der auf die Flächeneinheit des Empfängers bezogene Strahlungsfluß, der senkrecht auf seine Fläche trifft.

Die Bestrahlungsstärke kann auch bei nicht punktförmigen Quellen berechnet werden. Es müssen dann die Strahlungsflußanteile der einzelnen Flächenelemente der Quelle berücksichtigt werden. Der schräg auf einen ebenen Empfänger auftreffende Strahlungsfluß, der in einem Kreiskegel verläuft, bestrahlt eine elliptische Fläche (Abb. 3.6). Die große Halbachse der Ellipse beträgt

$$a = \frac{b}{\cos \varepsilon_2}.$$

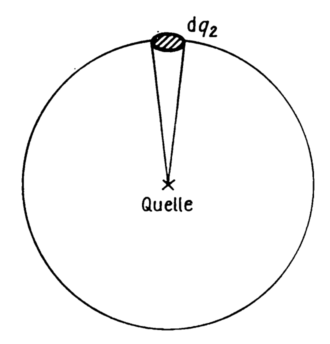


Abb. 3.5
Zur Definition der Bestrahlungsstärke

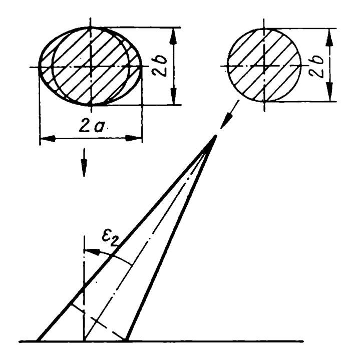


Abb. 3.6
Bestrahlungstärke bei schräg beleuchteter Ebene

Die bestrahlte Fläche ist damit um den Faktor $\cos \varepsilon_2$ größer als bei senkrechter Bestrahlung. Für die Bestrahlungsstärke gilt

$$E_e = E_{e0} \cos \varepsilon_2. \tag{3.7}$$

Die Bestrahlungsstärke, als Leistung pro Flächeneinheit, stellt zugleich die Energie dar, die pro Zeiteinheit durch eine senkrecht zur Energieausbreitung stehende Flächeneinheit geht. Sie ist also eine Energiestromdichte, so wie der Betrag des Zeitmittelwertes des Poynting-Vektors. Damit ist die Bestrahlungsstärke für den Fall eines bestrahlten Schirms mit der Intensität identisch.

Bestrahlung. Manche Empfänger, wie z. B. die fotografischen Schichten, akkumulieren die auftreffende Strahlungsenergie. Die auf die Flächeneinheit entfallende

Strahlungsenergie, die Bestrahlung B_e, hängt von der Bestrahlungsstärke und von der Zeit ab.

Die Bestrahlung B_e ist die Strahlungsenergie, die pro Flächeneinheit auf einen Empfänger trifft.

Damit gilt:

$$B_e = E_e t, \quad [B_e] = \frac{\text{Ws}}{\text{m}^2}. \tag{3.8}$$

Die Zusammenstellung der strahlungsphysikalischen Größen und ihrer Einheiten ist in der Tab. 3.1 gegeben.

Tabelle 3.1
Strahlungsphysikalische Größen

Größe				Formelzeichen	Einheit
deutsch	russisch	englisch	französisch		
Strahlungsfluß	поток лучистой энергии	radiant flux	flux énergétique	Φ_e	W
Strahlstärke	сила излучения	radiant intensity	intensité énergétique	I_e	$W \cdot sr^{-1}$
Strahldichte	плотность излучения	radiance	luminance énergétique	L_e	$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$
Bestrahlungsstärke	облучаемость	irradiance	éclairement énergétique	E_e	$W \cdot m^{-2}$
Bestrahlung	облучение	irradiation	irradiation	B_e	$W \cdot m^{-2} \cdot s$

3.2. Lichttechnische Größen

3.2.1. Lichtstrom

Der Strahlungsfluß einer Quelle kann mit dem menschlichen Auge subjektiv registriert werden. Dabei wird er entsprechend der relativen spektralen Hellempfindlichkeit V_λ bewertet. Auf Strahlung mit Wellenlängen, die außerhalb des sichtbaren Gebietes liegen, spricht das Auge nicht an. Bei der Wellenlänge $\lambda = 555$ nm ist die Hellempfindlichkeit des Auges am größten. Damit bereits in den Einheiten der energetischen Größen die physiologisch-optische Bewertung zum Ausdruck kommt, wird ein selbständiges Einheitensystem eingeführt.

Die im Zusammenhang mit der Lichtenergie stehenden Größen werden als lichttechnische Größen bezeichnet, wenn sie in lichttechnischen Einheiten gemessen und damit physiologisch-optisch bewertet werden.

Der Lichtstrom ist der V_λ-bewertete Strahlungsfluß. Als Einheit des Lichtstroms dient das Lumen (lm). Der Lichtstrom ergibt sich entsprechend der Gl. (3.1) aus

dem spektralen Strahlungsfluß unter Einbeziehung der relativen spektralen Hellempfindlichkeit V_λ und des fotometrischen Strahlungsäquivalents k zu (Abb. 3.7)

$$\Phi = k \int \Phi_{e,\lambda}(\lambda)\, V_\lambda(\lambda)\, d\lambda, \qquad [\Phi] = \text{lm}. \tag{3.9}$$

Das fotometrische Strahlungsäquivalent k ist der Umrechnungsfaktor von Watt in Lumen. Es beträgt maximal

$$k = 679 \, \frac{\text{lm}}{\text{W}}. \tag{3.10}$$

In analoger Weise zum Aufbau der übrigen strahlungsphysikalischen Größen aus dem Strahlungsfluß leiten sich aus dem Lichtstrom die weiteren lichttechnischen Größen ab. Wir können uns deshalb kurz fassen.

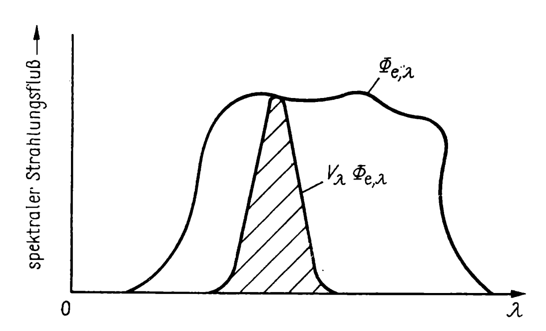


Abb. 3.7
Zur Definition des Lichtstroms

3.2.2. Lichtstärke

Die Lichtstärke ist durch

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \tag{3.11}$$

definiert.

Die Lichtstärke I wird in der Lichttechnik als Grundgröße eingeführt, so daß ihre Einheit, die Candela, mittels einer primären Meßvorschrift festgelegt werden muß. Es gilt:

> Die Candela (cd) ist die Lichtstärke, die (1/600000) m² der Fläche eines schwarzen Körpers bei der Erstarrungstemperatur des Platins (2042 K) beim Druck 101325 Pa senkrecht zu seiner Oberfläche ausstrahlt.

Damit ist für die Einheit des Lichtstroms

$$[\Phi] = \text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$$

zu setzen.

3.2.3. Leuchtdichte

Die Leuchtdichte folgt aus

$$L_\varepsilon = \frac{1}{\cos \varepsilon_1} \frac{dI}{dq_1}. \tag{3.12}$$

Für $\varepsilon_1 = 0$ ergibt sich aus Gl. (3.12)

$$L_0 = \frac{dI_0}{dq_1}, \quad [L_0] = \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}. \tag{3.13}$$

Oftmals wird die Fläche in cm² gemessen und die Einheit Stilb (b) mittels

$$[L] = \text{sb} = \text{cd} \cdot \text{cm}^{-2} \tag{3.14}$$

eingeführt. Die Einheit Apostilb (asb) ist gesetzlich nicht mehr zulässig. Sie ist durch

$$1\,\text{asb} = \frac{1}{\pi} \cdot 10^{-4}\,\text{sb} = \frac{1}{\pi} \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} \tag{3.15}$$

gegeben.

3.2.4. Beleuchtungsstärke

Die Beleuchtungsstärke berechnen wir aus

$$E_0 = \frac{d\Phi_0}{dq_2}, \qquad [E_0] = \frac{\text{lm}}{\text{m}^2} = \text{lx}. \tag{3.16}$$

Als Abkürzung für die Einheit $\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$ wird die Bezeichnung Lux (lx) verwendet.

Trifft der Lichtstrom schräg auf die beleuchtete Fläche auf, dann ist gemäß Gl. (3.7)

$$E_\varepsilon = E_0 \cos \varepsilon_2 \tag{3.17}$$

zu setzen.

Die Belichtung lautet entsprechend Gl. (3.8)

$$B = Et, \qquad [B] = \text{lx} \cdot \text{s}. \tag{3.18}$$

Die lichttechnischen Größen sind in der Tab. 3.2 zusammengestellt.

3.2.5. Fotometrisches Entfernungsgesetz

Der Lambert-Strahler. Als Modell einer ausgedehnten ebenen Lichtquelle wird häufig der sog. Lambert-Strahler verwendet. Dieser hat aus jeder Richtung betrachtet die gleiche Leuchtdichte. Für die Lichtstärke des Lambertstrahlers folgt aus

$$L_\varepsilon = L_0 \tag{3.19}$$

mit Gl. (3.12) und Gl. (3.13)

$$\frac{1}{\cos \varepsilon_1} \frac{dI}{dq_1} = \frac{dI_0}{dq_1} \tag{3.20}$$

die Gleichung

$$dI = dI_0 \cos \varepsilon_1 . \tag{3.21}$$

Beim Lambert-Strahler gelten damit einfache analytische Beziehungen sowohl für die Leuchtdichte wie auch für die Lichtstärke. Darin ist seine Bedeutung als Modellquelle begründet.

Der Lambert-Strahler hat für jede Richtung konstante Leuchtdichte und eine kosinusförmig vom Betrachtungswinkel abhängige Lichtstärke.

Tabelle 3.2
Lichttechnische Größen

Größe				Formelzeichen	Einheit
deutsch	russisch	englisch	französisch		
Lichtstrom	световой поток	luminous flux	flux lumineux	Φ	lm = cd · sr
Lichtstärke	сила света	luminous intensity	intensité lumineuse	I	cd
Leuchtdichte	яркость	luminance	luminance	L	cd · m^{-2} sb = cd · cm^{-2}
Beleuchtungsstärke	освещенность	illumination	éclairement	E	lx = lm · m^{-2}
Belichtung	освещение	quantity of illumination	quantité d' éclairement	B	lx · s

Das fotometrische Entfernungsgesetz. Wir knüpfen nochmals an die Abb. 3.5 und an die Ableitung der Gl. (3.6) an, beziehen uns aber auf die lichttechnischen Größen. Eine punktförmige Quelle erzeugt auf einer konzentrisch dazu liegenden Kugelfläche die Beleuchtungsstärke

$$E_0 = \frac{d\Phi_0}{dq_2} .$$

Das Flächenelement der Kugel drücken wir mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$ und dem Kugelradius r aus:

$$dq_2 = r^2 \, d\Omega \cdot \frac{1}{\Omega_0} .$$

Außerdem führen wir die Lichtstärke I_0 nach Gl. (3.11) ein. Wir erhalten

$$E_0 = \frac{I_0}{r^2} \Omega_0 . \tag{3.22}$$

Dieser Ausdruck stellt das fotometrische Entfernungsgesetz für eine punktförmige Lichtquelle der Lichtstärke I_0 dar, die ein schräg stehendes Flächenelement in der Entfernung r beleuchtet (Abb. 3.8).

Der optische Fluß. Wir können das fotometrische Entfernungsgesetz für den Fall erweitern, daß das Licht von einem kleinen Flächenelement einer ausgedehnten Lichtquelle ausgestrahlt wird (Abb. 3.9). Dazu ist in der Gl. (3.25) die Lichtstärke dI für die Ausstrahlungsrichtung einzuführen. Für E setzen wir dementsprechend dE. Wir erhalten

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}I}{r^2} \cos \varepsilon_2 \cdot \Omega_0. \tag{3.23}$$

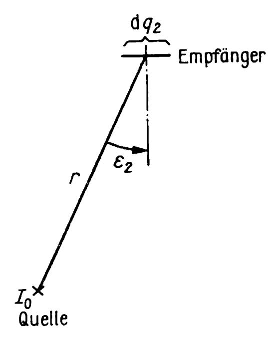


Abb. 3.8
Zum fotometrischen Entfernungsgesetz, punktförmige Lichtquelle

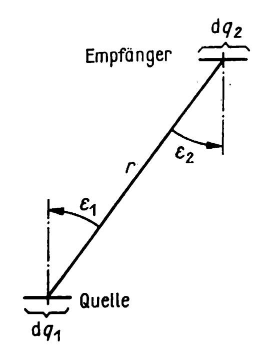


Abb. 3.9
Zum fotometrischen Entfernungsgesetz, ausgedehnte Lichtquelle

Nach Gl. (3.12) ist $\mathrm{d}I = L \cos \varepsilon_1 \cdot \mathrm{d}q_1$, also

$$\mathrm{d}E = \frac{L\Omega_0}{r^2} \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \mathrm{d}q_1. \tag{3.24}$$

Eine andere Schreibweise erhalten wir, wenn wir nach Gl. (3.16) den Lichtstrom einführen. Es gilt dann

$$\mathrm{d}^2\Phi = \frac{L\Omega_0}{r^2} \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2. \tag{3.25}$$

Mit Gl. (3.25) ist der Lichtstrom zu berechnen, den das Flächenelement dq_1 dem in der Entfernung r stehenden Flächenelement dq_2 zustrahlt. Ist die Lichtquelle ein Lambert-Strahler, dann ist L eine Konstante.

Auf der rechten Seite von Gl. (3.25) ist die Leuchtdichte die lichttechnische Größe, während der Faktor

$$\mathrm{d}^2G = \frac{\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2}{r^2}\, \Omega_0\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2 \tag{3.26}$$

die geometrischen Verhältnisse beschreibt. Er wird als optischer Fluß oder Lichtleitwert bezeichnet. Allgemein ist also

$$d^2\Phi = L \cdot d^2G. \tag{3.27}$$

Der optische Fluß spiegelt den Einfluß der geometrischen Größen des optischen Systems wider. Der Lichtstrom stellt das Produkt aus optischem Fluß und Leuchtdichte dar.

In der Schreibweise nach Gl. (3.25) oder Gl. (3.27) wird das fotometrische Entfernungsgesetz auch als fotometrisches Grundgesetz bezeichnet.

4. Abbildende optische Funktionselemente

4.1. Geometrisch-optisch abbildende Funktionselemente

4.1.1. Funktionselemente

Technische Strukturen haben bestimmte Funktionen zu erfüllen. Eine Funktion besteht darin, Eingangsgrößen in Ausgangsgrößen zu überführen. So könnte z. B. ein paralleles Lichtbündel vorgegebener Richtung in ein Parallelbündel anderer Richtung zu transformieren sein. Es wäre dann eine technische Struktur notwendig, die die Funktion „Ablenken" verwirklicht. Es leuchtet ein, daß es dafür mehrere Strukturen geben kann. In unserem Beispiel wären Spiegel, Prismen, Glasfaserbündel u. a. geeignet. Der Schluß von der Funktion auf die Struktur ist also nicht eindeutig, während der umgekehrte Schluß eindeutig sein kann.

Jede Struktur hat neben den gewünschten Hauptfunktionen noch Nebenfunktionen, die besonders mitzubeachten sind und die gegebenenfalls die Auswahl einschränken. Bei Prismen kann z. B. die Lichtablenkung mit einer Farbaufspaltung (Dispersion), mit einer Polarisation des Lichtes u. a. verbunden sein. Der Schluß von der Struktur auf die Hauptfunktion ist also auch nicht immer eindeutig, im allgemeinen aber nahegelegt.

Wir unterscheiden reale und konkrete Strukturen. Reale Strukturen sind materiell, also gefertigt. Sie können nur experimentell untersucht werden. Konkrete Strukturen stellen nichtmaterielle Modelle der realen Strukturen dar. Sie können nur theoretisch behandelt werden.

Es ist zweckmäßig, die elementaren Funktionen zu ermitteln, die einem physikalischen Wirkprinzip zugeordnet sind. In diesem Sinne definieren wir den Begriff der Elementarfunktion.

> Eine Elementarfunktion ist eine Verknüpfung zwischen vorgegebenen Eingangsgrößen und vorgegebenen Ausgangsgrößen, deren weitere Zergliederung in Zwischenstufen nicht erforderlich ist, weil sie unmittelbar mit realen technischen Strukturen, den Bauelementen, mit bestimmter Wahrscheinlichkeit realisiert und mit konkreten technischen Strukturen, den Funktionselementen, modelliert werden kann oder soll.

Die Anzahl der notwendigen Elementarfunktionen ist damit auch von der Entwicklung der technologischen Bedingungen abhängig. Gelingt es, eine technische Struktur zu entwickeln, die als Ganzes eine Funktion realisiert, kann diese als Elementarfunktion bezeichnet werden. Es gilt weiter:

> Ein Bauelement ist eine reale technische Struktur, die als Ganzes in einer bestimmten Umgebung vorgegebene Eingangsgrößen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in vorgegebene Ausgangsgrößen überführt.

Es kommt also nicht darauf an, ob bei der Fertigung und Montage des Bauelementes mehrere Einzelteile notwendig sind. Wesentlich ist nur, daß das Bauelement ohne weitere Bearbeitungs- sowie innere Montage- und Justierprozesse in eine komplexe technische Struktur eingefügt werden kann und die gewünschte Funktion erfüllt.

Das Modell des Bauelementes ist das Funktionselement. Mit diesem werden die wesentlichen Eigenschaften des Bauelementes theoretisch erfaßt.

> Ein Funktionselement ist eine konkrete technische Struktur, die als Ganzes in einer modellmäßig bestimmten Umgebung vorgegebene Eingangsgrößen in vorgegebene Ausgangsgrößen überführt.

Die Funktionselemente teilen wir nach Elementarfunktionen ein. Zur Zeit liegen noch keine abgeschlossenen Untersuchungen darüber vor, welche optischen Elementarfunktionen notwendig sind. Wir verwenden hier die Elementarfunktionen Abbilden, Bündelbegrenzen, Ablenken, Dispergieren, Filtern, Lichtleiten und Polarisieren.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit geometrisch-optisch abbildenden Funktionselementen. Ihre Funktion, die geometrisch-optische Abbildung, läßt sich ausreichend genau mit dem Strahlenmodell des Lichtes beschreiben.

4.1.2. Brechende Rotationsflächen

Das augenfälligste abbildende optische Bauelement stellt die Linse dar (Abb. 4.1). Eine Linse besteht aus zwei brechenden Flächen, die in bestimmter Weise zueinander angeordnet sind. Eine einzelne brechende Fläche läßt sich nicht als Bauelement ausbilden. Trotzdem ist es für das Verständnis der geometrisch-optisch abbildenden Funktionselemente notwendig, die Eigenschaften der Einzelfläche zu untersuchen. Wir werden dabei auch wesentliche methodische Hilfsmittel kennenlernen.

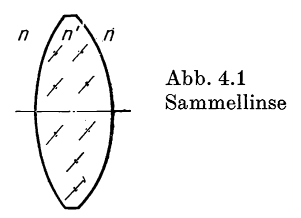


Abb. 4.1
Sammellinse

Die Linsenflächen müssen im allgemeinen feinoptische Qualität haben, d. h., ihre Genauigkeit hinsichtlich Krümmung und Oberflächenbeschaffenheit unterliegt besonders hohen Anforderungen. Die Oberfläche wird geprüft, indem mit Probegläsern Newtonsche Ringe erzeugt werden. Als Vergleichslänge dient also die Wellenlänge des Lichtes.

Bei der traditionellen Fertigung von Linsen werden die Flächen an Glaskörper durch Läppen und Polieren angearbeitet (Bearbeiten mit losem Korn zwischen Linsenfläche und Werkzeug). Dabei lassen sich Kugelflächen, also sphärische Flächen, leichter und damit billiger herstellen als andere Flächen. Das ist der Hauptgrund

dafür, daß asphärische Flächen seltener zum Einsatz kommen als sphärische Flächen, obwohl jene Vorteile für einen einfachen Aufbau optischer Systeme mit sich bringen würden.

Berechnung von Meridionalstrahlen. Wir wollen den Verlauf eines Lichtstrahls hinter der brechenden Fläche berechnen. Die Daten des Strahls vor der Fläche sollen gegeben sein. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stellt sich als unerwartet schwierig heraus, besonders, wenn mehrere Flächen aufeinander folgen. Wir beschränken uns deshalb auf die Berechnung von Strahlen, die im Meridionalschnitt verlaufen (siehe Abschnitt 1.2.2.).

> Strahlen, die im Meridionalschnitt verlaufen, heißen Meridionalstrahlen. Alle anderen Strahlen werden als „windschief" bezeichnet.

Eine Flächennormale benutzen wir als optische Achse. Die Kugelfläche ist rotationssymmetrisch um die optische Achse.

Zur Festlegung des Lichtstrahls vor der brechenden Fläche sind zwei Bestimmungsstücke notwendig. Eine geeignete Größe ist die Schnittweite.

> Die Schnittweite ist die Entfernung des Punktes, in dem ein Lichtstrahl die optische Achse schneidet, vom Flächenscheitel.

Als zweite Größe verwenden wir

bei endlicher objektseitiger Schnittweite den Schnittwinkel des Strahls mit der optischen Achse,

bei unendlicher Schnittweite die Einfallshöhe des Strahls an der ersten Fläche Abb. 4.2).

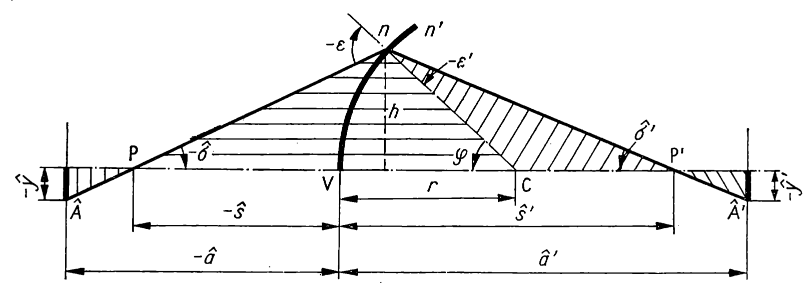


Abb. 4.2
Zur Ableitung des Normalschemas (Objektweite endlich)

Für Strahlen, die nicht nahe der optischen Achse verlaufen, schreiben wir die Schnittweiten und -winkel mit „Dach" ($\hat{s}$, $\hat{\sigma}$). Nach TGL 20249 wäre statt des Daches „Tilde" zu verwenden ($\tilde{s}$, $\tilde{\sigma}$).

Für den Fall, daß nicht die objektseitige Schnittweite $\hat{s}$, sondern die Durchstoßhöhe $\hat{y}$ in einer achssenkrechten Ebene gegeben ist, ermitteln wir die objektseitige Schnittweite folgendermaßen (Abb. 4.2):

$$\tan\hat{\sigma} = \frac{\hat{y}}{\hat{s} - \hat{a}}, \quad \hat{s} = \hat{a} + \frac{\hat{y}}{\tan\hat{\sigma}}. \tag{4.1}$$

Entsprechend ergibt sich die Durchstoßhöhe in einer beliebigen bildseitigen achssenkrechten Ebene (Abb. 4.2):

$$\tan \hat{\sigma}' = \frac{\hat{y}'}{\hat{s}' - \hat{a}'}, \quad \hat{y}' = (\hat{s}' - \hat{a}') \tan \hat{\sigma}'. \tag{4.2}$$

Die Ableitung der Formeln für die Berechnung der bildseitigen Schnittweite und des bildseitigen Schnittwinkels anhand der Abb. 4.2 und 4.3 ist in der Tab. 4.1 enthalten.

Bei der Strahldurchrechnung an der sphärischen Fläche ist es unzweckmäßig, einen geschlossenen Ausdruck für die bildseitigen Größen abzuleiten. Es werden Formelsätze angewendet, die einer algorithmischen Aufbereitung der Rechnung entsprechen.

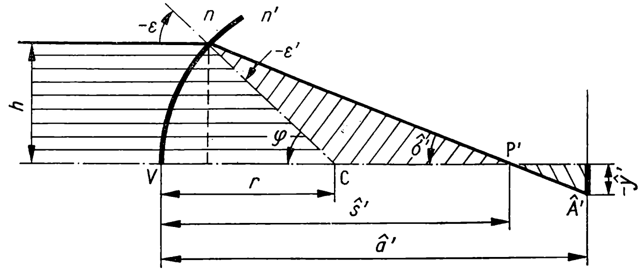


Abb. 4.3
Zur Ableitung des Normalschemas (Objektweite unendlich)

Die Formelsätze lauten:

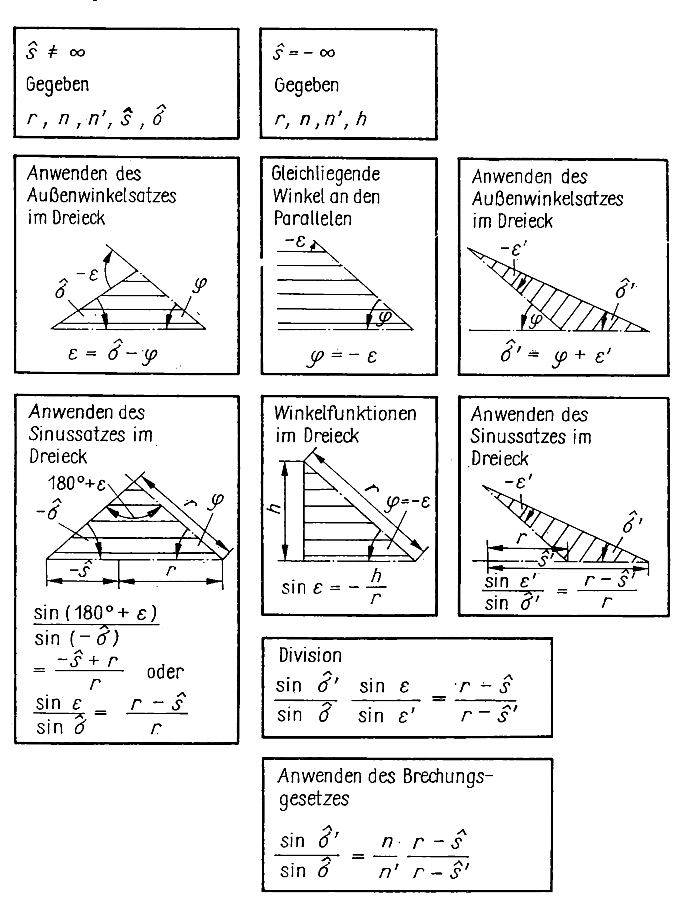
$\hat{s} \neq -\infty$	$\hat{s} = -\infty$	
$\sin \varepsilon = \dfrac{r - \hat{s}}{r} \sin \hat{\sigma}$	$\sin \varepsilon = -\dfrac{h}{r}$	(4.3a, b)
$\sin \varepsilon' = \dfrac{n}{n'} \sin \varepsilon$	$\sin \varepsilon' = \dfrac{n}{n'} \sin \varepsilon$	(4.4a, b)
$\varphi = \hat{\sigma} - \varepsilon$	$\varphi = -\varepsilon$	(4.5a, b)
$\hat{\sigma}' = \varphi + \varepsilon'$	$\hat{\sigma}' = \varphi + \varepsilon'$	(4.6a, b)
$\hat{s}' = -r \dfrac{\sin \varepsilon'}{\sin \hat{\sigma}'} + r$	$\hat{s}' = -r \dfrac{\sin \varepsilon'}{\sin \hat{\sigma}'} + r$	(4.7a, b)

Die Rechenschemata (4.1)···(4.7) werden als Normalschemata bezeichnet.

Beispiel. Eine brechende Kugelfläche habe den Radius $r = 50$ mm. Die Brechzahlen seien $n = 1$ und $n' = 1{,}5182$. Die objektseitige Schnittweite sei unendlich.

Es sind die bildseitigen Schnittweiten für die Strahlen mit den Einfallshöhen $h = 10$, 20, 30, 40 und 45 mm zu berechnen. Außerdem sind die Durchstoßhöhen der Strahlen in einer um 146,49 mm vom Scheitel entfernten achssenkrechten Ebene anzugeben.

Tabelle 4.1
Ableitung des Normalschemas



Das Ergebnis, mit dem Normalschema berechnet, enthält die Tab. 4.2. In Abb. 4.4 ist der Strahlenverlauf zeichnerisch dargestellt.

Wie sieht es nun mit der optischen Abbildung durch diese brechende Fläche aus? Das einfallende achsparallele Strahlenbündel kommt vom unendlich fernen Achsenpunkt. Dieser ist also der Objektpunkt. Bei einer punktförmigen Abbildung müßte die bildseitige Schnittweite unabhängig von der Einfallshöhe sein. Tabelle 4.2 und Abb. 4.4 zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Für abnehmende Einfallshöhe konvergiert die Schnittweite gegen den in die Tab. 4.2 zusätzlich eingetragenen Wert $s' = 146{,}49$ mm.

Abbildung 4.4 läßt erkennen, daß im Bildraum eine Konzentration der Lichtstrahlen in einem gewissen Gebiet vorliegt. Es ist also zu erwarten, daß wir mit der brechenden Kugelfläche eine geometrisch-optische Abbildung im Sinne des Ab-

schnitts 2.7.3. realisieren können. Aus diesem Grunde ordnen wir die sphärische brechende Fläche in die Behandlung der abbildenden optischen Funktions- bzw. Bauelemente ein.

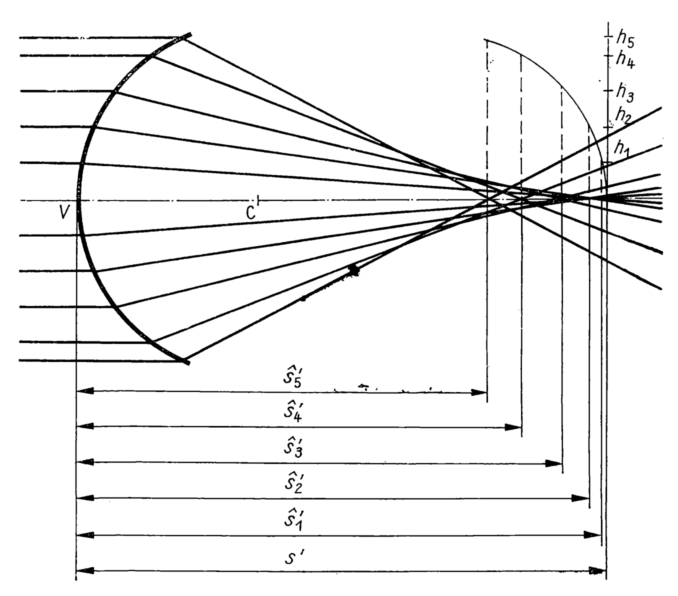


Abb. 4.4
Schnittweiten an einer brechenden Fläche

Tabelle 4.2
Bildseitige Größen an einer brechenden Fläche

h/mm	$\hat{s}'$/mm	$-\hat{y}'$/mm
0	146,49	0
10	145,21	0,089
20	141,23	0,767
30	134,09	3,000
40	122,43	9,395
45	113,55	17,368

Wir kommen auf die Problematik der Realisierung der geometrisch-optischen Abbildung im Abschnitt 4.3. zurück. Insbesondere sind Hinweise nötig, wie groß die Abweichungen von der idealen optischen Abbildung sind und wie groß die „zulässige Umgebung" für die Strahlschnittpunkte sein darf.

Das Normalschema erfordert sehr genaue Rechnungen mit hoher Stellenzahl, wenn n und n' wenig voneinander verschieden sind. Einfalls- und Brechungswinkel sind

dann auch wenig verschieden voneinander. Nach (4.5) und (4.6) ist

$$\hat{\sigma}' = \varphi + \varepsilon' = \hat{\sigma} - \varepsilon + \varepsilon'.$$

Die Differenz $\varepsilon' - \varepsilon$ wird mit zwei nahezu gleichen Zahlen berechnet und ist deshalb sehr unsicher, insbesondere, wenn es sich nicht um kleine Winkel handelt.

Wir geben eine andere Formel zur Ermittlung von $\varepsilon' - \varepsilon$ an. Mit den Additionstheoremen bilden wir

$$\frac{\sin\varepsilon' - \sin\varepsilon}{\sin\varepsilon' + \sin\varepsilon} = \frac{\cos\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\sin\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}} = \frac{\tan\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2}}{\tan\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}}$$

und erhalten zusammen mit dem Brechungsgesetz

$$\tan\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} = \frac{n' - n}{n' + n}\tan\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}. \tag{4.8}$$

Weil an Flächen, bei denen zwei Linsen verkittet sind, eine geringe Brechzahländerung praktisch häufig vorkommt, wird das um (4.8) abgeänderte Normalschema als Kittflächenschema bezeichnet.

Im letzten Schritt des Normalschemas wird $\hat{s}'$ aus

$$\hat{s}' = (\hat{s}' - r) + r$$

gewonnen. Bei $\hat{s}' \ll r$, also bei Flächen mit sehr großen Radien, stellt auch dieser Ausdruck die Differenz zweier fast gleicher großer Zahlen dar. Hier formen wir ebenfalls um.

Aus Gl. (4.7) in der Form

$$\hat{s}' = r\left(-\frac{\sin\varepsilon'}{\sin\hat{\sigma}'} + 1\right)$$

und Gl. (4.3a)

$$r(\sin\hat{\sigma} - \sin\varepsilon) = \hat{s}\sin\hat{\sigma}$$

folgt

$$\hat{s}' = \frac{\hat{s}\sin\hat{\sigma}}{\sin\hat{\sigma} - \sin\varepsilon}\left(1 - \frac{\sin\varepsilon'}{\sin\hat{\sigma}'}\right).$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\hat{s}' = \frac{\hat{s}\sin\hat{\sigma}}{\sin\hat{\sigma}'}\cdot\frac{\sin\hat{\sigma}' - \sin\varepsilon'}{\sin\hat{\sigma} - \sin\varepsilon} = \hat{s}\,\frac{\sin\hat{\sigma}}{\sin\hat{\sigma}'}\cdot\frac{\sin\frac{\hat{\sigma}' - \varepsilon'}{2}\cos\frac{\hat{\sigma}' + \varepsilon'}{2}}{\sin\frac{\hat{\sigma} - \varepsilon}{2}\cos\frac{\hat{\sigma} + \varepsilon}{2}}.$$

Die beiden Sinusfunktionen im zweiten Bruch kürzen wir wegen

$$\hat{\sigma} - \varepsilon = \varphi \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}' - \varepsilon' = \varphi$$

nach (4.5) und (4.6) und erhalten

$$\hat{s}' = \hat{s}\,\frac{\sin\hat{\sigma}}{\sin\hat{\sigma}'}\cdot\frac{\cos\dfrac{\hat{\sigma}'+\varepsilon'}{2}}{\cos\dfrac{\hat{\sigma}+\varepsilon}{2}}. \tag{4.9}$$

Der Einbau von (4.9) in das Normalschema führt zum Rechenschema für große Radien.

Durch den Einsatz der elektronischen Rechenanlagen haben die abgeleiteten Formeln nicht mehr so große praktische Bedeutung. Wir haben sie in erster Linie aus methodischen Gesichtspunkten angegeben.

4.1.3. Beziehungen für das paraxiale Gebiet

Definition des paraxialen Gebietes. Eine besondere Rolle für die Untersuchung der Verhältnisse an brechenden Rotationsflächen spielen die „flach und achsnahe" verlaufenden Lichtstrahlen. Die Formulierung „flacher Strahlenverlauf" drückt aus, daß

$$\tan\sigma \approx \sin\sigma \approx \sigma \tag{4.10}$$

und

$$\tan\sigma' \approx \sin\sigma' \approx \sigma' \tag{4.11}$$

sein soll.

Die Achsnähe ist gewährleistet, wenn

$$\tan\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi \tag{4.12}$$

ist. Wegen

$$\sin\varphi = \frac{h}{r} \tag{4.13}$$

(Abb. 4.2) ist Gl. (4.13) gleichbedeutend mit

$$\left|\frac{h}{r}\right| \ll 1. \tag{4.14}$$

Der Bereich um die optische Achse, in dem die Forderungen (4.10)···(4.14) gelten, wird paraxiales Gebiet oder Gaußscher Raum oder fadenförmiger Raum genannt.

Die Bezeichnung „achsnaher Raum" ist ebenfalls üblich. Dabei ist aber zu beachten, daß nicht allein die Achsnähe, sondern auch die kleine Strahlneigung vorauszusetzen ist.

Die im paraxialen Gebiet verlaufenden Lichtstrahlen heißen Paraxialstrahlen.

Die Bedeutung des paraxialen Gebietes liegt darin, daß

— geschlossene Beziehungen für die paraxialen Bildraumgrößen gelten,
— ein schneller Überblick über die grundsätzlichen Verhältnisse an brechenden Rotationsflächen erhalten wird sowie
— Bezugs- und Hilfsgrößen für die Beschreibung des Strahlenverlaufs im außeraxialen Gebiet

gewonnen werden.

Die *Abbesche Invariante* stellt den Zusammenhang zwischen der objektseitigen und der bildseitigen Schnittweite von Paraxialstrahlen her.

Die Ableitung der Abbeschen Invarianten (Abb. 4.5 und Tab. 4.3) geht von der Definition des Winkelverhältnisses

$$\gamma' = \frac{\tan \sigma'}{\tan \sigma}$$

aus. Im paraxialen Gebiet kann dafür

$$\gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma} \tag{4.15}$$

geschrieben werden.

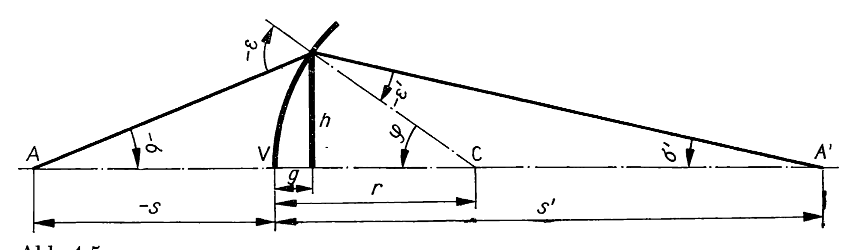


Abb. 4.5
Zur Ableitung der Abbeschen Invarianten

Das Ergebnis der Ableitung in Tab. 4.3 lautet

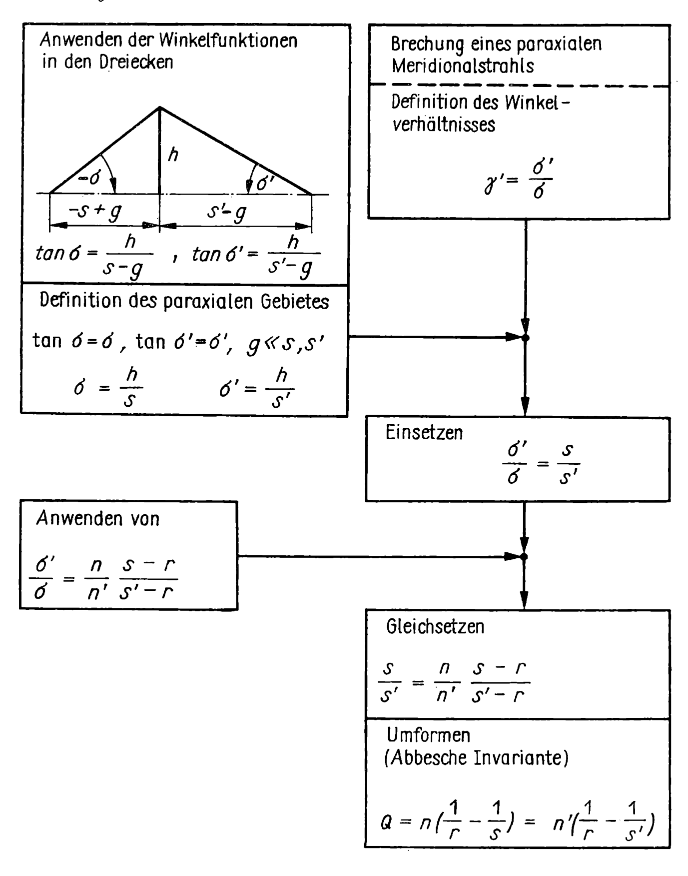
$$Q = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right). \tag{4.16}$$

Die Größe Q kann sowohl mit den objektseitigen wie auch mit den bildseitigen Größen berechnet werden. Sie bleibt an der brechenden Fläche konstant und wird als Abbesche Invariante bezeichnet.

Auflösen von Gl. (4.16) nach s' ergibt

$$s' = \frac{n'}{\dfrac{n}{s} + \dfrac{n' - n}{r}}. \tag{4.17}$$

Tabelle 4.3
Ableitung der Abbeschen Invarianten



Daraus folgt:

> Im paraxialen Gebiet ist die bildseitige Schnittweite unabhängig von der Strahlneigung und damit von der Einfallshöhe. Sämtliche Paraxialstrahlen, die von einem Objektpunkt ausgehen, schneiden sich bildseitig in einem Punkt.

Im paraxialen Gebiet liegt eine punktförmige Abbildung vor. Strenggenommen ist diese Aussage jedoch ohne praktische Bedeutung. Exakt gilt Gl. (4.17) nur für die Einfallshöhe Null, also für einen Lichtstrahl, der längs der optischen Achse verläuft (daher auch die Bezeichnung „fadenförmiger Raum"). Ein einzelner Lichtstrahl läßt sich aber nicht realisieren und könnte auch kein Bild ergeben, weil sich dazu Strahlen schneiden müssen. Die eigentliche Bedeutung der Gl. (4.17) liegt in ihrem Näherungscharakter. Wir verweisen auf das Beispiel der brechenden Fläche, für die das Strahldurchrechnungsergebnis in der Tab. 4.2 enthalten ist. Mit ab-

nehmender Einfallshöhe konvergiert die Schnittweite gegen den paraxialen Wert $s' = 146{,}49$ mm.

Die achssenkrechte Ebene, die den paraxialen Bildpunkt enthält, ist die Gaußsche Bildebene.

Die *Helmholtz-Lagrangesche Invariante* vermittelt den Zusammenhang zwischen dem Winkelverhältnis und dem Abbildungsmaßstab. Die Definition des Abbildungsmaßstabs als Verhältnis der lateralen Abmessungen des Bildes und des Objektes ist der Ableitung in der Tab. 4.4 unter Verwendung von Abb. 4.6 zugrunde gelegt. Das Ergebnis lautet:

$$ny\sigma = n'y'\sigma'. \tag{4.18}$$

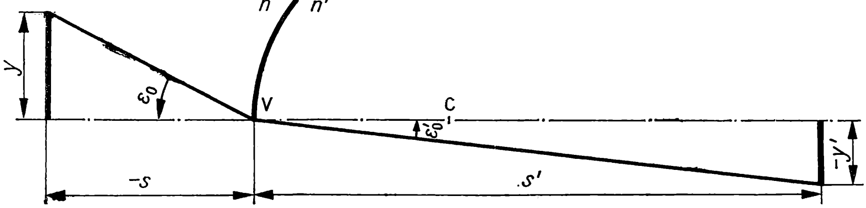


Abb. 4.6
Zur Ableitung der Helmholtz-Lagrangeschen Invarianten

Das Produkt $ny\sigma$ stellt eine Invariante der paraxialen Abbildung an brechenden Flächen dar, die als Helmholtz-Lagrangesche Invariante bezeichnet wird.

Aus der Helmholtz-Lagrangeschen Invariante folgen die Gleichungen

$$\beta'\gamma' = \frac{n}{n'} \tag{4.19}$$

und wegen $\sigma'/\sigma = s/s'$

$$\beta' = \frac{n}{n'}\,\frac{s'}{s}. \tag{4.20}$$

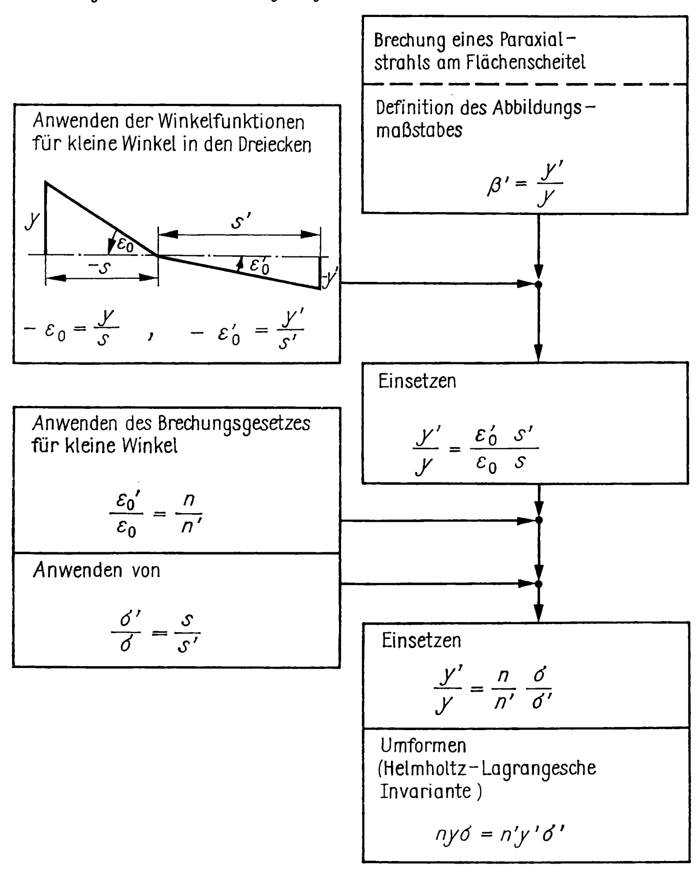
Der Abbildungsmaßstab für die Gaußsche Bildebene ist also konstant.

Kardinalelemente. Die optische Achse enthält ausgezeichnete Punktepaare, die eine besondere Bedeutung für den paraxialen Strahlenverlauf haben. Diese als Kardinalpunkte bezeichneten Punktepaare sind die Hauptpunkte, die Knotenpunkte und die Brennpunkte.

Ein Objekt, das in der durch den objektseitigen Hauptpunkt H gehenden achssenkrechten Ebene steht, wird mit dem Abbildungsmaßstab $\beta' = 1$ in die achssenkrechte Ebene abgebildet, die den Hauptpunkt H' enthält.

Der objektseitige Hauptpunkt und der bildseitige Hauptpunkt sind also zueinander konjugiert.

Tabelle 4.4
Ableitung der Helmholtz-Lagrangeschen Invarianten



Ein Lichtstrahl, der die optische Achse im objektseitigen Knotenpunkt N unter dem Winkel σ schneidet, schneidet die optische Achse im bildseitigen Knotenpunkt N' unter dem gleichen Winkel ($\sigma = \sigma'$). Für die Knotenpunkte ist das Winkelverhältnis $\gamma' = 1$.

Der objektseitige Knotenpunkt und der bildseitige Knotenpunkt sind also zueinander konjugiert.

Der objektseitige Brennpunkt F wird in den unendlich fernen Achsenpunkt abgebildet (bildseitige Schnittweite des objektseitigen Brennpunktstrahls $s'_F = \infty$). Der bildseitige Brennpunkt F' ist das Bild des unendlich fernen Achsenpunktes (objektseitige Schnittweite des bildseitigen Brennpunktstrahls $s_{F'} = \infty$).

Objekt- und bildseitiger Brennpunkt sind nicht zueinander konjugiert.

Die Kardinalelemente der brechenden Rotationsfläche sind in die Abb. 4.7 eingezeichnet. Die Schnittweiten der Haupt-, Knoten- und Brennpunktstrahlen werden in der Tab. 4.5 abgeleitet. Daraus folgt:

> Die Hauptpunkte H und H′ fallen mit dem Flächenscheitel V, die Knotenpunkte N und N′ mit dem Krümmungsmittelpunkt C zusammen.

Brennweiten. Als Rechengrößen haben die Brennweiten eine besondere Bedeutung. Es gilt:

> Die $\frac{\text{objektseitige}}{\text{bildseitige}}$ Brennweite ist der Abstand des $\frac{\text{objektseitigen}}{\text{bildseitigen}}$ Brennpunktes vom $\frac{\text{objektseitigen}}{\text{bildseitigen}}$ Hauptpunkt.

(Die Formulierung schließt die Vorzeichenregel ein. Bezugspunkte für die Brennweiten sind die Hauptpunkte.)

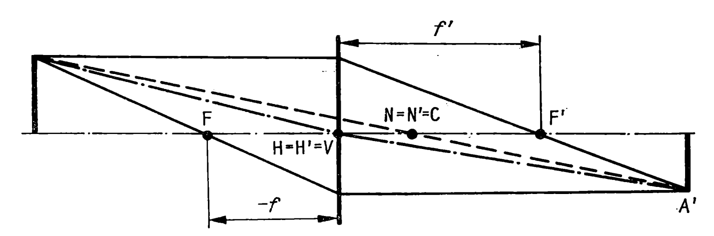


Abb. 4.7
Kardinalelemente und ausgezeichnete Strahlen für die brechende Fläche

In der Tab. 4.5 wird abgeleitet, daß für die Brennweiten der brechenden Rotationsfläche

$$f = -\frac{r}{\frac{n'}{n} - 1}, \tag{4.21}$$

$$f' = \frac{\frac{n'}{n} r}{\frac{n'}{n} - 1}, \tag{4.22}$$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \tag{4.23}$$

gilt.

Zeichnerische Konstruktion von Bildort und -größe. Die Kenntnis der Kardinalelemente einer brechenden Fläche gestattet in einer einfachen Weise die zeichnerische Ermittlung von Bildort und -größe. Die achssenkrechten Ebenen, die durch die

Spezialfall $\beta' = 1$ ($y'_{H'} = y_H$) (Definition der Hauptpunkte) $n\sigma_H = n'\sigma'_{H'}$	Spezialfälle (Definition der Brennpunkte) $s' = \infty$ $s = -\infty$ $s = s_F$ $s' = s'_{F'}$	Spezialfall $\gamma' = 1 (\sigma_N = \sigma'_{N'})$ (Definition der Knotenpunkte) $s_N = s'_{N'}$
Vergleich mit dem Brechungsgesetz für kleine Winkel (Brechung am Flächenscheitel) $n\varepsilon_0 = n'\varepsilon'_0$	Schnittweiten der *Brennpunktstrahlen* $s_F = -\frac{nr}{n' - n}$ $s'_{F'} = \frac{n'r}{n' - n}$	Vergleich mit der Abbeschen Invarianten ($n' \neq n$) $\frac{1}{r} - \frac{1}{s_N} = \frac{1}{r} - \frac{1}{s'_{N'}} = 0$
Schlußfolgerung: Objekt in der Scheitelebene wird mit dem Abbildungsmaßstab $\beta' = 1$ in sich abgebildet.	Definition der Brennweiten (einschließlich Vorzeichenregel) $f = s_F - s_H$ $f' = s'_{F'} - s'_{H'}$	Schlußfolgerung: Der Strahl, der durch den Krümmungsmittelpunkt geht, wird nicht abgelenkt.
Schnittweiten des *Hauptpunktstrahls* $s_H = 0$ $s'_{H'} = 0$	Anwenden von $s_H = s'_{H'} = 0$ $f = -\frac{nr}{n' - n}$ $f' = \frac{n'r}{n' - n}$	Schnittweiten des *Knotenpunktstrahls* $s_N = r$ $s'_{N'} = r$

Hauptpunkte gehen und die wir Hauptebenen nennen, werden im Maßstab 1:1 aufeinander abgebildet. Ein Lichtstrahl muß die objektseitige Hauptebene in der gleichen Entfernung von der optischen Achse durchstoßen, in der er die objektseitige Hauptebene durchstößt. Für die Bildkonstruktion gibt es drei ausgezeichnete Strahlen (Abb. 4.7).

> Der objektseitig achsparallele Strahl geht bildseitig durch den Brennpunkt F'.
> Der objektseitige Brennpunktstrahl verläuft bildseitig achsparallel.
> Der objektseitige Knotenpunktstrahl wird so parallel zu sich versetzt, daß er durch den bildseitigen Knotenpunkt geht.

Brennpunkt-Koordinatensystem. Bisher verwendeten wir zur Messung von Objekt- und Bildweite die Entfernungen vom Flächenscheitel, also die Schnittweiten. Im Brennpunkt-Koordinatensystem werden die Ursprünge der Koordinatensysteme in die Brennpunkte gelegt. Es eignet sich besonders für die Lösung von Aufgaben der Optik-Konstruktion.

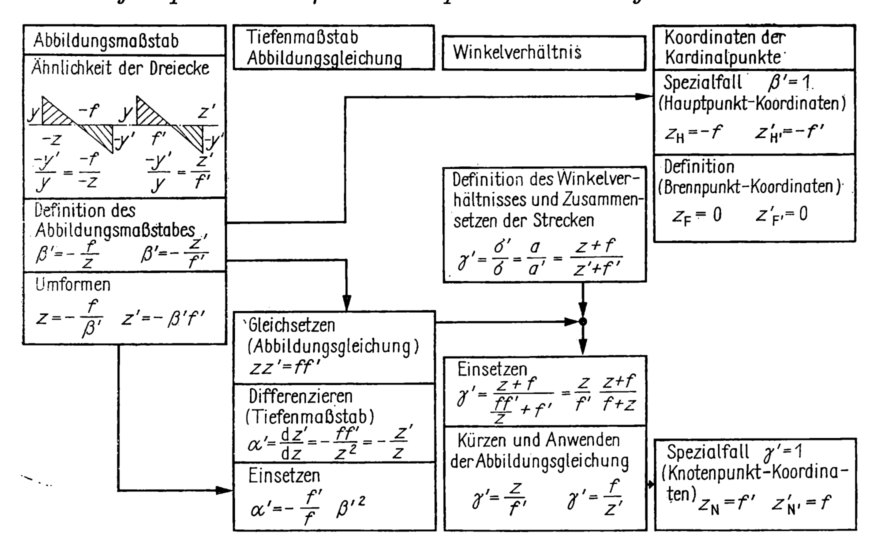
In der Tab. 4.6 werden die Beziehungen für die Koordinaten der Kardinalpunkte, für den Abbildungsmaßstab und für das Winkelverhältnis angegeben. Daneben wird der Tiefenmaßstab definiert durch

$$\alpha' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}. \tag{4.24}$$

Es ist

$$\alpha' = -\frac{f'}{f}\,\beta'^2. \tag{4.25}$$

Tabelle 4.6
Berechnung der paraxialen Größen im Brennpunkt-Koordinatensystem



Wir heben die in der Tab. 4.6 abgeleiteten Beziehungen für die Berechnung des paraxialen Bildortes (Newtonsche Abbildungsgleichung)

$$zz' = ff' \tag{4.26}$$

und des paraxialen Abbildungsmaßstabs

$$\beta' = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'} \tag{4.27}$$

hervor.

Hauptpunkt-Koordinatensystem. In manchen Fällen, besonders bei der Behandlung der optischen Abbildung durch Fotoobjektive und durch Projektionsobjektive, ist es günstig, die Objektweite sowie die Bildweite von den Hauptpunkten aus zu messen. Diese fallen dann mit den Ursprüngen der Koordinatensysteme zusammen.

Die für das Brennpunkt-Koordinatensystem abgeleiteten Formeln lassen sich in die Formeln für das Hauptpunkt-Koordinatensystem umschreiben, wenn nach Abb. 4.8

$$a = z + f, \qquad a' = z' + f' \tag{4.28a, b}$$

gesetzt wird (Tab. 4.7).

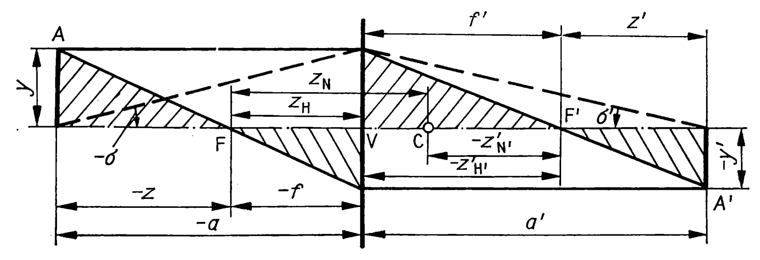


Abb. 4.8
Haupt- und Brennpunktkoordinaten

Während die Abbildungsgleichung im Brennpunkt-Koordinatensystem nur die universellen Brennweiten enthält, sind die im Hauptpunkt-Koordinatensystem gültigen Beziehungen für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{n}{n'}\frac{a'}{a} \tag{4.29}$$

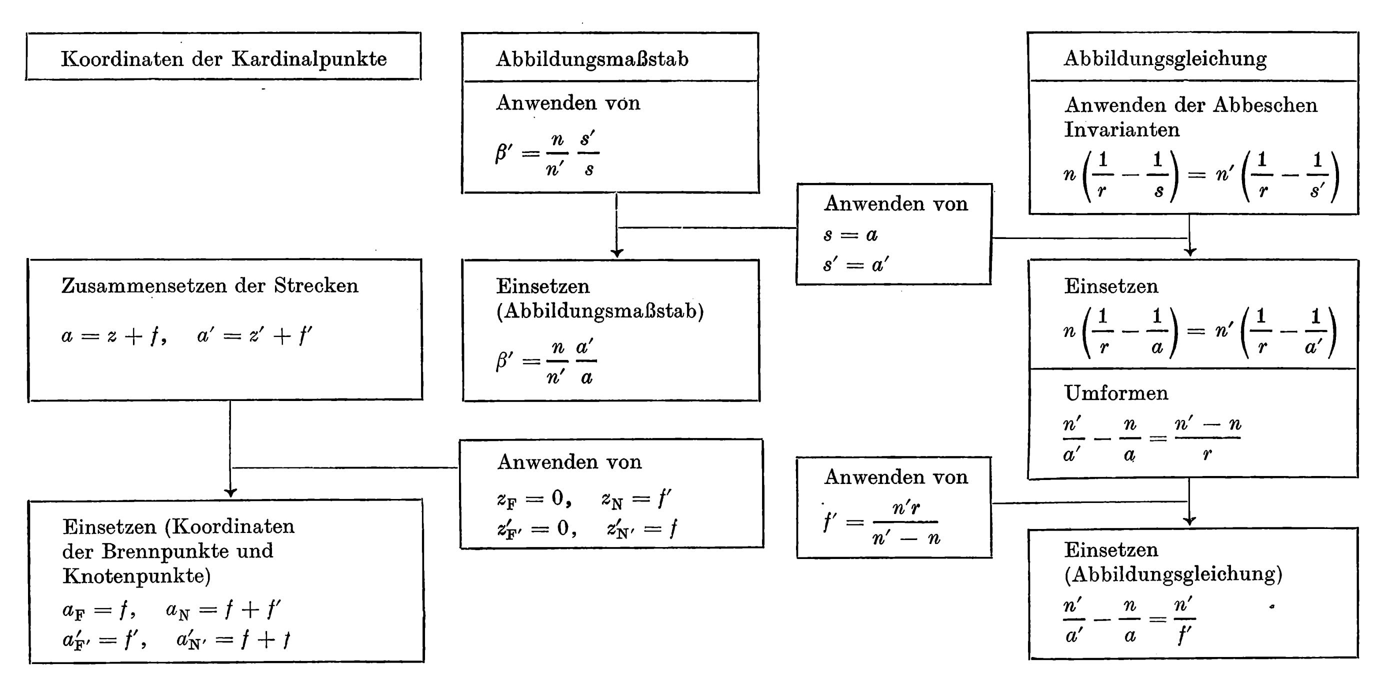
und für die Abbildungsgleichung

$$\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n'}{f'}, \tag{4.30}$$

in die die Brechzahlen eingehen, spezifisch für das paraxiale Gebiet der brechenden Fläche.

(Zu beachten ist, daß die Objektweite a nur mit der Schnittweite s identisch ist, wenn der Paraxialstrahl vom Achsenpunkt des Objektes ausgeht.)

Tabelle 4.7
Berechnung der paraxialen Größen im Hauptpunkt-Koordinatensystem



4.1.4. Flächenfolgen

Übergangsbeziehungen für Meridional- und Paraxialstrahlen. Flächenfolgen bestehen aus zueinander zentrierten Flächen. Wir betrachten brechende Rotationsflächen, deren optische Achsen zusammenfallen.

> Bei einer zentrierten Folge aus Rotationsflächen liegen die Krümmungsmittelpunkte der Scheitelkreise auf einer Geraden, die die optische Achse der Flächenfolge darstellt.

Die Größen des Bildraumes der Flächenfolge bestimmen wir, indem wir Lichtstrahlen von Fläche zu Fläche durchrechnen. Für die Meridionalstrahlen gelten die Formeln (4.3) bis (4.7) des Normalschemas. Zur Bestimmung der paraxialen Größen der Einzelflächen sind die Formeln des Abschnitts 4.1.3. anzuwenden.

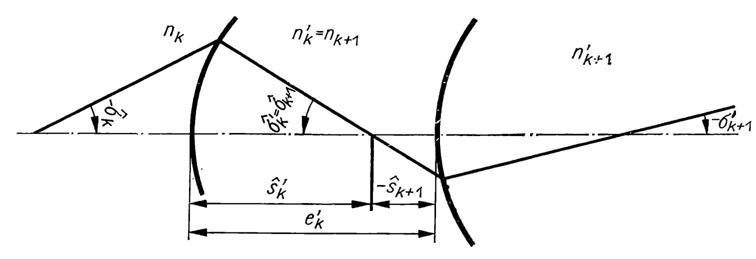


Abb. 4.9
Zu den Übergangsbeziehungen

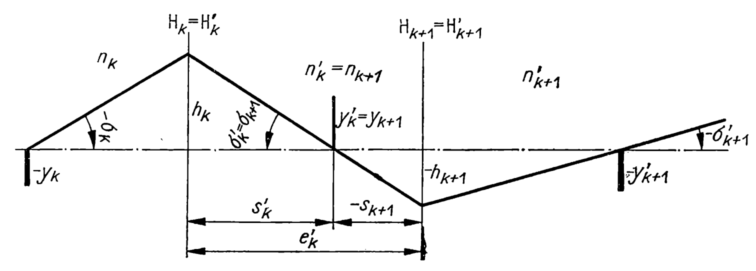


Abb. 4.10
Zu den Übergangsbeziehungen für das paraxiale Gebiet

Die objektseitigen Größen einer in der Flächenfolge stehenden Fläche müssen aus den bildseitigen Größen der vorangehenden Fläche berechnet werden.

Für *achsferne Meridionalstrahlen* lesen wir in der Abb. 4.9 folgende Übergangsbeziehungen ab:

$$n_{k+1} = n'_k, \tag{4.31a}$$

$$\hat{\sigma}_{k+1} = \hat{\sigma}'_k, \tag{4.31b}$$

$$\hat{s}_{k+1} = \hat{s}'_k - e'_k. \tag{4.31c}$$

Für Paraxialstrahlen gilt nach Abb. 4.10

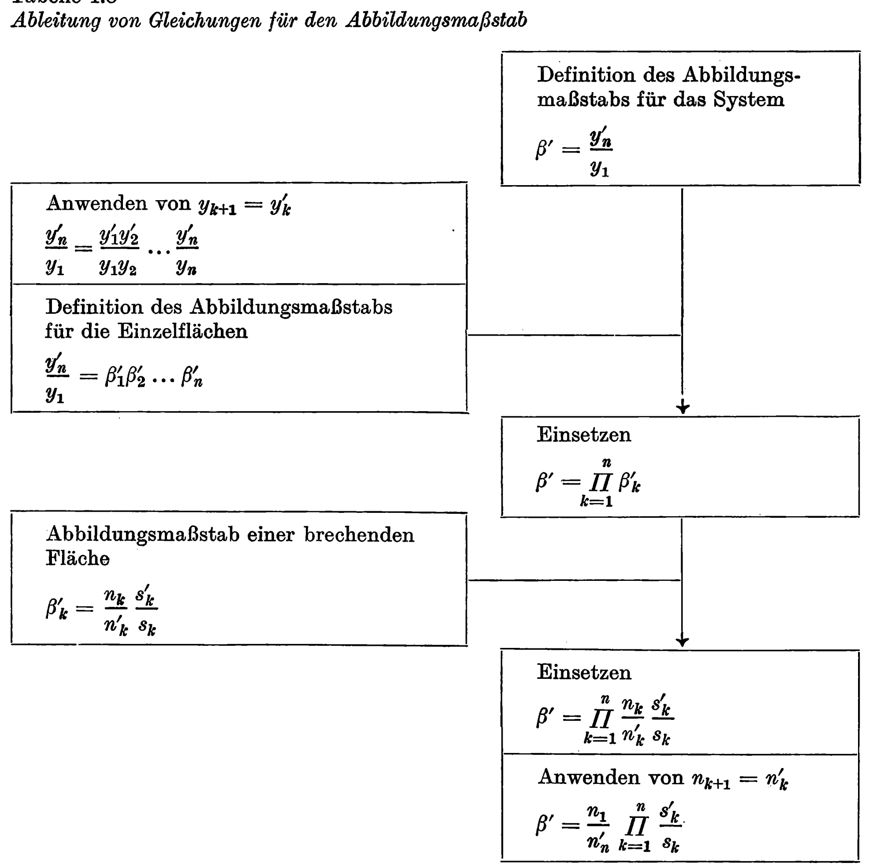
$$\begin{aligned} n_{k+1} &= n'_k, \\ \sigma_{k+1} &= \sigma'_k, \\ s_{k+1} &= s'_k - e'_k, \\ y_{k+1} &= y'_k, \\ h_{k+1} &= h_k - e'_k\sigma'_k. \end{aligned} \tag{4.32a⋯e}$$

Die *paraxialen Größen der Flächenfolge* lassen sich aus den paraxialen Schnittweiten berechnen. Für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{y'_n}{y_1} \tag{4.33}$$

einer Folge aus n brechenden Flächen werden in der Tab. 4.8 (Grundlage ist Abb. 4.11)

Tabelle 4.8
Ableitung von Gleichungen für den Abbildungsmaßstab



und in der Tab. 4.9 die Beziehungen

$$\beta' = \prod_{k=1}^{n} \beta'_k, \tag{4.34}$$

$$\beta' = \frac{n_1}{n'_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{s'_k}{s_k} \quad \text{und} \tag{4.35}$$

$$\beta' = \frac{n_1}{n'_n} \frac{s'_n}{s_1} \frac{1}{\omega_n} \tag{4.36}$$

abgeleitet.

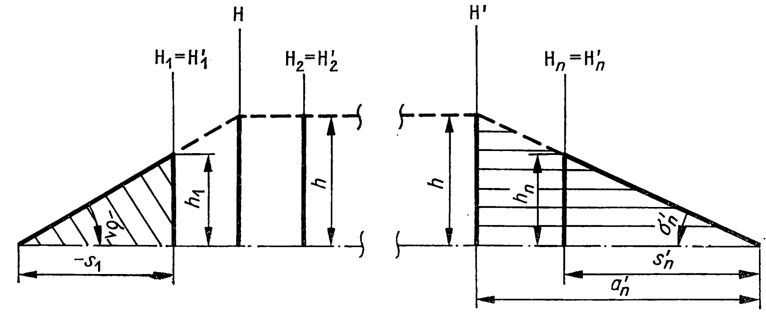


Abb. 4.11
Zur Ableitung von Abbildungsmaßstab und Brennweite für ein Flächensystem

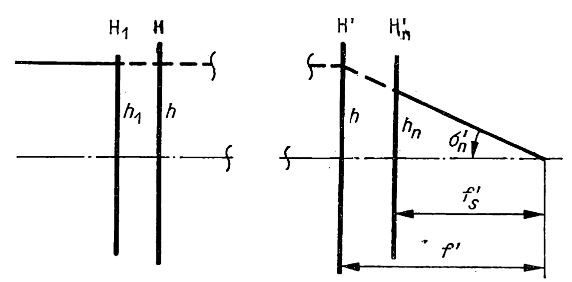


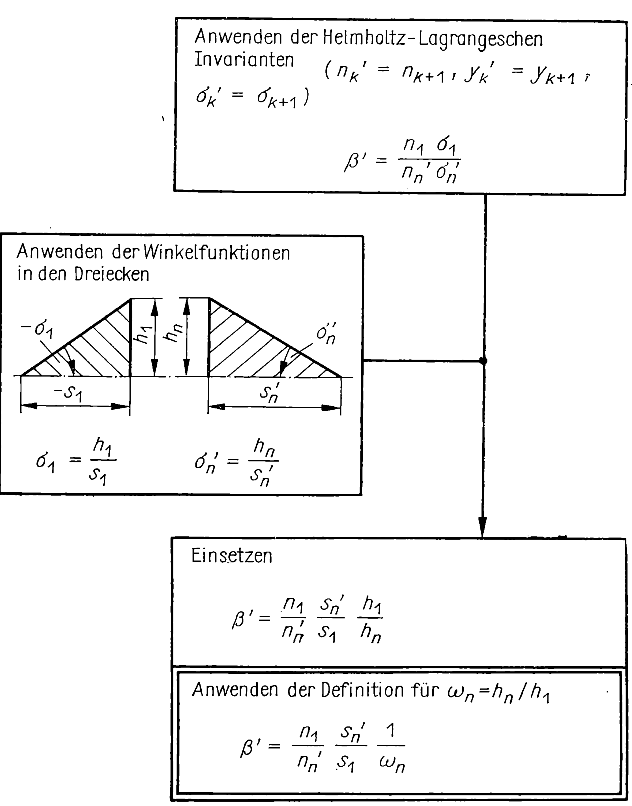
Abb. 4.12
Zur Brennweite für ein Flächensystem

Die Berechnung der Brennweite aus den Schnittweiten an den Einzelflächen ist in der Tab. 4.10 auf der Basis der Abb. 4.12 durchgeführt worden. Folgende Beziehungen seien hervorgehoben:

$$\begin{aligned} f' &= s'_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{s'_k}{s_k}, \quad s_1 = -\infty\,, \\ f' &= s'_n \frac{1}{\omega_n}, \quad s_1 = -\infty\,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Kardinalelemente von zwei Flächen. Zwei brechende Flächen stellen eine Linse dar. Es ist u. a. auch deshalb notwendig, die Kardinalelemente eines Systems aus zwei zentrierten brechenden Flächen zu berechnen.

Tabelle 4.9
Ableitung einer Gleichung für den Abbildungsmaßstab



Als Hilfsmittel verwenden wir die Abb. 4.13 (S. 194). Dieser — sowie der Ableitung der Beziehungen — liegen zwei Gesichtspunkte zugrunde:

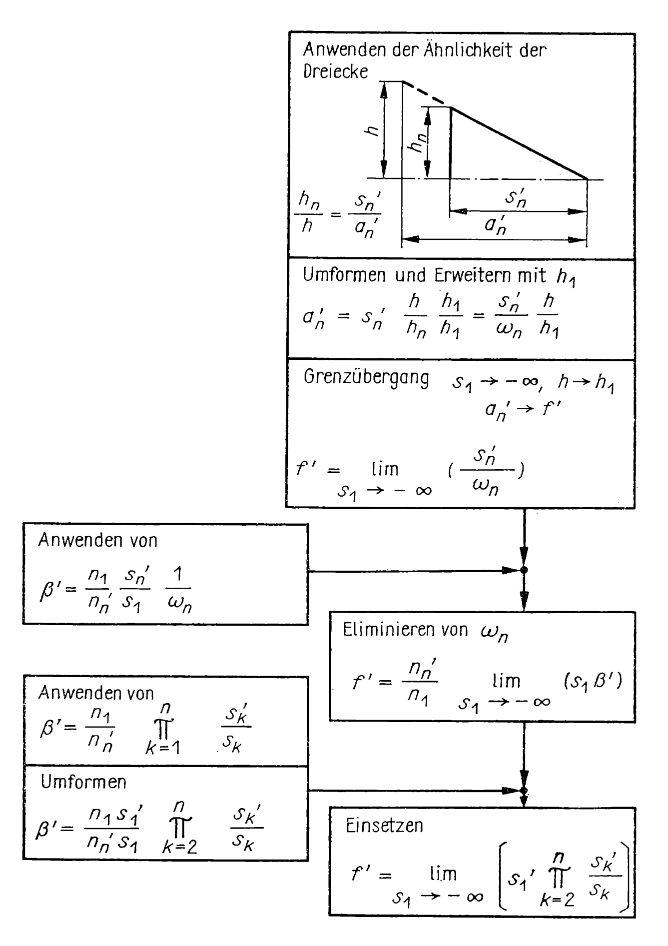
— Der bildseitige Brennpunkt des Ersatzsystems ist das vom zweiten System entworfene Bild des Brennpunktes F_1', weil alle achsparallel einfallenden Strahlen durch F_1' und F' gehen müssen.

— Die Verlängerung eines achsparallel einfallenden Strahls schneidet den ihr zugeordneten, durch das System gehenden Strahl in einem Punkt der bildseitigen Hauptebene H′ des Ersatzsystems (Definition der Hauptebenen $\beta' = 1$).

Als Rechenhilfsgröße wird die optische Tubuslänge verwendet. Für diese gilt folgende Definition:

> Die optische Tubuslänge, auch optisches Intervall genannt, ist der Abstand des objektseitigen Brennpunktes eines Systems vom bildseitigen Brennpunkt des vorangehenden Systems.

Tabelle 4.10
Ableitung der Gleichung für die Brennweite einer Flächenfolge



Bei zwei Systemen ist die optische Tubuslänge t der Abstand des Brennpunktes F_2 vom Brennpunkt F_1'. Nach Abb. 4.13 gilt:

$$t = e_1' - f_1' + f_2. \tag{4.38}$$

Die Ableitung der Beziehungen ist in den Tab. 4.11 (S. 195) und 4.12 (S. 198) enthalten. Es ergibt sich für die Brennweiten des Ersatzsystems

$$f = \frac{f_1 f_2}{t}, \tag{4.39}$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{t}, \tag{4.40}$$

und für den Abstand der Hauptebenen H und H′ von den Hauptebenen H_1 bzw. H_2'

$$a_{1H} = \frac{f_1 e_1'}{t}, \tag{4.41}$$

$$a_{2H'}' = \frac{f_2' e_1'}{t}. \tag{4.42}$$

Bei mehreren Abbildungen müssen die Beziehungen (4.38)···(4.42) auf jeweils zwei aufeinanderfolgende Systeme wiederholt angewendet werden. Wir können aber unter der Voraussetzung, daß für jedes Einzelsystem

$$f' = -f$$

gilt, noch einige weitere Gleichungen ableiten.

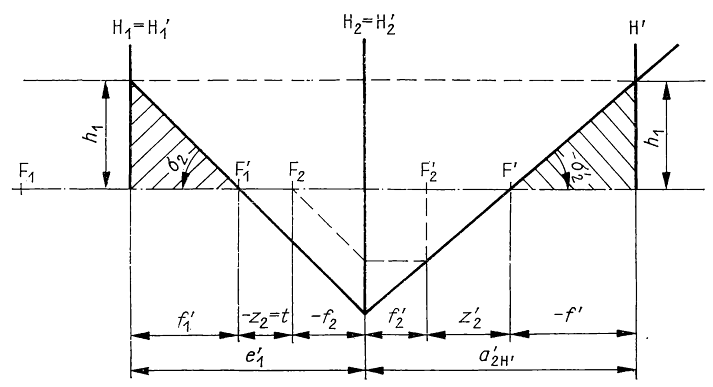


Abb. 4.13
Brennpunkt und bildseitige Hauptebene für zwei Flächen

Es ist zweckmäßig, in die weiteren Überlegungen die Brechkraft einzuführen.

Die Brechkraft F' eines optischen Systems ist der Kehrwert seiner bildseitigen Brennweite:

$$F' = \frac{1}{f'}. \tag{4.43}$$

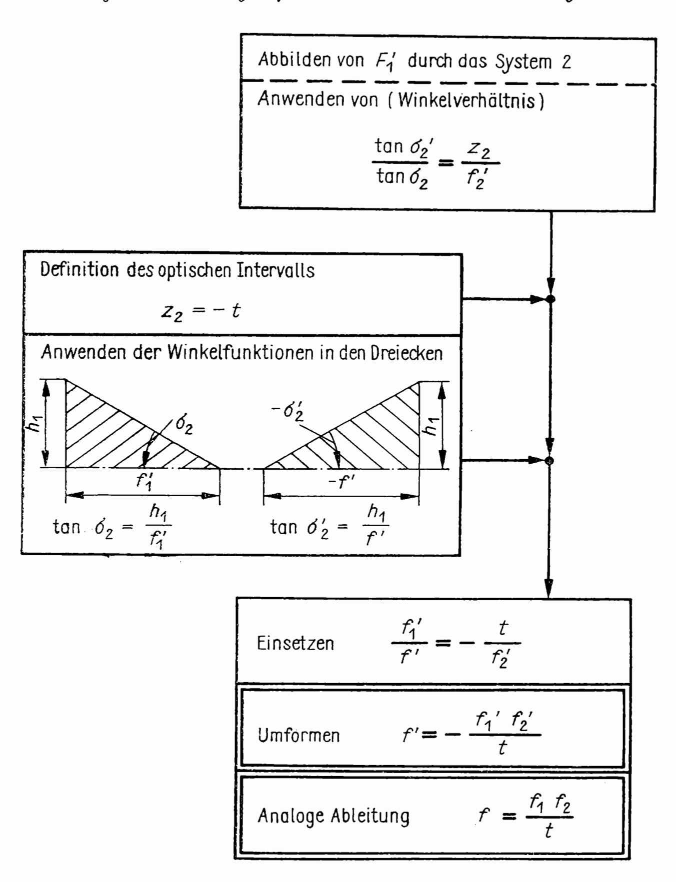
Als weitere Hilfsgrößen verwenden wir die Quotienten aus den Durchstoßhöhen eines Lichtstrahls durch die Hauptebenen innerhalb des Systems und der Durchstoßhöhe in der Hauptebene der ersten Teilabbildung. Wir setzen

$$\omega_k = \frac{h_k}{h_1}. \tag{4.44}$$

Es gilt

$$\omega_k = \frac{h_2}{h_1}\frac{h_3}{h_2}\frac{h_4}{h_3}\cdots\frac{h_k}{h_{k-1}}. \tag{4.45}$$

Tabelle 4.11
Ableitung der Gleichungen für die Brennweite des Ersatzsystems



Die Höhenverhältnisse in aufeinanderfolgenden Hauptebenen innerhalb des Systems betragen (Abb. 4.14):

$$\frac{h_\nu}{h_{\nu-1}} = \frac{a_\nu}{a'_{\nu-1}}.$$

Damit ergibt sich

$$\omega_k = \frac{a_2 a_3 \dots a_k}{a_1' a_2' \dots a_{k-1}'} \quad \text{oder} \quad \omega_k = \prod_{\nu=1}^{k-1} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu'}. \tag{4.46}$$

Im Spezialfall $a_1 = -\infty$ wird $a_1' = f_1'$ und

$$\omega_2 = a_2 F_1' \quad (s_1 = -\infty).$$

Außerdem ist (Abb. 4.15)

$$a_2 = f'_1 - e'_1$$

oder

$$a_2 = \frac{1 - e'_1 F'_1}{F'_1}.$$

Es gilt also

$$\omega_2 = 1 - e'_1 F'_1 \quad (a_1 = -\infty). \tag{4.47}$$

Es ist sinnvoll, noch die Definition

$$\omega_1 = 1 \tag{4.48}$$

hinzuzufügen.

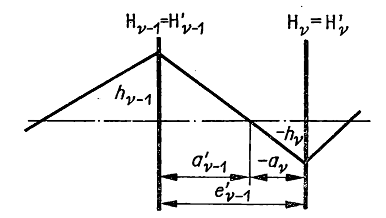


Abb. 4.14
Zur Ableitung des Höhenverhältnisses

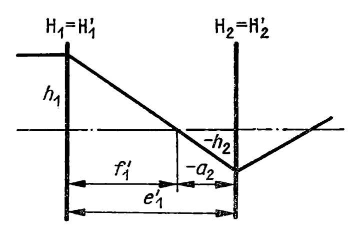


Abb. 4.15
Zur Ableitung der Gleichung für ω_2 bei unendlicher Objektweite

Für die *Brechkraft* eines Systems mit $f'_k = -f_k$ gilt entsprechend der in der Tab. 4.13 (S. 199) durchgeführten Ableitung

$$F' = \sum_{k=1}^{n} \omega_k F'_k \quad (a_1 = -\infty). \tag{4.49}$$

In einem System, in dem die Hauptebenen aller Einzelabbildungen zusammenfallen, sind sämtliche $\omega_k = 1$. Wir erhalten:

$$F' = \sum_{k=1}^{n} F'_k, \quad (\text{alle } \omega_k = 1). \tag{4.50}$$

In Worten:

> In einem optischen System mit $f'_k = -f_k$, in dem sämtliche Hauptebenen zusammenfallen, setzen sich die Einzelbrechkräfte additiv zur Gesamtbrechkraft zusammen.

Für die Hauptebenenabstände des Gesamtsystems von den Hauptebenen H_1 bzw. H'_2 ergeben sich bei zwei Abbildungen mit $f'_k = -f_k$ ebenfalls einfache Beziehungen.

Aus Gl. (4.42) folgt mit Gl. (4.40)

$$a'_{2H'} = -\frac{e'_1 f'}{f'_1}. \tag{4.51a}$$

e'_1 eliminieren wir mittels (4.47), so daß wir

$$a'_{2H'} = (\omega_2 - 1) f' \quad (a_1 = -\infty) \tag{4.51b}$$

erhalten.

Entsprechend läßt sich Gl. (4.41) in

$$a_{1H} = -(\omega_2 - 1)\frac{f' f'_1}{f'_2} \quad (a_1 = -\infty) \tag{4.52b}$$

und in

$$a_{1H} = \frac{e'_1 f'}{f'_2} \tag{4.52a}$$

umformen.

Abbildungsgleichung für $f' = -f$. Im Unterschied zu den Hauptebenen der einzelnen brechenden Fläche fallen die Hauptebenen zweier Flächen mit nichtverschwindendem Abstand nicht zusammen. Für

$$f' = -f \tag{4.53}$$

ist

$$z_N = z_H \quad \text{und} \quad z'_{N'} = z'_{H'}. \tag{4.54}$$

(Die Beziehungen $z_N = f'$, $z'_{N'} = f$, $z_H = -f$, $z'_{H'} = -f'$ aus Tab. 4.4 gelten auch für das Ersatzsystem.)

> In einem optischen System mit $f = -f'$ fallen der objektseitige Hauptpunkt und der objektseitige Knotenpunkt sowie der bildseitige Hauptpunkt und der bildseitige Knotenpunkt zusammen.

Nach Abb. 4.16 ergibt sich für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -\frac{a' - f'}{f'} = \frac{f'}{a + f'}. \tag{4.55}$$

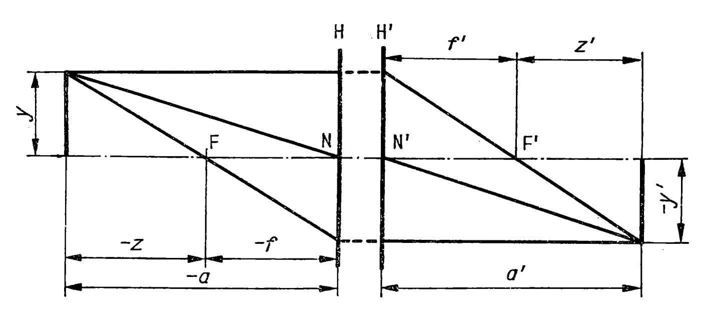


Abb. 4.16
Zur Ableitung der Abbildungsgleichung bei $f' = -f$

Tabelle 4.12
Ableitung der Gleichungen für die Hauptebenenlage des Ersatzsystems

	Abstand des Hauptpunktes H′ vom Hauptpunkt H'_2 $a'_{2H'} = f'_2 + z'_2 - f'$
Abbilden von F'_1 durch das System 2 Anwenden der Abbildungsgleichung ($z_2 = -t$) $z'_2 = -\frac{f_2 f'_2}{t}$	↓
Brennweite des Gesamtsystems $f' = -\frac{f'_1 f'_2}{t}$	↓
	Einsetzen $a'_{2H'} = f'_2 - \frac{f_2 f'_2}{t} + \frac{f'_1 f'_2}{t}$
	Umformen $a'_{2H'} = \frac{f'_2(t - f_2 + f'_1)}{t}$
Definition der optischen Tubuslänge $t = e'_1 - f'_1 + f_2$	↓
	Einsetzen $a'_{2H'} = \frac{f'_2 e'_1}{t}$
	Analoge Ableitung $a_{1H} = \frac{f_1 e'_1}{t}$

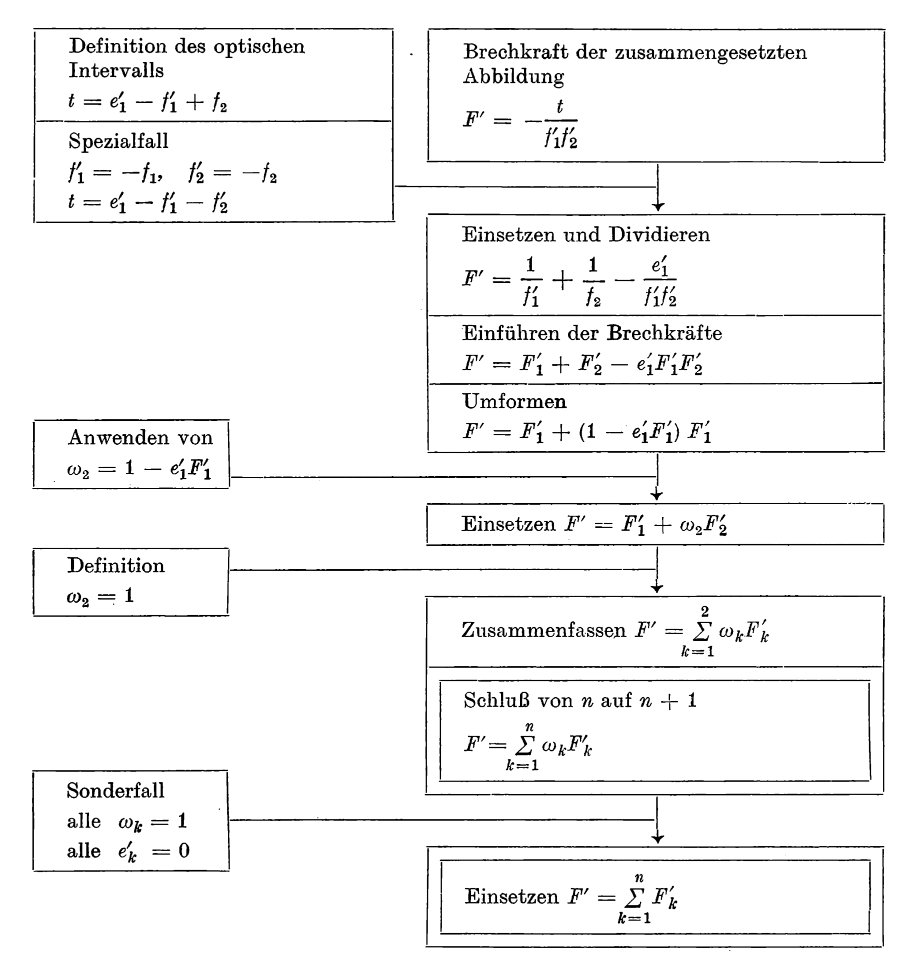
Daraus folgen die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \tag{4.56a}$$

und die Beziehungen

$$\beta' = \frac{a'}{a}, \quad a = f'\left(\frac{1}{\beta'} - 1\right), \quad a' = f'(1 - \beta'). \tag{4.56b⋯d}$$

Tabelle 4.13
Ableitung der Gleichung für die Brechkraft einer Flächenfolge
(*Brechkraft eines Systems* aus n Einzelabbildungen mit $f'_k = -f_k$)



Zeichnerische Bestimmung von Bildort und -größe. An der Abbildung eines Objektes können entsprechend unseren Ausführungen nacheinander mehrere optische Elemente oder Systeme beteiligt sein. Beim Mikroskop z. B. erzeugt das Objektiv ein reelles Zwischenbild des Objektes, das Okular liefert davon ein virtuelles Endbild (Abb. 4.17).

Für das paraxiale Gebiet brauchen wir zur Berechnung von Bildort und Bildgröße nur die abgeleiteten Beziehungen wiederholt anzuwenden. Das zeichnerische Verfahren können wir schrittweise ausführen, indem wir die Zwischenbilder nacheinander

ermitteln. Dabei kann lediglich die Schwierigkeit auftreten, daß ein Zwischenbild hinter der Hauptebene H des nächsten Systems entsteht. Für dieses ist das Zwischenbild ein virtuelles Objekt. Wichtig ist weiter, daß wir auch innerhalb einer Abbildungsfolge Strahlen in Zwischenbildpunkten beginnen lassen können. Wir nehmen dabei nur an, daß wir den vorausgehenden Strahlenverlauf noch nicht kennen.

An den Beispielen der Abb. 4.18a···f soll die zeichnerische Methode zur Bestimmung von Bildort und -größe für einige Fälle veranschaulicht werden.

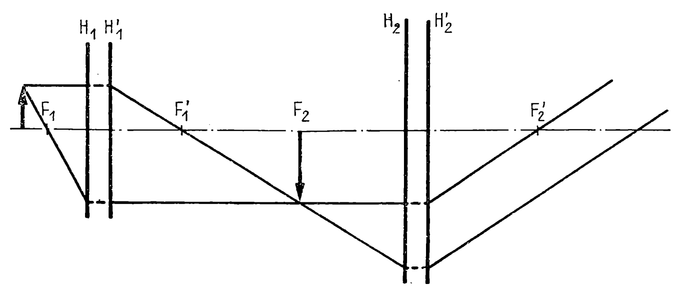


Abb. 4.17
Paraxiale Abbildung im Mikroskop

Für die Strahlkonstruktion empfiehlt sich das formale Anwenden folgender Regeln:

— Zeichne den ausgezeichneten Strahl im Objektraum bis zur Hauptebene H (Durchstoßhöhe h)!
— Zeichne den ausgezeichneten Strahl in der gleichen Achsentfernung h von der Hauptebene H′ an weiter! Beachte folgende Zuordnung:

Objektraum		*Bildraum*
achsparalleler Strahl	→	Strahl durch den Brennpunkt F′
Strahl durch den Brennpunkt F	→	achsparalleler Strahl
Strahl durch den Knotenpunkt N	→	Strahl durch den Knotenpunkt N′ (ohne Richtungsänderung)

4.1.5. Kardinalpunkte einer zentrierten Linse

Die sphärische Linse ist das wichtigste geometrisch-optisch abbildende Funktionselement.

> Die sphärische Linse besteht aus einem Werkstoff mit hohem Reintransmissionsgrad. Sie stellt einen Körper mit zwei zueinander zentrierten brechenden Kugelflächen dar.

Die Zentrierung von Linsen und Linsenfolgen ist für die Praxis ein wichtiges Problem. Hier begnügen wir uns mit einigen Andeutungen dazu. Zwei Kugelflächen sind stets zueinander zentriert. Die Kugelmittelpunkte liegen auf einer Geraden, die zur opti-

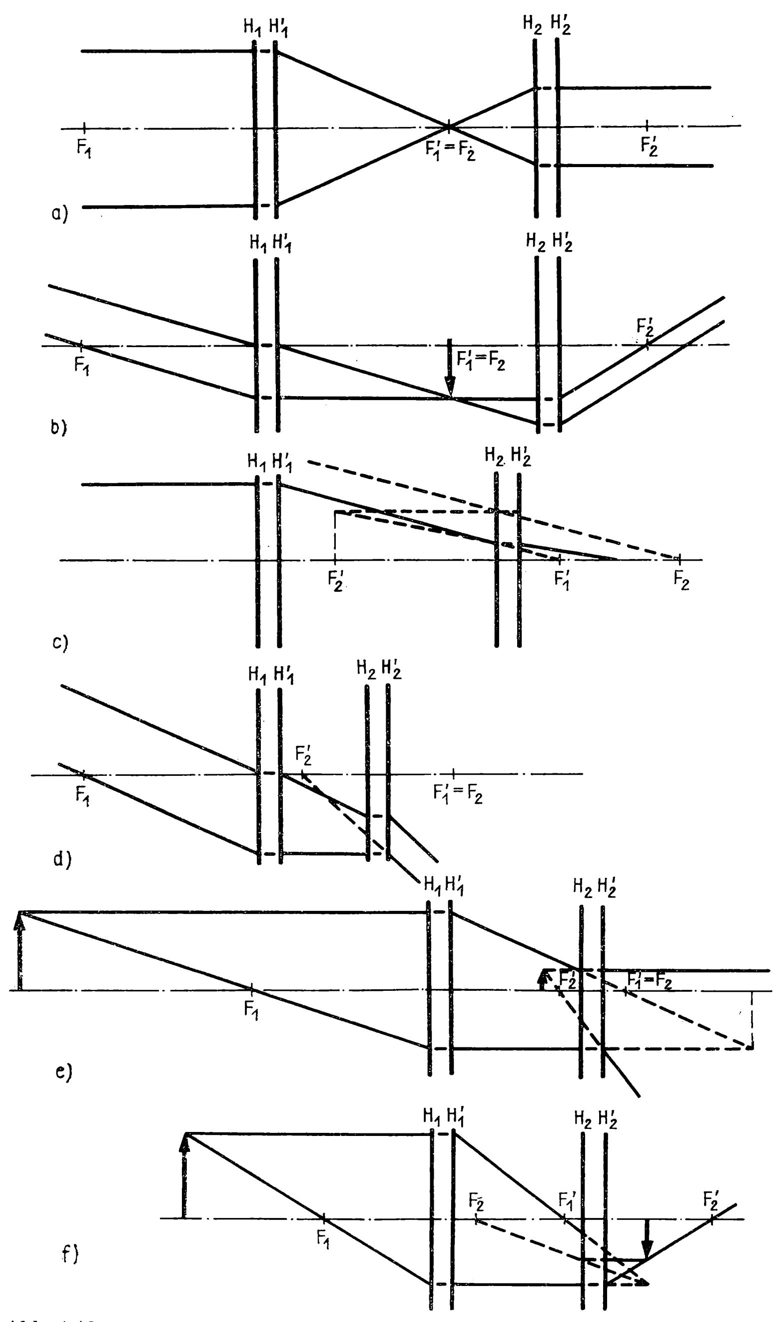


Abb. 4.18
Beispiele für die Strahlkonstruktion

schen Achse der Linse wird. Die Linsen werden jedoch am Rande gefaßt. Die Rotationssymmetrie der gefaßten Linse ist nur gesichert, wenn die Symmetrieachse des Randes, die sogenannte Formachse, mit der optischen Achse zusammenfällt (Abb. 4.19). Bei Linsenfolgen müssen außerdem die optischen Achsen sämtlicher Einzellinsen zusammenfallen.

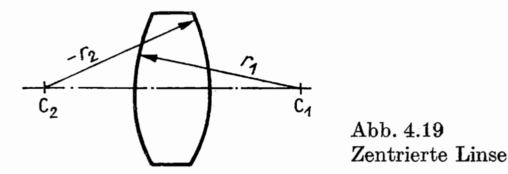


Abb. 4.19
Zentrierte Linse

In der Abb. 4.20 sind drei Fälle von Zentrierfehlern bei einer Linse dargestellt. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Formachse und die optische Achse in einer Ebene liegen. Im allgemeinen schneiden sich jedoch beide Achsen nicht, so daß die Verhältnisse wesentlich komplizierter sind als in den Beispielen der Abb. 4.20.

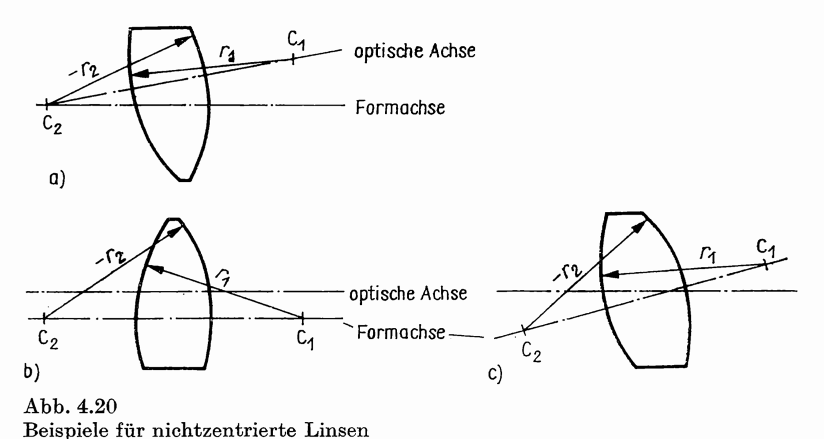


Abb. 4.20
Beispiele für nichtzentrierte Linsen

Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf das paraxiale Gebiet einer zentrierten Linse. Sie gelten nicht nur für sphärische Linsen, sondern für alle Linsen, die zentrierte Rotationsflächen enthalten. Gegeben sei eine zentrierte Linse, die beiderseits an den gleichen Stoff angrenzt. Die Linsendicke werde mit d bezeichnet (Abb. 4.21). Die Untersuchung der Abbildung im paraxialen Gebiet der Linse erfordert die Kenntnis der Kardinalelemente. Bei einem System aus brechenden Flächen mit $n_1 = n'_n$ ist

$$f' = -f.$$

Es genügt demnach, die bildseitige Brennweite f' bzw. die Brechkraft F' zu berechnen. Außerdem fallen die Haupt- bzw. Knotenpunkte H und N sowie H' und N'

zusammen. Zur Ableitung der Brechkraftformel gehen wir von Gl. (4.40) für die Brennweite zweier brechender Flächen aus. Wir setzen also

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{t}$$

mit

$$t = e_1' - f_1' + f_2 \quad \text{und} \quad e_1' = d.$$

Nach (4.21) und (4.22) lassen sich die Brennweiten der Linsenflächen mit

$$\frac{n_1'}{n_1} = \frac{n_2}{n_2'} = n \tag{4.57}$$

(n = relative Brechzahl des Linsenwerkstoffes gegenüber der Umgebung) darstellen durch

$$f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, \quad f_1' = \frac{nr_1}{n-1}, \tag{4.58a, b}$$

$$f_2 = \frac{nr_2}{n-1} \quad \text{und} \quad f_2' = -\frac{r_2}{n-1}. \tag{4.59a, b}$$

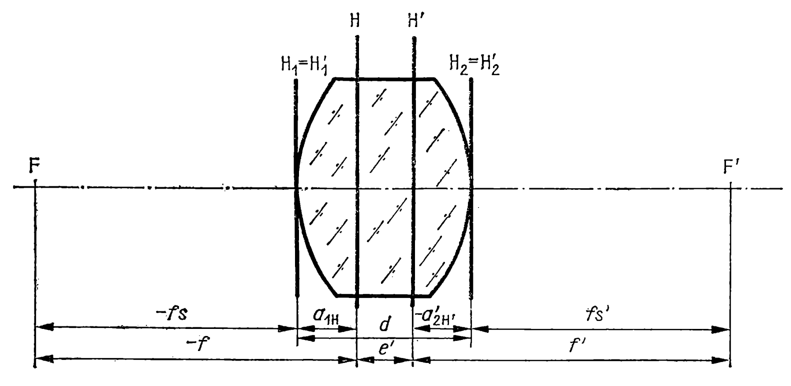


Abb. 4.21
Paraxiale Größen der Linse

Als Hilfsgrößen verwenden wir die reduzierte Dicke

$$\dot{d} = \frac{d}{n} \tag{4.60}$$

und die Sphärometerwerte

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{r_1}, \quad \Phi_2 = \frac{n-1}{r_2}. \tag{4.61a, b}$$

Die Ableitung der Brechkraftformel ist in der Tab. 4.14 zusammengestellt. Wir entnehmen ihr

$$F' = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2 d}{n r_1 r_2} \tag{4.62}$$

oder

$$F' = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2 \dot{d}. \tag{4.63}$$

Bei zwei brechenden Flächen beträgt die Entfernung des Hauptpunktes H′ vom Hauptpunkt H_2' der zweiten Fläche nach Gl. (4.51a)

$$a'_{2H'} = -\frac{f'd}{f_1'}.$$

Einsetzen von (4.60) und (4.61a) führt auf

$$a'_{2H'} = -f'\Phi_1 \dot{d}. \tag{4.64}$$

Eine analoge Ableitung ergibt

$$a_{1H} = f\Phi_2 \dot{d}. \tag{4.65}$$

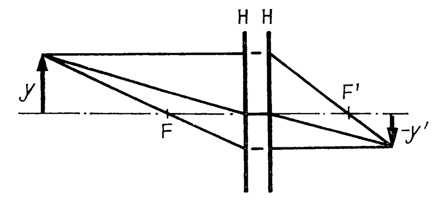


Abb. 4.22
Strahlkonstruktion für die Sammellinse

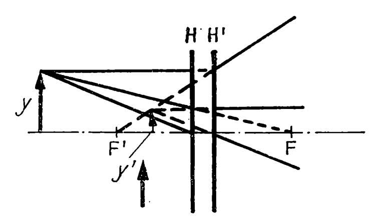


Abb. 4.23
Strahlkonstruktion für die Zerstreuungslinse

Meßtechnisch ist die Entfernung des Brennpunktes vom Flächenscheitel leichter zu erfassen als die Brennweite.

> Die Scheitelbrennweiten f_s bzw. f_s' sind die Entfernungen der Brennpunkte von den Flächenscheiteln V_1 bzw. V_2. Der Kehrwert der Scheitelbrennweite f_s' ist die Scheitelbrechkraft F_s'.

Nach Abb. 4.21 gilt

$$f_s = f + a_{1H} \quad \text{und} \quad f_s' = f' + a'_{2H'}. \tag{4.66a, b}$$

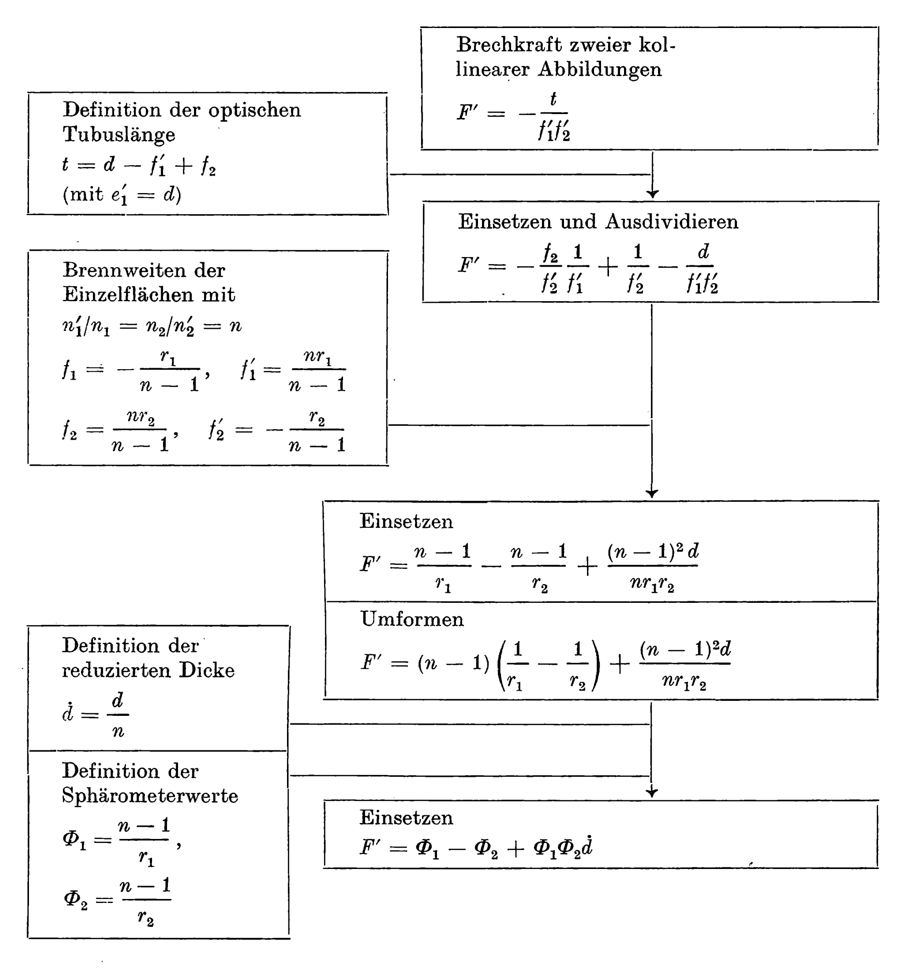
Daraus geht mit (4.64) und (4.65)

$$f_s = f(1 + \Phi_2 \dot{d}) \quad \text{und} \quad f_s' = f'(1 - \Phi_1 \dot{d}) \tag{4.67a, b}$$

hervor.

Bilden wir den Kehrwert von f_s' nach Gl. (4.67b) und eliminieren wir die Brech-

Tabelle 4.14
Ableitung der Gleichung für die Brechkraft einer Linse



kraft F' mittels Gl. (4.63), dann entsteht

$$F_s' = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_1\Phi_2\dot{d}}{1 - \Phi_1\dot{d}} \tag{4.68}$$

bzw.

$$F_s' = \frac{\Phi_1}{1 - \Phi_1\dot{d}} - \Phi_2. \tag{4.69}$$

Die zeichnerische Bestimmung des paraxialen Bildortes und des paraxialen Abbildungsmaßstabes führen wir mit Hilfe der Brennpunktstrahlen und des Knotenpunktstrahles (zugleich Hauptpunktstrahl) aus (Abb. 4.22 und 4.23).

4.1.6. Klassifikation der Linsenformen

Eine zentrierte Linse ist durch die Scheitelkrümmungen der beiden Flächen, durch die Flächenform, die Dicke, die Brechzahl, den Außendurchmesser und den freien Durchmesser festgelegt. Für unsere Untersuchungen, die sich auf das paraxiale Gebiet beschränken, spielen der Außendurchmesser und der freie Durchmesser keine Rolle. Die Brechzahl ist nur in engen Grenzen variierbar und hat wenig Einfluß auf die grundlegende Wirkung der Linsen. Strahlenverlauf und Brechkraft werden wesentlich durch die Krümmungsradien und die Linsendicke bestimmt. Von besonderer Bedeutung ist die Unterscheidung von Sammel- und Zerstreuungslinsen. Es gilt:

> Bei positiver Brennweite f' schneiden sich achsparallel einfallende Paraxialstrahlen im bildseitigen Brennpunkt F'. Die Linse verwandelt ein paraxiales Parallelbündel in ein konvergentes Bündel und stellt damit eine Sammellinse dar (Abb. 4.24).
>
> Bei negativer Brennweite f' schneiden sich die Verlängerungen von achsparallel einfallenden Paraxialstrahlen im bildseitigen Brennpunkt F'. Die Linse verwandelt ein paraxiales Parallelbündel in ein divergentes Bündel und stellt damit eine Zerstreuungslinse dar (Abb. 4.25).

Ob ein konvergentes oder ein divergentes Lichtbündel entsteht, hängt von der Objektweite ab (Abb. 4.26). Eine Sammellinse bricht die Lichtstrahlen stets zur Achse zu ($\sigma' > \sigma$); eine Zerstreuungslinse bricht die Lichtstrahlen stets von der

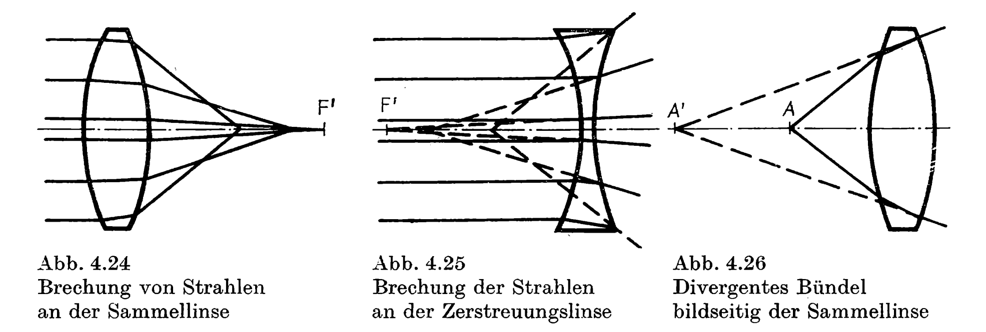


Abb. 4.24
Brechung von Strahlen an der Sammellinse

Abb. 4.25
Brechung der Strahlen an der Zerstreuungslinse

Abb. 4.26
Divergentes Bündel bildseitig der Sammellinse

Achse weg ($\sigma' < \sigma$). (Die Winkel sind mit Vorzeichen zu betrachten.) Das hat z. B. zur Folge, daß eine Zerstreuungslinse innerhalb eines Systems für die hinter ihr stehende Folge größere Einfallshöhen mit sich bringt. Für die paraxiale Abbildung an Linsen gelten wegen $f' = -f$ die Gleichungen des Brennpunkt-Koordinatensystems

$$z' = -\frac{f'^2}{z}, \quad \beta' = \frac{f'}{z}.$$

Die grafische Darstellung der Bildweite und des Abbildungsmaßstabes als Funktion

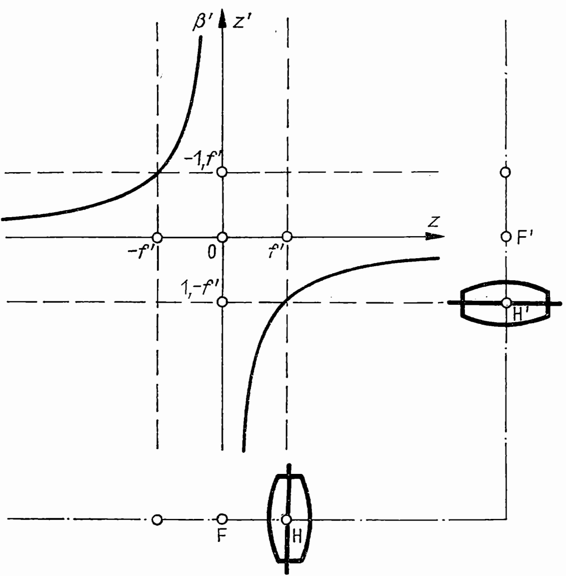


Abb. 4.27
Grafische Darstellung der Abbildungsgleichung (Sammellinse)

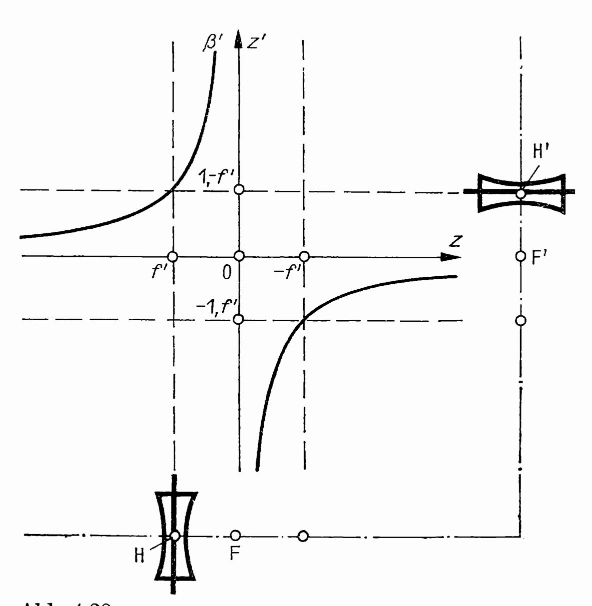


Abb. 4.28
Grafische Darstellung der Abbildungsgleichung (Zerstreuungslinse)

der Objektweite in der Abb. 4.27 für Sammellinsen und in der Abb. 4.28 für Zerstreuungslinsen ermöglicht eine schnelle Übersicht über die Zusammenhänge. Verschiebt man ein Zeichendreieck so, daß die Schenkel des rechten Winkels parallel zu den Koordinatenachsen bleiben und der Scheitel des rechten Winkels auf der ausgezogenen Kurve bleibt, dann zeigen die Winkelschenkel die gegenseitige Lage von Objekt und Bild an. Im Hauptpunkt-Koordinatensystem gilt

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad \beta' = \frac{a'}{a}, \quad \gamma' = \frac{a}{a'}.$$

Eine einfache Gestalt der Abbildungsgleichung erhalten wir, wenn wir die Kehrwerte der Strecken einführen:

$$A = \frac{1}{a}, \quad A' = \frac{1}{a'}, \quad F' = \frac{1}{f'}.$$

Damit ergibt sich

$$A' - A = F', \quad \beta' = \frac{A}{A'}, \quad \gamma' = \frac{A'}{A}.$$

In einem A'—A-Diagramm wird die Abbildungsgleichung durch eine Gerade dargestellt (Abb. 4.29 für eine Sammellinse). Der Abbildungsmaßstab $\beta' = \tan \tau$ und das Winkelverhältnis $\gamma' = \cot \tau$ sind ebenfalls aus dem Bild abzulesen.

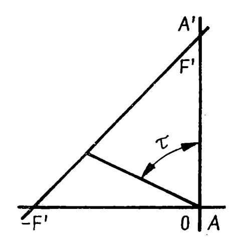


Abb. 4.29
Grafische Darstellung der Abbildungsgleichung für die Kehrwerte der Strecken

Wir gehen nun dazu über, die Linsenformen zu klassifizieren. Für die Linsenflächen ergeben sich die sechs Möglichkeiten, die in der Abb. 4.30 zusammengestellt sind. Von den neun daraus durch Kombination entstehenden Linsen (Abb. 4.31) sind die Kombinationen 1/4 und 3/6, 1/5 und 2/6 sowie 2/4 und 3/5 identisch. Die Kombination der beiden Planflächen 2 und 5 ergibt eine planparallele Platte ohne Brechkraft. Es bleiben damit fünf Linsenformen übrig, die zu untersuchen sind.

Symmetrische Bikonvexlinse ($r_1 = -r_2 = r$). Wir betrachten die *symmetrische* Bikonvexlinse wegen der besseren Übersicht bei betragsmäßig gleichen Radien (Abb. 4.32). Die Ergebnisse sind sinngemäß auf den allgemeinen Fall der unsymmetrischen Linse zu übertragen. Wegen $\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$ wird die Brechkraft nach Gl. (4.63)

$$F' = \Phi(2 - \Phi\dot{d}). \tag{4.70}$$

Die Hauptpunkte haben nach (4.64) und (4.65) die Scheitelabstände

$$a_{1\mathrm{H}} = -a'_{2\mathrm{H}'} = f'\Phi\dot{d} > 0.$$

Die Hauptpunkte liegen also symmetrisch in der Linse. Für

$$2 > \Phi\dot{d} \quad \text{oder} \quad d < \frac{2nr}{n-1}$$

wird $F' > 0$. Es liegt eine Sammellinse vor.

Die Dicke darf also einen bestimmten Wert nicht überschreiten, wenn die Linse sammelnd sein soll. Bei $n = 2$ braucht die Dicke allerdings nur kleiner als $4r$ zu bleiben (Kugel $d = 2r$!).

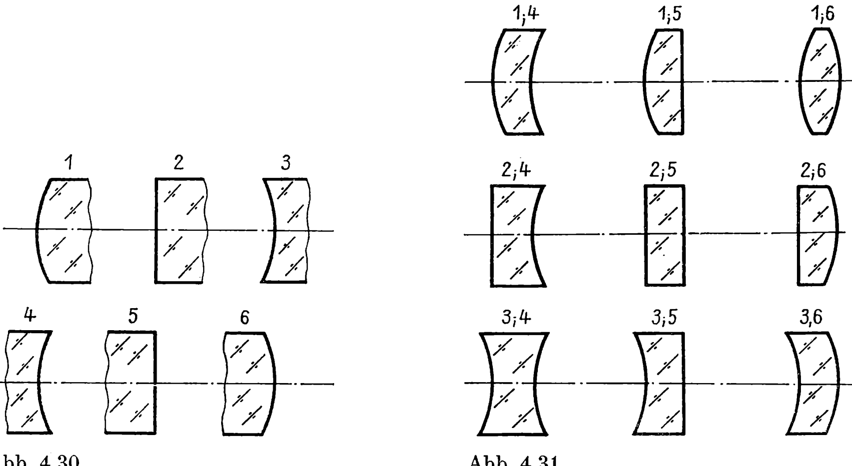


Abb. 4.30
Mögliche brechende Flächen

Abb. 4.31
Mögliche Kombinationen brechender Flächen zu Linsen

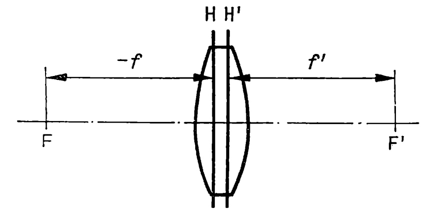


Abb. 4.32
Symmetrische Bikonvexlinse

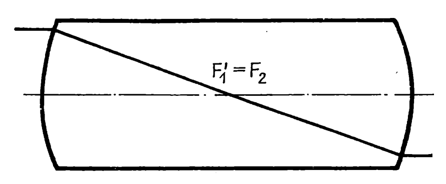


Abb. 4.33
Teleskopische symmetrische Bikonvexlinse

Bei kleinen Linsendicken können wir

$$d \ll r, \quad F' = 2\Phi, \quad a_{\mathrm{H}1} = -a'_{2\mathrm{H}'} = \frac{1}{2}\,\dot{d}$$

setzen. Bei $n = 1{,}5$ dritteln die Hauptebenen angenähert die Linse.

Im Sonderfall

$$d = \frac{2nr}{n-1}$$

verschwindet die Brechkraft. Das liegt daran, daß der bildseitige Brennpunkt der ersten und der objektseitige Brennpunkt der zweiten Fläche zusammenfallen. Die Linse, als eine Folge aus zwei brechenden Flächen betrachtet, stellt ein teleskopisches System dar. Das optische Intervall ist Null (Abb. 4.33). Bei

$$d > \frac{2nr}{n-1}$$

erhalten wir den wegen der beträchtlichen Linsendicke praktisch uninteressanten Fall der Zerstreuungslinse ($F' < 0$). Die Hauptebenen liegen außerhalb der Linse.

An dieser Stelle verweisen wir nochmals darauf, daß die Definitionen der Sammel- und der Zerstreuungslinse ausschließlich an das Vorzeichen der bildseitigen Brennweite gebunden sind. Es ist möglich, daß der bildseitige Brennpunkt einer Sammellinse vor der zweiten Linsenfläche liegt. Ein achsparallel einfallendes Paraxialbündel verläßt dann die Linse als divergentes Bündel.

Entsprechend kann bei einer negativen bildseitigen Brennweite der bildseitige Brennpunkt außerhalb der Linse liegen. Abbildung 4.34 zeigt für eine symmetrische Bikonvexlinse mit $n = 1{,}5$, $r = 10$ mm, wie die Brennweite, die Scheitelbrennweite und $a'_{2\mathrm{H}'}$ von der Linsendicke abhängen. Im Intervall $1 < \Phi\dot{d} < 2$ liegt der bildseitige Brennpunkt innerhalb der Linse, sonst außerhalb.

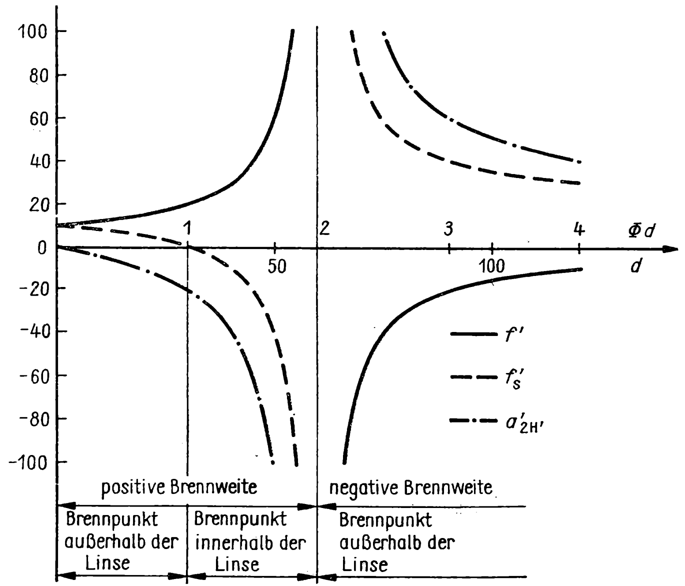


Abb. 4.34
Brennpunktlage und Brennweite für die symmetrische Bikonvexlinse

Symmetrische Bikonkavlinse ($r_1 = -r_2 = -r$). Wegen $\Phi_1 = -\Phi_2 = -\Phi$ wird die Brechkraft nach Gl. (4.63)

$$F' = -(2 + \Phi \dot{d}). \tag{4.71}$$

Die Scheitelabstände der Hauptpunkte betragen nach (4.64) und (4.65)

$$a_{1\mathrm{H}} = -a'_{2\mathrm{H}'} = -f'\Phi \dot{d} > 0.$$

Die Brechkraft ist stets negativ, die Bikonkavlinse also stets zerstreuend. Die Hauptebenen liegen symmetrisch innerhalb der Linse (Abb. 4.35).

Plankonvexlinse ($r_1 = r > 0$, $r_2 = \infty$). Für $\Phi_1 = \Phi$ und $\Phi_2 = 0$ wird

$$F' = \Phi \quad \text{oder} \quad F' = \frac{n-1}{r} \tag{4.72}$$

und

$$a_{1\mathrm{H}} = 0, \quad a'_{2\mathrm{H}'} = -\dot{d}. \tag{4.73}$$

Die Plankonvexlinse ist eine Sammellinse, deren Brechkraft unabhängig von der Dicke ist. Eine Hauptebene tangiert die gekrümmte Fläche der Linse, die andere liegt um die Strecke d/n von der Planfläche entfernt innerhalb der Linse (Abb. 4.36).

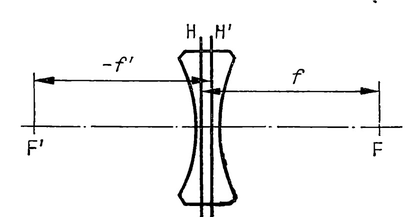


Abb. 4.35
Symmetrische Bikonkavlinse

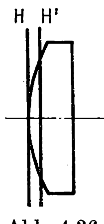


Abb. 4.36
Plankonvexlinse

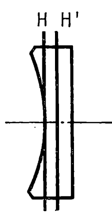


Abb. 4.37
Plankonkavlinse

Plankonkavlinse ($r_1 = -r < 0$, $r_2 = \infty$). Für die Plankonkavlinse gelten sinngemäß dieselben Überlegungen wie für die Plankonvexlinse. Die Brechkraft

$$F' = -\frac{n-1}{r} \tag{4.74}$$

ist negativ, die Plankonkavlinse also zerstreuend (Abb. 4.37).

Konkavkonvexlinse ($r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_1 < r_2$). Wegen $\Phi_1 > \Phi_2$ ist die Brechkraft der Konkavkonvexlinse

$$F' = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2 \dot{d}$$

stets positiv. Es liegt eine Sammellinse vor. Damit wird

$$a_{1\mathrm{H}} = -f'\Phi_2 \dot{d}, \quad a'_{2\mathrm{H}'} = -f'\Phi_1 \dot{d},$$
$$a_{1\mathrm{H}} < 0, \quad a'_{2\mathrm{H}'} < 0.$$

Die Hauptebenen liegen auf den konvexen Seiten der Fläche; H liegt immer, H′ oft außerhalb der Linse (Abb. 4.38). Wegen ihrer äußeren Form wird die Konkavkonvexlinse auch als sammelnder Meniskus bezeichnet.

Bei einem sammelnden Meniskus mit objektseitig konvexen Flächen ist infolge der speziellen Hauptebenenlage die Scheitelbrennweite wesentlich kleiner als die bildseitige Brennweite. Die Baulänge von der Fassung bis zur Brennebene wird verhältnismäßig klein. Bei umgekehrter Lage des sammelnden Meniskus, konkave Flächen auf der Objektseite, gilt das Gegenteil (Abb. 4.39).

Hoeghscher Meniskus ($r_1 = r_2 = r > 0$). Eine Linse, bei der beide Krümmungsradien gleich sind, heißt Hoeghscher Meniskus. Die Brechkraft beträgt

$$F' = \frac{(n-1)^2 d}{nr^2}, \tag{4.75}$$

der Meniskus ist sammelnd. Die Hauptebenen haben von der Dicke unabhängige Scheitelabstände (Abb. 4.40)

$$a_{1\mathrm{H}} = a'_{2\mathrm{H}'} = -\frac{r}{n-1}. \tag{4.76}$$

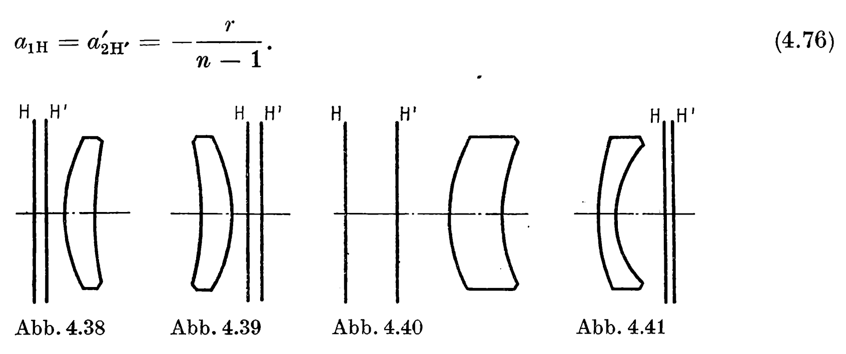


Abb. 4.38
Konkavkonvexlinse mit kleiner bildseitiger Schnittweite

Abb. 4.39
Konkavkonvexlinse mit großer bildseitiger Schnittweite

Abb. 4.40
Hoeghscher Meniskus

Abb. 4.41
Konvexkonkavlinse

Konvexkonkavlinse ($r > 0$, $r_2 > 0$, $r_1 > r_2$). Für $\Phi_1 > \Phi_2$ ist stets $F' > 0$. Für $\Phi_1 < \Phi_2$ enthält die Brechkraftformel zwei Summanden unterschiedlichen Vorzeichens, so daß drei Fälle zu unterscheiden sind. Es gilt

$$|\Phi_1 - \Phi_2| \begin{cases} > \Phi_1\Phi_2\dot{d} & F' < 0 \\ = \Phi_1\Phi_2\dot{d} & F' = 0 \\ < \Phi_1\Phi_2\dot{d} & F' > 0. \end{cases}$$

Eine Zerstreuungslinse liegt vor, wenn für die Linsendicke

$$d < \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2) \tag{4.77}$$

gilt. Diese Bedingung wird in den meisten praktisch vorkommenden Fällen eingehalten sein. Die Hauptebenen liegen dann auf den konkaven Seiten der Flächen und wegen der geringen Dicke im allgemeinen außerhalb der Linse (Abb. 4.41). Damit haben wir die Linsen klassifiziert. Für die Bezeichnungsweise gilt:

Linsen mit vorwiegend sammelnder Wirkung erhalten die Endung „-konvex". Dabei wird nicht unterschieden, wie die Linse im Strahlengang steht. Von den Ausnahmen bei großen Linsendicken wird abgesehen. Sammelnd sind demnach bikonvexe, plankonvexe und konkavkonvexe Linsen. Ihr äußeres Merkmal ist, daß die Dicke auf der Achse größer ist als am Rand. Zerstreuungslinsen sind am Rand dicker als auf der optischen Achse und werden durchweg mit der Endung „-konkav" bezeichnet. Zerstreuend sind demnach bikonkave, plankonkave und konvexkonkave Linsen.

Äquivalentlinsen. Bei kleinen Linsendicken hängen die paraxialen Größen der Linse nur wenig von der Linsendicke ab. Für bestimmte Aufgabenstellungen ergeben sich einfache Beziehungen, wenn zunächst mit Linsen verschwindender Dicke gerechnet wird.

Eine Linse mit verschwindender Dicke wird Äquivalentlinse genannt.

Für $d = 0$ wird die Brechkraft

$$F' = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{4.78a}$$

Wegen

$$a_{1H} = a'_{2H'} = 0 \tag{4.78b}$$

gilt:

Bei einer Äquivalentlinse fallen die Haupt-, Knoten- und Scheitelpunkte zusammen.

(Zu beachten ist, daß wir die Beziehungen des paraxialen Gebietes von Linsen für den Fall abgeleitet haben, bei dem beiderseitig der Linse der gleiche Stoff angrenzt.)

Die Äquivalentlinse kann mit einem Formparameter beschrieben werden, der als Durchbiegung bezeichnet wird.

Die Durchbiegung einer Äquivalentlinse ist die Summe der Abbeschen Invarianten der Linsenflächen.

Die Definition der Durchbiegung lautet:

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{4.79}$$

Mit

$$s_1 = s, \quad s'_2 = s' \quad \text{und} \quad n_1 = n'_2 = 1$$

erhalten wir aus (4.16) und (4.79)

$$Q = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s'}. \tag{4.80}$$

Der Name „Durchbiegung“ kommt daher, daß bei monotoner Änderung von Q die Linse ihre Form so verändert, als würde sie durchgebogen (s und F' konstant gehalten). Abbildung 4.42 demonstriert diese Durchbiegung für Linsen mit $s = -\infty$, $n = 1{,}5$, $F' = 1\,\text{mm}^{-1}$. (Die zeichnerisch notwendige Linsendicke geht natürlich nicht in die Rechnung ein.)

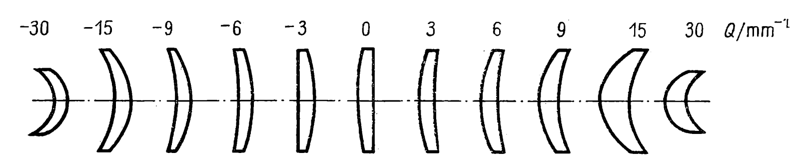


Abb. 4.42
Linsenform in Abhängigkeit von der Durchbiegung

Die Kenntnis der Durchbiegung und der Brechkraft genügt, um die Krümmungsradien der Äquivalentlinsen zu berechnen. Mit

$$n_1' = n_2 = n \qquad \text{und} \qquad s_1' = s_2$$

folgt aus der Abbeschen Invarianten Gl. (4.16)

$$Q_1 - Q_2 = n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Einsetzen von F' nach Gl. (4.78a) führt auf

$$Q_1 - Q_2 = \frac{nF'}{n-1}. \tag{4.81}$$

Addition bzw. Subtraktion von Gl. (4.80) und Gl. (4.81) ergibt

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left(Q + \frac{nF'}{n-1}\right), \quad Q_2 = \frac{1}{2}\left(Q - \frac{nF'}{n-1}\right). \tag{4.82a, b}$$

Aus Q_1 und Q_2 folgen unmittelbar die Krümmungen:

$$\frac{1}{r_1} = Q_1 + \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{r_2} = Q_2 + \frac{1}{s'}. \tag{4.82c, d}$$

4.1.7. Reflektierende Rotationsflächen

Reflexion an sphärischen Einzelflächen. Eine Fläche, deren Hauptfunktion die Reflexion des Lichtes darstellt, ist eine Spiegelfläche. Im allgemeinen wird ein großes Verhältnis aus reflektierter und einfallender Intensität durch die Anwendung

polierter Metalloberflächen bzw. durch das Auftragen leitender oder nichtleitender Schichten auf einen nichtleitenden Träger erreicht.

Hohlspiegel haben einen negativen Krümmungsradius, sie sind also konkav.

Wölbspiegel haben einen positiven Krümmungsradius, sie sind also konvex.

Spiegelflächen stellen geometrisch-optisch abbildende Funktionalelemente dar, die für sich allein eine größere Bedeutung als brechende Flächen haben. Insgesamt kommen jedoch Spiegelflächen in optischen Systemen seltener zum Einsatz als brechende Flächen.

Das Reflexionsgesetz

$$\varepsilon' = -\varepsilon$$

kann als Spezialfall des Brechungsgesetzes für

$$n' = -n$$

aufgefaßt werden. Demnach sind die für sphärische brechende Flächen abgeleiteten Formeln auch für Kugelspiegel anwendbar.

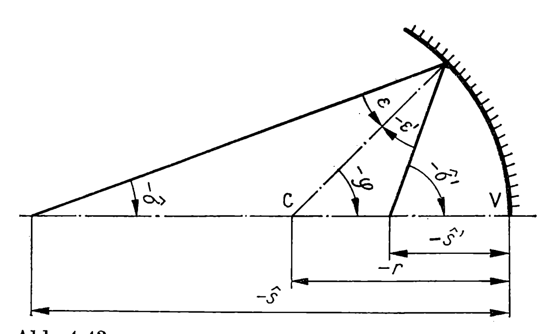


Abb. 4.43
Größen am sphärischen Hohlspiegel

Meridionalstrahlen. Für die Durchrechnung von Meridionalstrahlen sind die Formelsätze des Normalschemas (4.3)···(4.7) umzuformen. Es ergibt sich (Abb. 4.43)

$\hat{s} \neq -\infty$	$\hat{s} = -\infty$	
$\sin\varepsilon = \dfrac{r-\hat{s}}{r}\sin\hat{\sigma},$	$\sin\varepsilon = -\dfrac{h}{r},$	(4.83a, b)
$\varepsilon' = -\varepsilon,$	$\varepsilon' = -\varepsilon,$	(4.84)
$\varphi = \hat{\sigma} - \varepsilon,$	$\varphi = -\varepsilon,$	(4.85a, b)
$\hat{\sigma}' = \varphi + \varepsilon' = \hat{\sigma} - 2\varepsilon,$	$\hat{\sigma}' = -2\varepsilon,$	(4.86a, b)
$\hat{s}' = r\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\hat{\sigma} - 2\varepsilon)} + r,$	$\hat{s}' = -r\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin 2\varepsilon} + r.$	(4.87a, b)

Für $\hat{s} = -\infty$ kann mittels

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin 2\varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon}{2 \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon} = \frac{1}{2 \cos \varepsilon} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\dfrac{h}{r}\right)^2}}$$

umgeformt werden in

$$\hat{s}' = r\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\dfrac{h}{r}\right)^2}}\right]. \tag{4.88}$$

Bei großen Einfallshöhen kommt es vor, daß ein Meridionalstrahl mehr als einmal am Spiegel reflektiert wird. Darauf ist bei der Strahldurchrechnung zu achten. Für $\hat{s} = -\infty$ ergibt z. B. Gl. (4.88) $\hat{s}' = 0$, wenn ein Strahl die Einfallshöhe

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|r|$$

hat. Es entsteht ein Strahlenverlauf, wie er in der Abb. 4.44 gezeichnet ist.

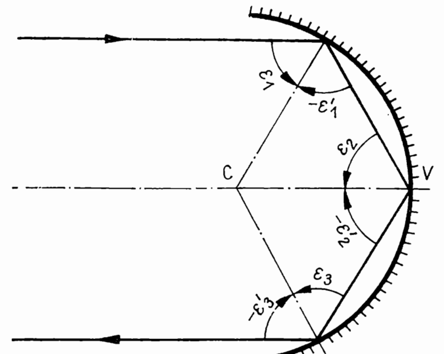


Abb. 4.44
Reflexion am sphärischen Hohlspiegel für $\varepsilon_1 = 60°$

Aufgespaltete Spiegelfläche. Häufig sind die Spiegelflächen in einem optischen System mit brechenden Flächen kombiniert. Die Strahldurchrechnung wird unübersichtlich, weil sich durch die Rückläufigkeit der Lichtstrahlen an den Spiegelflächen die Vorzeichenwahl kompliziert. Wir vermeiden diese Schwierigkeiten, wenn wir den Spiegel formal in zwei Flächen aufspalten und die Lichtrichtung beibehalten (Abb. 4.45). Die Spiegelfläche ist dann an ihrer Scheitelebene gespiegelt worden.

Das Reflexionsgesetz für die aufgespaltene Spiegelfläche erscheint in der Form

$$\varepsilon' = \varepsilon \tag{4.89}$$

und kann als Sonderfall des Brechungsgesetzes für

$$n' = n \tag{4.90}$$

aufgefaßt werden.

Diese Auslegung hat jedoch nur formalen Charakter. Es ist wesentlich zu beachten, daß der Lichtstrahl bis zur Spiegelfläche zu zeichnen ist und erst am Spiegelbild des Spiegels in der gleichen Höhe weitergeht. Es handelt sich also weder um einen Sonderfall der Brechung an einer Fläche noch um die Brechung an zwei Flächen. Deshalb müssen auch die Durchrechnungsformeln neu abgeleitet werden. Sie können nicht aus denen für die brechende Fläche mit $n' = n$ gewonnen werden. Abbildung 4.45 ist zu entnehmen, daß

$$r' = -r \quad \text{und} \quad \varphi' = -\varphi \tag{4.91, 4.92}$$

zu setzen ist.

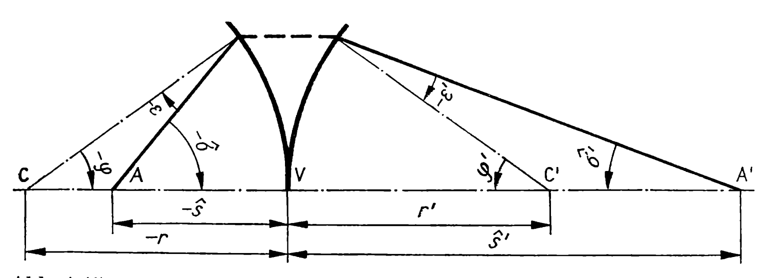


Abb. 4.45
Größen am aufgespalteten Hohlspiegel

Meridionalstrahlen. Die Ableitung der Durchrechnungsformeln für Meridionalstrahlen ist derjenigen für brechende Flächen (Tab. 4.1) völlig analog. Das Ergebnis lautet:

$$\hat{s} \neq -\infty, \qquad \hat{s} = -\infty,$$

$$\sin\varepsilon = \frac{r - \hat{s}}{r}\sin\hat{\sigma}, \qquad \sin\varepsilon = -\frac{h}{r}, \tag{4.93a, b}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon, \qquad \varepsilon' = \varepsilon, \tag{4.94}$$

$$\varphi = \hat{\sigma} - \varepsilon, \qquad \varphi = -\varepsilon, \tag{4.95a, b}$$

$$\hat{\sigma}' = -\hat{\sigma} + 2\varepsilon, \qquad \hat{\sigma}' = 2\varepsilon, \tag{4.96a, b}$$

$$\hat{s}' = -r + \frac{\sin\varepsilon}{\sin(-\hat{\sigma} + 2\varepsilon)}\,r, \qquad \hat{s}' = -r + \frac{\sin\varepsilon}{\sin 2\varepsilon}\,r. \tag{4.97a, b}$$

Der Vergleich der Gleichungen (4.86), (4.87) und (4.96), (4.97) zeigt, daß sich die bildseitigen Schnittweiten $\hat{s}'$ und die bildseitigen Schnittwinkel $\hat{\sigma}'$ nur im Vorzeichen unterscheiden. Dieses in der Abb. 4.43 und 4.45 anschaulich zum Ausdruck kommende Ergebnis bestätigt zusätzlich die Richtigkeit des Formelsatzes (4.95)···(4.97).

Die Invarianten des paraxialen Gebietes. Einzelne Spiegelfläche. Die Abbesche Invariante der brechenden Fläche

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right)$$

geht mit $n' = -n$ über in die Abbesche Invariante der Spiegelfläche

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{s'}. \tag{4.98}$$

Die Helmholtz-Lagrangesche Gleichung der brechenden Fläche

$$ny\sigma = n'y'\sigma'$$

ergibt für den Abbildungsmaßstab

$$\beta' = -\frac{\sigma}{\sigma'}. \tag{4.99}$$

Der Abbildungsmaßstab wird gleich Eins für $\sigma' = -\sigma$. Der Vergleich mit dem Reflexionsgesetz $\varepsilon' = -\varepsilon$ zeigt, daß $\beta' = 1$ wird, wenn der Spiegelscheitel abgebildet wird. Für die Schnittweiten der Hauptpunkte gilt also

$$s_{\mathrm{H}} = s'_{\mathrm{H}'} = 0. \tag{4.100}$$

Die Hauptpunkte des einfachen Spiegels fallen mit dem Spiegelscheitel zusammen.

Für einen Strahl, der durch die Knotenpunkte geht, muß $\sigma' = \sigma$ sein. Das ist für einen Strahl erfüllt, der durch den Krümmungsmittelpunkt geht. Für die Knotenpunkte ist

$$s_{\mathrm{N}} = s'_{\mathrm{N}'} = r. \tag{4.101}$$

Die Knotenpunkte des einfachen Spiegels fallen mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen.

Aus Gl. (4.99) folgt dann noch für die achssenkrechte Ebene, die die Knotenpunkte enthält, daß $\beta' = -1$ ist.

Die Abbesche Invariante (4.98) läßt sich umformen in

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}. \tag{4.102}$$

Die objektseitige Brennweite $f = s_{\mathrm{F}}$ ergibt sich aus Gl. (4.102) mit $s' = \infty$:

$$f = \frac{r}{2}. \tag{4.103}$$

Entsprechend ist die bildseitige Brennweite $f' = s'_{\mathrm{F}'}$ aus Gl. (4.102) mit $s = -\infty$ abzulesen:

$$f' = \frac{r}{2}. \tag{4.104}$$

Es ist trivial, daß

$$f' = f \tag{4.105}$$

herauskommt, weil eine Spiegelfläche wegen der Umkehrbarkeit des Strahlenganges nur einen Brennpunkt haben kann.

Die Brechkraft F' eines Spiegels ist gleich der doppelten Krümmung des Spiegels.

Die Lage der Kardinalelemente und die ausgezeichneten Strahlen sind in der Abb. 4.46a für den Hohlspiegel, in der Abb. 4.46b für den Wölbspiegel enthalten.

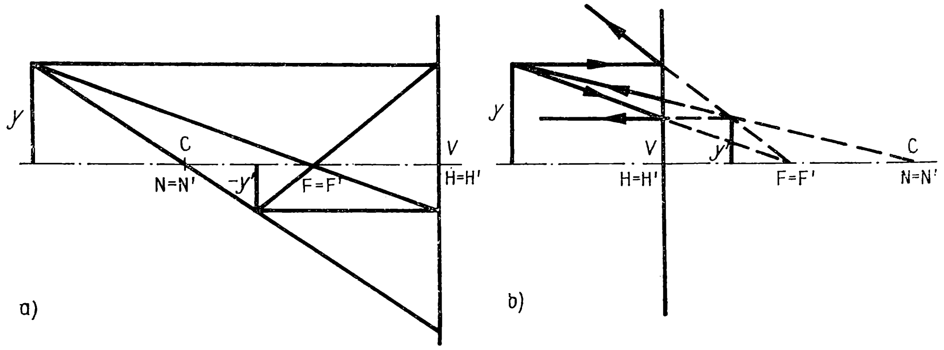


Abb. 446
Strahlkonstruktion a) am Hohlspiegel, b) am Wölbspiegel

Mit Gl. (4.103) läßt sich die Abbildungsgleichung in Hauptpunktkoordinaten (4.102)

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \tag{4.106}$$

schreiben. Der Abbildungsmaßstab folgt aus Gl. (4.20):

$$\beta' = -\frac{s'}{s}. \tag{4.107}$$

Der Tiefenmaßstab beträgt nach Tab. 4.6

$$\alpha' = -\beta'^2. \tag{4.108}$$

Daraus folgt, daß das Objekt und das Bild gegenläufig sind.

Im Brennpunkt-Koordinatensystem gilt für die Koordinaten

der Hauptpunkte $z_H = z'_{H'} = -f$ und (4.109)

der Knotenpunkte $z_N = z'_{N'} = f$. (4.110)

Die Abbildungsgleichung lautet

$$zz' = f^2. \tag{4.111}$$

Daraus lesen wir ab, daß z und z' stets gleiches Vorzeichen haben, d. h., Objekt und Bild liegen, von der Brennebene aus gesehen, auf der gleichen Seite.

Der Abbildungsmaßstab beträgt

$$\beta' = -\frac{f}{z}. \tag{4.112}$$

Die Abb. 4.47 und 4.48 enthalten die grafische Darstellung der Abbildungsgleichung in Brennpunktkoordinaten für den Hohl- bzw. für den Wölbspiegel. Aus ihnen sind die zu einer gegebenen Objektweite gehörende Bildweite und der Abbildungsmaßstab zu entnehmen.

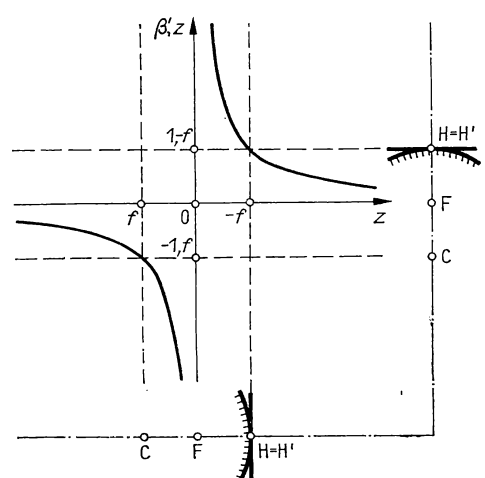


Abb. 4.47
Grafische Darstellung der Abbildungsgleichung (Hohlspiegel)

Aufgespaltete Spiegelfläche. Aus dem Normalschema (4.93)···(4.97) ergibt sich durch Spezialisierung auf das paraxiale Gebiet, daß die Abbesche Invariante für die aufgespaltene Spiegelfläche

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{s'} \tag{4.113}$$

lautet. Daraus folgt:

> Auch für die aufgespaltete Spiegelfläche ist die Abbesche Invariante durch Spezialisierung derjenigen für die brechende Fläche zu gewinnen. Es ist $n' = n$ zu setzen, aber zu beachten, daß der bildseitige Krümmungsradius vom objektseitigen durch das Vorzeichen unterschieden ist.

Umformen von Gl. (4.113) führt wegen $r' = -r$ auf die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}. \tag{4.114}$$

Aus Gl. (4.114) folgt mit $s'_{F'} = f'$ für $s = -\infty$ die bildseitige Brennweite

$$f' = -\frac{r}{2} \tag{4.115}$$

und mit $s_F = f$ für $s' = \infty$ die objektseitige Brennweite

$$f = \frac{r}{2}. \tag{4.116}$$

Es gilt

$$f' = -f, \tag{4.117}$$

weil objekt- und bildseitiger Brennpunkt, vom Flächenscheitel aus gesehen, auf verschiedenen Seiten liegen.

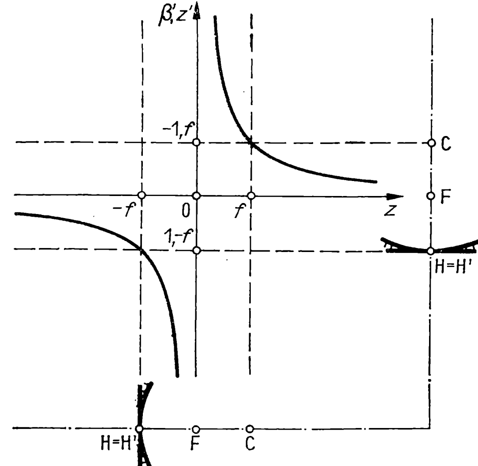


Abb. 4.48
Grafische Darstellung der Abbildungsgleichung (Wölbspiegel)

Die Abbildungsgleichung (4.114) läßt sich mit Gl. (4.115) in

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \tag{4.118}$$

umformen.

Wegen $f' = -f$ sind sämtliche für diesen Spezialfall angegebenen Formeln in der paraxialen Abbildung anwendbar. Insbesondere gilt:

Die Haupt- und die Knotenpunkte der aufgespaltenen Spiegelfläche fallen mit dem Flächenscheitel zusammen (Abb. 4.49 und 4.50).

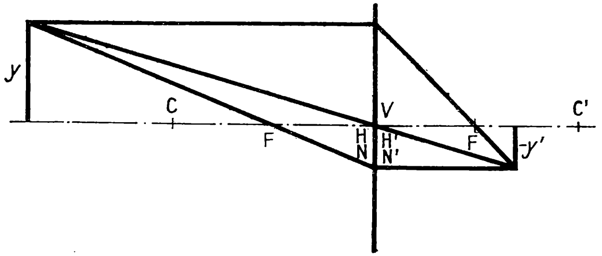


Abb. 4.49
Strahlkonstruktion am aufgespalteten Hohlspiegel

Es zeigt sich also, daß außer dem naturgemäß mit der aufgespalteten Spiegelfläche verbundenen Auseinanderfallen der Brennpunkte auch die Knotenpunkte an einer anderen Stelle liegen als bei der einfachen Spiegelfläche. Das hat z. B. zur Folge, daß die aufgespaltete Spiegelfläche nur mit Vorsicht zur Untersuchung des Einflusses von Flächenkippungen anzuwenden ist. Wir betonen deshalb noch einmal:

Die aufgespaltete Spiegelfläche ist ein formales Hilfsmittel, mit dem die Strahldurchrechnung an Spiegelflächen ohne die mit der Rückläufigkeit der reflektierten Lichtstrahlen verbundenen Schwierigkeiten möglich ist.

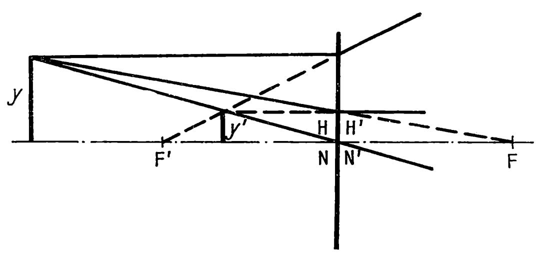


Abb. 4.50
Strahlkonstruktion am aufgespalteten Wölbspiegel

4.1.8. Windschiefe Strahlen

Sämtliche Strahlen, die nicht in der Meridionalebene liegen, werden als windschiefe Strahlen bezeichnet. Die Durchrechnung eines windschiefen Strahls durch ein System aus brechenden Flächen wird in Koordinatenschreibweise unübersichtlich, weil der Strahl nicht in ein und derselben Ebene liegt. Es ist also ein räumlicher Strahlenverlauf zu untersuchen. Für derartige Aufgaben ist die vektorielle Darstellung am rationellsten. Die Durchrechnung von windschiefen Strahlen ist eines der Probleme, deren Lösung durch Anwenden des vektoriellen Brechungsgesetzes wesentlich vereinfacht wird.

Wir beschränken uns zunächst auf ein System aus sphärischen Flächen. Die Durchrechnung eines windschiefen Strahls läßt sich in die Teilaufgaben

— Berechnung der Eingangsgrößen,
— Durchrechnung an einer Fläche,
— Übergang zur nächsten Fläche und
— Schlußrechnung

zerlegen.

Berechnung der Eingangsgrößen. Vorgegeben sind die Koordinaten des außeraxialen Objektpunktes $\hat{A}(0, y_1, s_1)$. Die objektseitige Richtung des Lichtstrahls wird im allgemeinen bei $s_1 \neq -\infty$ durch dessen Durchstoßpunkt $\hat{P}_0(x_{p1}, y_{p1}, s_{p1})$ in einer objektseitigen Bezugsebene (z. B. in der Ebene der Eintrittspupille; siehe Abschnitt 4.2.); bei $s_1 = -\infty$ durch die Richtung des Bezugsstrahls, der durch den

Achsenpunkt der Bezugsebene geht, festgelegt. In der Abb. 4.51 werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$\boldsymbol{s}_1$ = Einheitsvektor in Richtung des einfallenden Strahls,
$\boldsymbol{c}_1$ = Vektor vom Krümmungsmittelpunkt der ersten Fläche zum Durchstoßpunkt des Strahls in der Bezugsebene,
l_1 = Strahllänge von $\hat{P}_0$ bis $\hat{A}$,
p_1 = Abstand der Bezugsebene von der Objektebene,
s_{p1} = Abstand der Bezugsebene vom ersten Flächenscheitel,
σ_{p1} = Winkel, den der Bezugsstrahl mit der optischen Achse einschließt.

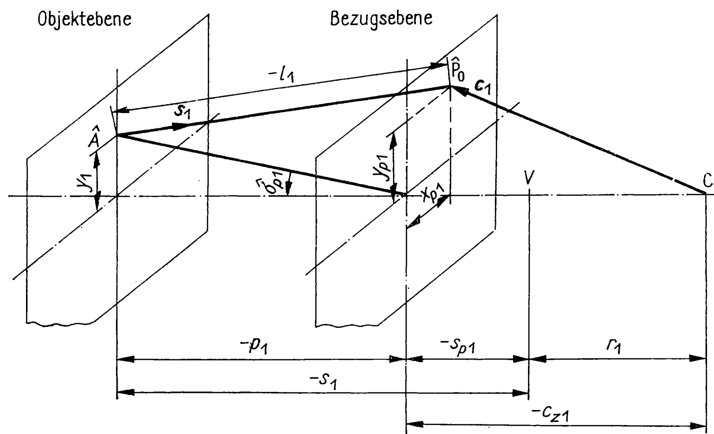


Abb. 4.51
Eingangsgrößen für einen windschiefen Strahl

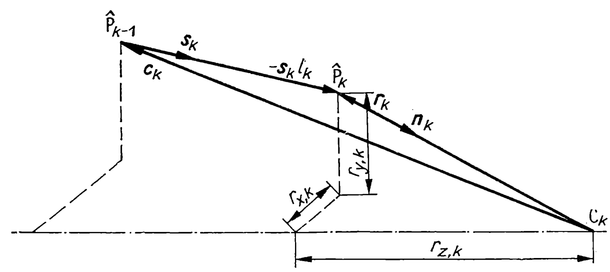


Abb. 4.52
Zur Brechung eines windschiefen Strahls an einer Fläche

Die Anwendung des vektoriellen Brechungsgesetzes an der ersten Fläche setzt die Kenntnis der Komponenten von $\boldsymbol{s}_1$ und $\boldsymbol{c}_1$ voraus. Diese Größen sind auf der Grundlage von Abb. 4.51 abzuleiten und in der Tab. 4.15 enthalten.

Brechung an einer Fläche. Zur Berechnung des Strahlvektors $\boldsymbol{s}'_k$ mit dem vektoriellen Brechungsgesetz benötigen wir den Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}_k$. Dieser

wird auf der Basis von Abb. 4.52 in der Tab. 4.16 abgeleitet. Dazu sind noch folgende Hinweise nützlich:

In der Abb. 4.52 sind $\hat{P}_{k-1}$ bzw. $\hat{P}_k$ die Durchstoßpunkte des Lichtstrahls durch die Flächen $k - 1$ bzw. k.

Beide Vorzeichen in der Beziehung für l_k (Tab. 4.17) sind sinnvoll, weil die Kugel zweimal von der Geraden mit der Richtung $\mathbf{s}_k$ durchstoßen wird. Das im Einzelfall gültige Vorzeichen ergibt sich aus der Forderung, daß l_k stets negativ sein muß (Flächenüberschneidungen sind nicht zugelassen). In der Tab. 4.18 sind die möglichen Kombinationen der einzelnen Größen zusammengestellt (Abb. 4.53).

Tabelle 4.15
Zusammenstellung von Beziehungen für das paraxiale Gebiet

$f' \neq \pm f$, $\beta'\gamma' = -\frac{f}{f'}$ (Beispiel: brechende Einzelfläche)				
Brennpunkt-Koordinaten	$z_F = 0$	$z'_{F'} = 0$	$a_F = f$	$a'_{F'} = f'$
Hauptpunkt-Koordinaten	$z_H = -f$	$z'_{H'} = -f'$	$a_H = 0$	$a'_{H'} = 0$
Knotenpunkt-Koordinaten	$z_N = f'$	$z'_{N'} = f$	$a_N = f + f'$	$a'_{N'} = f + f'$
Abbildungsmaßstab	$\beta' = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$		$\beta' = -\frac{f}{f'}\frac{a'}{a}$	$\left(\beta' = \frac{n}{n'}\frac{a'}{a}\right)$
Winkelverhältnis	$\gamma' = \frac{z}{f'} = \frac{f}{z'} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\beta'}$		$\gamma' = \frac{a}{a'}$	
Tiefenmaßstab	$\alpha' = -\frac{z'}{z} = -\frac{f'}{f}\beta'^2$		$\alpha' = -\left(\frac{a'}{a}\right)^2\frac{f}{f'}$	
Abbildungsgleichung	$zz' = ff'$		$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1$	$\left(\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n'}{f'}\right)$
$f' = -f$, $\beta'\gamma' = 1$ (Beispiel: Einzellinse in Luft)				
Brennpunkt-Koordinaten	$z_F = 0$	$z'_{F'} = 0$	$a_F = f$	$a'_{F'} = f'$
Hauptpunkt-Koordinaten	$z_H = f'$	$z'_{H'} = -f'$	$a_H = 0$	$a'_{H'} = 0$
Knotenpunkt-Koordinaten	$z_N = f'$	$z'_{N'} = -f'$	$a_N = 0$	$a'_{N'} = 0$
Abbildungsmaßstab	$\beta' = \frac{f'}{z} = -\frac{z'}{f'}$			
Winkelverhältnis	$\gamma' = \frac{z}{f'} = -\frac{f'}{z'} = \frac{1}{\beta'}$		$\gamma' = \frac{a}{a'} = \frac{1}{\beta'}$	
Tiefenmaßstab	$\alpha' = -\frac{z'}{z} = \beta'^2$		$\alpha' = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \beta'^2$	
Abbildungsgleichung	$zz' = -f'^2$		$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$	

Tabelle 4.15 (Fortsetzung)

$f' = f$, $\beta'\gamma' = -1$ (Beispiel: reflektierende Einzelfläche)				
Brennpunkt-Koordinaten	$z_F = 0$	$z'_{F'} = 0$	$a_F = f$	$a'_{F'} = f'$
Hauptpunkt-Koordinaten	$z_H = -f'$	$z'_{H'} = -f'$	$a_H = 0$	$a'_{H'} = 0$
Knotenpunkt-Koordinaten	$z_N = f'$	$z'_{N'} = f'$	$a_N = 2f'$	$a'_{N'} = 2f'$
Abbildungsmaßstab	$\beta' = -\dfrac{f'}{z} = -\dfrac{z'}{f'}$		$\beta' = -\dfrac{a'}{a}$	
Winkelverhältnis	$\gamma' = \dfrac{z}{f'} = \dfrac{f'}{z'} = -\dfrac{1}{\beta'}$		$\gamma' = \dfrac{a}{a'} = -\dfrac{1}{\beta'}$	
Tiefenmaßstab	$\alpha' = \dfrac{z'}{z} = -\beta'^2$		$\alpha' = -\left(\dfrac{a'}{a}\right)^2 = -\beta'^2$	
Abbildungsgleichung	$zz' = f'^2$		$\dfrac{1}{a'} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{f'}$	
	Brennpunkt-Koordinatensystem		Hauptpunkt-Koordinatensystem	

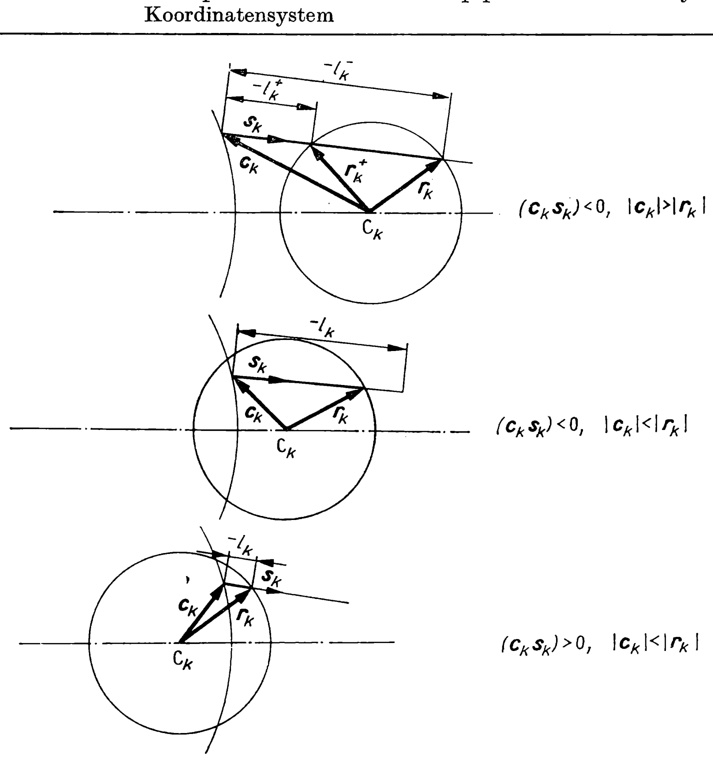


Abb. 4.53
Beispiele für das Vorzeichen von l_k

Nur der Fall $(\boldsymbol{c}_k \boldsymbol{s}_k) < 0$, $|c_k| > |r_k|$ kommt sowohl bei konvexen wie auch bei konkaven Flächen vor. Dabei muß l_k für eine konvexe Fläche größer sein als für eine konkave Fläche, so daß bei konvexen Flächen das positive Vorzeichen der Wurzel zu verwenden ist. Die beiden anderen Fälle der Tab. 4.18 sind nur bei konkaven Flächen möglich. Daraus folgt, daß das Vorzeichen der Wurzel gleich

$$\operatorname{sgn}(r_k)$$

zu setzen ist.

Die Übergangsformeln von der Fläche k zur Fläche $k + 1$ ergeben sich unmittelbar aus der Abb. 4.54. Es gilt

Strahlvektor

$$\boldsymbol{s}_{k+1} = \boldsymbol{s}_k' \tag{4.119}$$

Komponenten des Vektors $\boldsymbol{c}_{k+1}$

$$\begin{aligned} c_{x,k+1} &= r_{x,k}, \\ c_{y,k+1} &= r_{y,k}, \\ c_{z,k+1} &= r_{z,k} - e_k' - r_{k+1} + r_k. \end{aligned} \tag{4.120}$$

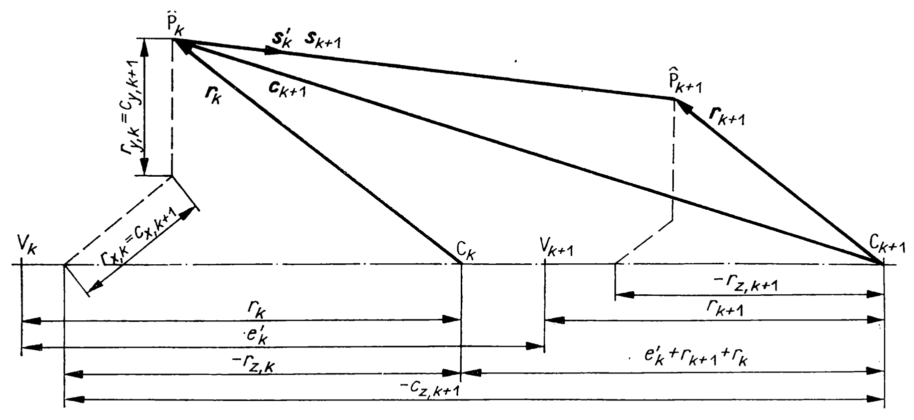


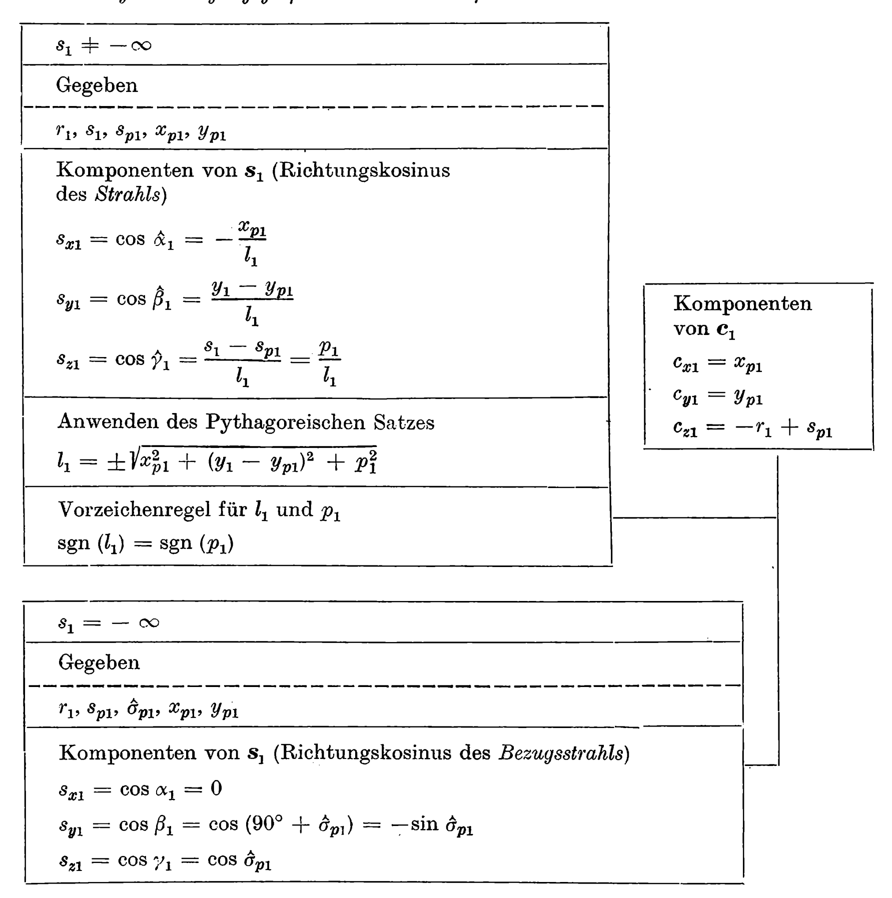
Abb. 4.54
Übergang von einer Fläche zur nächsten Fläche

Schlußrechnung. Die Koordinaten des Punktes, in dem der Lichtstrahl eine achssenkrechte Ebene des Bildraums durchstößt, berechnen wir an Hand der Abb. 4.55. Die Größen, die der achssenkrechten Ebene zugeordnet sind, schreiben wir zur besseren Übersicht ohne Index. Die Ableitung in der Tab. 4.19 ergibt

$$\hat{x}' = c_x - \frac{s_x}{s_z} c_z, \tag{4.121}$$

$$\hat{y}' = c_y - \frac{s_y}{s_z} c_z. \tag{4.122}$$

Tabelle 4.16
Berechnung der Eingangsgrößen eines windschiefen Strahls



$s_1 \neq -\infty$
Gegeben
$r_1,\ s_1,\ s_{p1},\ x_{p1},\ y_{p1}$
Komponenten von $\boldsymbol{s}_1$ (Richtungskosinus des *Strahls*) $s_{x1} = \cos \hat{\alpha}_1 = -\dfrac{x_{p1}}{l_1}$ $s_{y1} = \cos \hat{\beta}_1 = \dfrac{y_1 - y_{p1}}{l_1}$ $s_{z1} = \cos \hat{\gamma}_1 = \dfrac{s_1 - s_{p1}}{l_1} = \dfrac{p_1}{l_1}$
Anwenden des Pythagoreischen Satzes $l_1 = \pm\sqrt{x_{p1}^2 + (y_1 - y_{p1})^2 + p_1^2}$
Vorzeichenregel für l_1 und p_1 $\operatorname{sgn}(l_1) = \operatorname{sgn}(p_1)$

Komponenten von $\boldsymbol{c}_1$
$c_{x1} = x_{p1}$ $c_{y1} = y_{p1}$ $c_{z1} = -r_1 + s_{p1}$

$s_1 = -\infty$
Gegeben
$r_1,\ s_{p1},\ \hat{\sigma}_{p1},\ x_{p1},\ y_{p1}$
Komponenten von $\boldsymbol{s}_1$ (Richtungskosinus des *Bezugsstrahls*) $s_{x1} = \cos \alpha_1 = 0$ $s_{y1} = \cos \beta_1 = \cos(90° + \hat{\sigma}_{p1}) = -\sin \hat{\sigma}_{p1}$ $s_{z1} = \cos \gamma_1 = \cos \hat{\sigma}_{p1}$

Der gesamte Rechenablauf ist in der Tab. 4.20 zusammengefaßt dargestellt.

Für die rechentechnische Umsetzung der windschiefen Strahldurchrechnung ist es günstiger, den Ursprung für die Vektoren statt in den Krümmungsmittelpunkt der Fläche in den Flächenscheitel zu legen. Dadurch sind auch Planflächen ohne Komplikationen eingeschlossen. Am prinzipiellen methodischen Vorgehen ändert sich dadurch nichts.

Berechnung windschiefer Strahlen in Matrixdarstellung. Wir gehen vom vektoriellen Brechungsgesetz (2.33) aus. Es lautet

$$\boldsymbol{n} \times (n'\boldsymbol{s}' - n\boldsymbol{s}) = 0. \tag{4.123}$$

Tabelle 4.17
Berechnung der Strahlrichtung an einer sphärischen Fläche

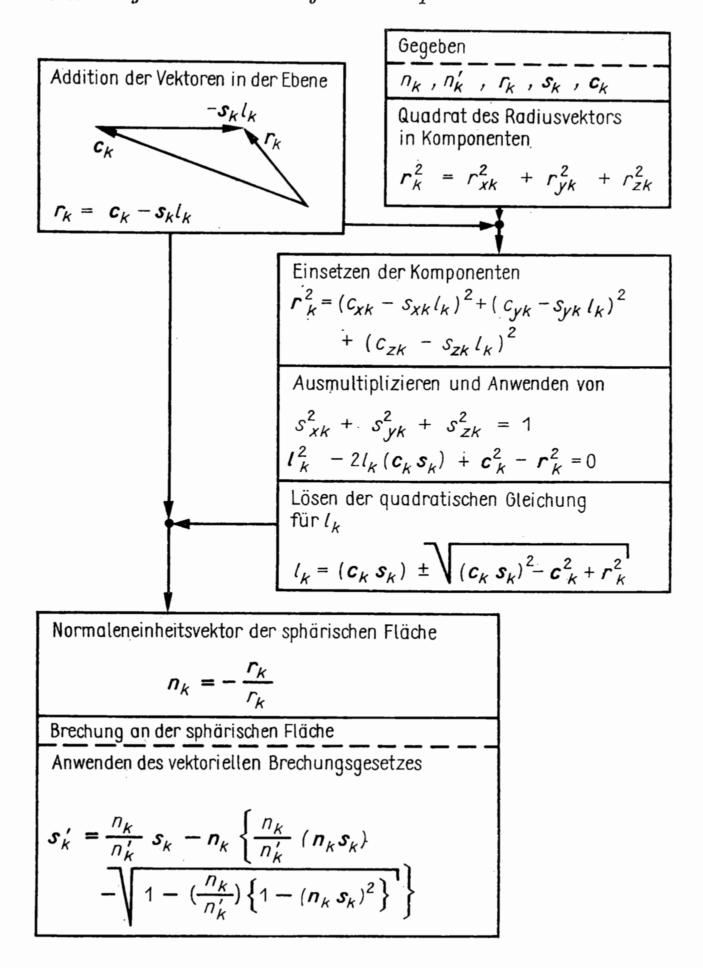
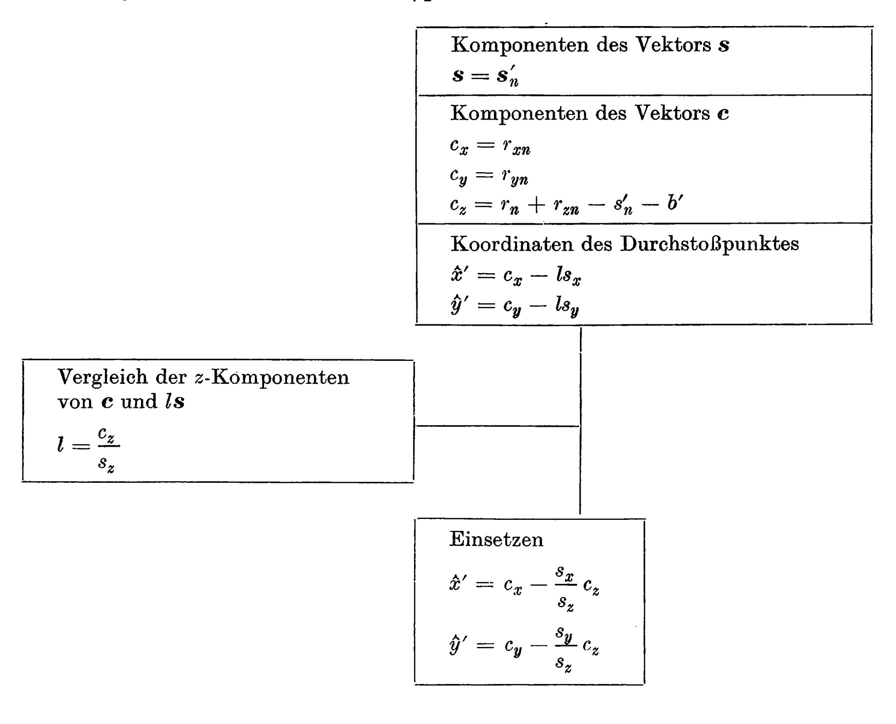


Tabelle 4.18
Zur Bestimmung des Vorzeichens in der Beziehung für l_k

	$(c_k s_k) < 0$	$(c_k s_k) > 0$
$\lvert c_k\rvert > \lvert s_k\rvert$	$\lvert\sqrt{(c_k s_k)^2 - c_k^2 + r_k^2}\rvert < \lvert c_k s_k\rvert$	geht nicht
$\lvert c_k\rvert < \lvert s_k\rvert$	$\lvert\sqrt{(c_k s_k)^2 - c_k^2 + r_k^2}\rvert > \lvert c_k s_k\rvert$	$\lvert\sqrt{(c_k s_k)^2 - c_k^2 + r_k^2}\rvert > \lvert c_k s_k\rvert$

Tabelle 4.19

Berechnung der Koordinaten des Durchstoßpunktes durch eine achssenkrechte Ebene des Bildraums



Die Komponenten des Vektorproduktes folgen aus

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ n_x & n_y & n_z \\ n'\alpha' - n\alpha & n'\beta' - n\beta & n'\gamma' - n\gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{4.124}$$

Die Größen α, β, γ sind die Richtungskosinus des einfallenden Strahls; α', β', γ' die Richtungskosinus des gebrochenen Strahls. Das Ausrechnen der Determinante ergibt

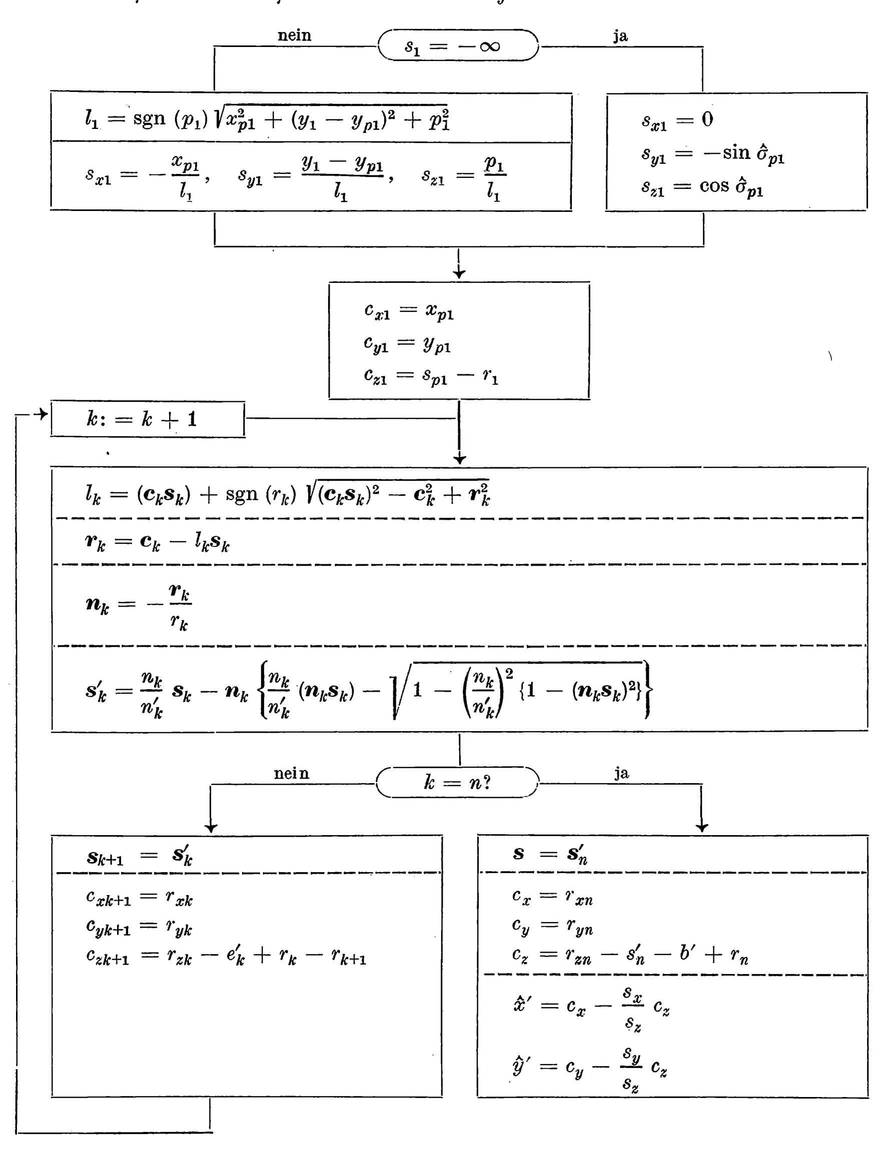
$$\begin{aligned} n_y(n'\gamma' - n\gamma) - n_z(n'\beta' - n\beta) &= 0, \\ n_x(n'\gamma' - n\gamma) - n_z(n'\alpha' - n\alpha) &= 0, \\ n_x(n'\beta' - n\beta) - n_y(n'\alpha' - n\alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{4.125a⋯c}$$

Weiter gilt für den Einfalls- und den Brechungswinkel

$$\cos \varepsilon = \boldsymbol{sn} = \alpha n_x + \beta n_y + \gamma n_z, \tag{4.126a}$$

$$\cos \varepsilon' = \boldsymbol{s'n} = \alpha' n_x + \beta' n_y + \gamma' n_z. \tag{4.126b}$$

Tabelle 4.20
Rechenablauf der windschiefen Strahldurchrechnung



Diese Gleichungen lösen wir nach γ bzw. γ' auf:

$$\gamma = \frac{1}{n_z} (\cos \varepsilon - \alpha n_x - \beta n_y), \quad \gamma' = \frac{1}{n_z} (\cos \varepsilon' - \alpha' n_x - \beta' n_y). \qquad (4.127\text{a, b})$$

Einsetzen von γ und γ' in Gl. (4.125a) ergibt

$$n'\beta' - n\beta = \frac{n_y}{n_z^2} [n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon - n_x(n'\alpha' - n\alpha) - n_y(n'\beta' - n\beta)]. \qquad (4.128)$$

$n'\alpha' - n\alpha$ wird mittels Gl. (4.125c) eliminiert.

$$n'\beta' - n\beta = \frac{n_y}{n_z^2} \left[n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon - \frac{n_x^2}{n_y} (n'\beta' - n\beta) - n_y(n'\beta' - n\beta) \right]. \qquad (4.129)$$

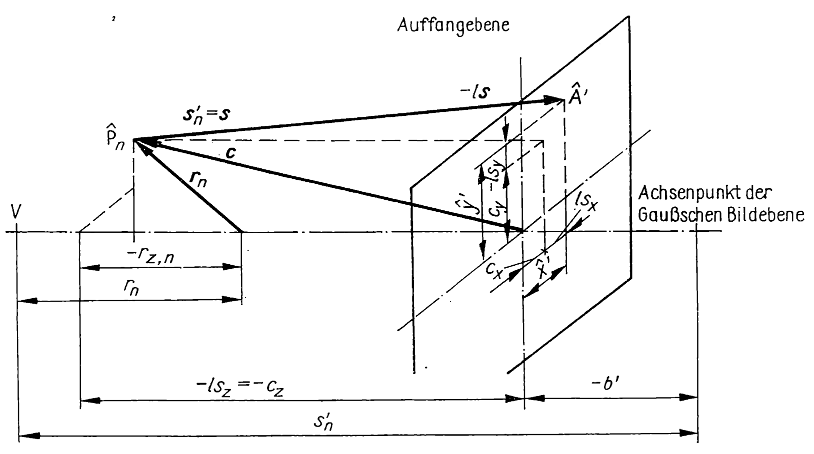


Abb. 4.55
Bildraumgrößen für einen windschiefen Strahl

Durch Auflösen von Gl. (4.129) nach $n'\beta' - n\beta$ erhalten wir unter Verwendung von $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

$$n'\beta' - n\beta = n_y(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon). \qquad (4.130)$$

Eine analoge Ableitung mit Gl. (4.125b) als Ausgangsbeziehung führt auf

$$n'\alpha' - n\alpha = n_x(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon). \qquad (4.131)$$

Bei der sphärischen brechenden Fläche ist (Abb. 4.56)

$$n_x = -\frac{r_x}{r}, \quad n_y = -\frac{r_y}{r}, \quad n_z = -\frac{r_z}{r}. \qquad (4.132)$$

Setzen wir die Identität der objekt- und bildseitigen Durchstoßkoordinaten durch die brechende Fläche an,

$$r_x' = r_x, \quad r_y' = r_y, \quad r_z' = r_z, \qquad (4.133)$$

dann können wir die Brechung an der sphärischen Fläche durch die Matrixprodukte

$$\begin{pmatrix} n'\alpha' \\ r'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ r_x \end{pmatrix} \tag{4.134}$$

$$\begin{pmatrix} n'\beta' \\ r'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\beta \\ r_y \end{pmatrix} \tag{4.135}$$

beschreiben.

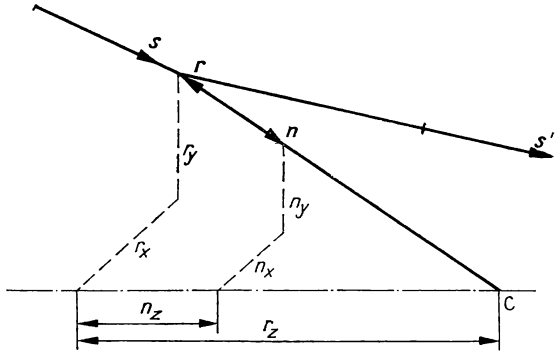


Abb. 4.56
Vektoren für das vektorielle Brechungsgesetz

Für Meridionalstrahlen ist $\alpha = \alpha' = 0$ und $r_y = y$, so daß mit

$$\frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r} = A \tag{4.136}$$

auch

$$\begin{pmatrix} n'\beta' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\beta \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.137}$$

geschrieben werden kann.

Übergangsbeziehungen. Für den Übergang von einer brechenden Fläche zur anderen gilt (Abb. 4.57)

$$n_{k+1} = n'_k, \qquad \alpha_{k+1} = \alpha'_k, \qquad \beta_{k+1} = \beta'_k, \tag{4.138}$$

$$r_{x,k+1} = r_{x,k} + l'_k \alpha_{k+1}, \qquad r_{y,k+1} = r_{y,k} + l'_k \beta_{k+1}. \tag{4.139}$$

In Matrixschreibweise setzen wir

$$\begin{pmatrix} n_{k+1}\beta_{k+1} \\ r_{y,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n'_k\beta'_k \\ r'_{y,k} \end{pmatrix}. \tag{4.140}$$

Ausrechnen des Matrizenproduktes ergibt

$$n_{k+1}\beta_{k+1} = An'_k\beta'_k + Br'_{y,k}, \tag{4.141}$$

$$r_{y,k+1} = Cn'_k\beta'_k + Dr'_{y,k}. \tag{4.142}$$

Der Vergleich von (4.141), (4.142) und (4.138), (4.139) legt die Elemente A, B, C und D folgendermaßen fest:

$$A = 1, \qquad B = 0,$$

$$C = \frac{l'_k}{n'_k}, \qquad D = 1.$$

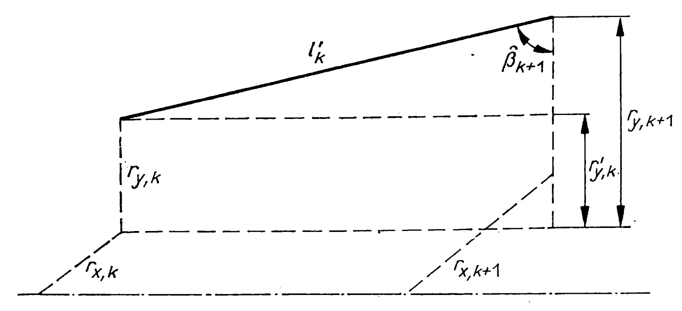


Abb. 4.57
Übergangsbeziehungen

Die Übergangsmatrix lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l'_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.143}$$

Übergang zum paraxialen Gebiet. Für den Grenzfall des paraxialen Gebietes gehen wir von

$$\hat{\beta} = \hat{\sigma} + 90°, \qquad r_y = h$$

aus (Abb. 4.58). Damit ist

$$\cos\hat{\beta} = -\sin\sigma \quad \text{oder} \quad \beta = -\sigma \tag{4.144}$$

zu setzen. Weiter wird

$$A = \Phi = \frac{n' - n}{r}. \tag{4.145}$$

Die Brechung von Paraxialstrahlen schreibt sich in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} -n'\sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n\sigma \\ h \end{pmatrix}. \tag{4.146}$$

Dafür kann auch

$$\begin{pmatrix} n'\sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\sigma \\ h \end{pmatrix} \tag{4.147}$$

gesetzt werden.

Für $\sigma = 0$ muß nach der Definition des Brennpunktes

$$\sigma' = \frac{h'}{f'} = \frac{h}{f'} = hF'$$

sein. Gl. (4.146) ergibt

$$n'F' = \frac{n' - n}{r}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} n'\sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n'F' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\sigma \\ h \end{pmatrix}. \tag{4.148}$$

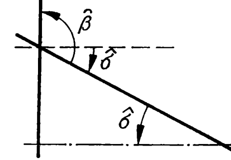


Abb. 4.58
Übergang zum paraxialen Gebiet

Die Übergangsmatrix nimmt wegen

$$\dot{i}'_k = \dot{e}'_k$$

die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{e}'_k & 1 \end{pmatrix} \tag{4.149}$$

an. Bei der Anwendung in Verbindung mit der Schreibweise nach Gl. (4.147) ist sie abzuwandeln in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dot{e}'_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.150}$$

4.1.9. Spezielle geometrisch-optisch abbildende Funktionselemente

Als spezielle geometrisch-optische Funktionselemente bezeichnen wir alle Elemente, die nicht ausschließlich aus zentrierten sphärischen brechenden oder reflektierenden Flächen bestehen. Wir teilen sie folgendermaßen ein:

— Spezielle zentrierte Elemente (sphärische und asphärische Spiegellinsen, asphärische Linsen);

— spezielle nichtzentrierte Elemente (Zylinderlinsen, torische Linsen, schräg stehende Planparallelplatten);
— Elemente mit nichtstetigen Flächen (Fresnel-Linsen, Wabenlinsen, Fliegenaugenlinsen);
— Elemente mit orts- oder richtungsabhängiger Brechzahl (Elemente aus inhomogenen oder anisotropen Stoffen).

In diesem Abschnitt behandeln wir asphärische Rotationsflächen, Spiegellinsen, Zylinderlinsen, torische Linsen und Fresnel-Linsen, Gradientenfasern und Wabenlinsen werden später behandelt.

Anwendung von asphärischen Rotationsflächen. Asphärische Flächen werden seltener in optischen Systemen angewendet als Kugelflächen, weil ihre Fertigung in feinoptischer Qualität schwieriger ist. Hinsichtlich der Schleif-, Läpp- und Polierverfahren gibt es zwei Möglichkeiten für die Fertigung asphärischer Flächen.

Bei der sogen. lokalen Retusche wird eine sphärische Fläche durch zonenweises Nachpolieren abgewandelt. Dieses Verfahren ist nur bei geringen Abweichungen von der Kugel ökonomisch vertretbar. Sein Erfolg hängt von der Geschicklichkeit des Feinoptikers ab. Das erzielte Ergebnis wird in gewissen Abständen überprüft. Die lokale Retusche ist langwierig und teuer. Als Beispiel kann der Astrovierlinser von Sonnefeld dienen (Abb. 4.59), bei dem die letzte Fläche retuschiert ist, um die Vereinigung außeraxialer Strahlen zu verbessern.

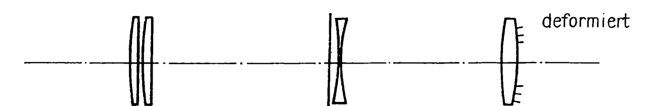


Abb. 4.59
Astrovierlinser nach Sonnefeld

Bei großen Abweichungen von der Kugel ist das maschinelle Vorfräsen der Flächen notwendig. Das endgültige Schleifen, Läppen und Polieren ist weniger aufwendig wenn die Maßhaltigkeit durch Feinfräsen weitgehend gesichert ist.

Durch spezielle Verfahren, wie z. B. das Trirota-Verfahren, bei dem die asphärische Fläche nur durch Rotationsbewegungen erzeugt wird, und seine Weiterentwicklung haben sich aussichtsreiche Lösungen für die Fertigung asphärischer Rotationsflächen ergeben.

Einige Beispiele für den Einsatz asphärischer Rotationsflächen sind:

In Kondensoren ist häufig die Genauigkeit der Flächen nicht so hohen Forderungen unterworfen, wie in Hochleistungsoptik. Sie stellen ein wichtiges Anwendungsgebiet der asphärischen Flächen dar.

In Spiegelfernrohren und in Scheinwerfern spielen asphärische Spiegelflächen eine große Rolle.

Ein besonderes Anwendungsfeld stellen die Weitwinkelobjektive für Luftbildaufnahmen mit extremen Forderungen dar. Auch in Fotoobjektiven werden sie bereits gelegentlich eingesetzt.

Darstellung asphärischer Rotationsflächen. Die Behandlung der Strahldurchrechnung an asphärischen Flächen erfordert deren analytische Darstellung. In den seltensten Fällen ist die Beschreibung mittels geschlossener Funktionen möglich. Im allgemeinen verwendet man Beziehungen, die den Unterschied zwischen der asphärischen Fläche und einer geometrisch ausgezeichneten Fläche in Form einer Polynomdarstellung beschreiben. Die ausgezeichnete Fläche wird möglichst so gewählt, daß die asphärische Fläche wenig davon abweicht. Drei Darstellungen sind besonders oft nahegelegt.

— Geringe Deformationen von der Ebene aus werden in kartesischen Koordinaten beschrieben, indem die Pfeilhöhe g als Funktion der Höhe h angegeben wird:

$$g = c_4 h^4 + c_6 h^6 + c_8 h^8 + \cdots \tag{4.151}$$

— Ist die Grundform eine Kugel, dann sind Polarkoordinaten angepaßt. Die Meridiankurve der asphärischen Rotationsfläche wird durch das Polynom

$$r = r_0 + c_4 \psi^4 + c_6 \psi^6 + c_8 \psi^8 + \cdots \tag{4.152}$$

dargestellt.

— In manchen Fällen ist bei großen Abweichungen von Ebene und Kugel von der Parabel auszugehen. In kartesischen Koordinaten gilt dann:

$$g = \frac{y^2}{2r_0}\left[1 + c_4 \frac{y^2}{2r_0} + c_6 \left(\frac{y^2}{2r_0}\right)^2 + c_8 \left(\frac{y^2}{2r_0}\right)^3 + \cdots\right]. \tag{4.153}$$

Die y-Koordinaten beziehen sich auf die Vergleichsparabel.

Berechnung einer asphärischen Rotationsfläche. Als Beispiel berechnen wir eine brechende Rotationsfläche, die den unendlich fernen Achsenpunkt in einen Bildpunkt abbildet. Wir gehen vom Satz von Malus aus, nach dem der Lichtweg

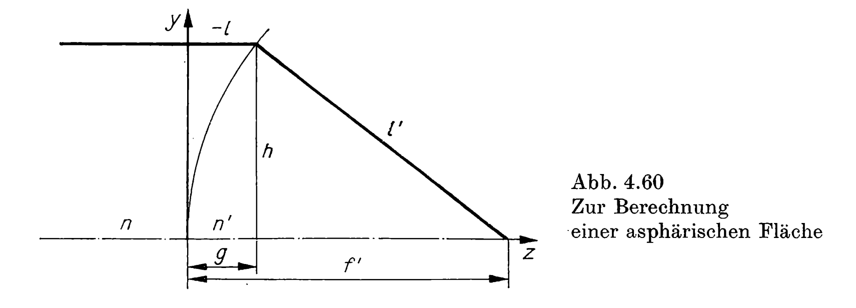


Abb. 4.60
Zur Berechnung einer asphärischen Fläche

zwischen zwei Wellenflächen konstant ist. Ein achsparalleler Strahl muß demnach von einer achssenkrechten Ebene bis zum Bildpunkt dieselbe optische Länge haben wie ein Strahl, der von derselben achssenkrechten Ebene aus längs der optischen Achse bis zum Bildpunkt verläuft. Nach Abb. 4.60 ist

$$-nl + n'l' = n'f'.$$

Es gilt

$$-l = g, \qquad l' = \sqrt{h^2 + (f' - g)^2},$$

also

$$ng + n' \sqrt{h^2 + (f' - g)^2} = n'f'.$$

Quadrieren ergibt

$$h^2 = \left[\left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 1\right] g^2 - 2f'g \left(\frac{n}{n'} - 1\right). \tag{4.154}$$

Das ist bei $n > n'$ die Gleichung eines Hyperboloids, bei $n < n'$ die Gleichung eines Ellipsoids.

Tabelle 4.21 enthält Koordinaten einer asphärischen Fläche mit $n = 1$, $n' = 1{,}5$ und $f' = 100$ mm. Ergänzen wir diese Fläche durch eine zum Bildpunkt konzentrische Fläche, dann entsteht eine Linse, die den unendlich fernen Achsenpunkt punktförmig abbildet (Abb. 4.61). Im Falle $n > n'$ ergibt sich eine Plankonvexlinse mit einer hyperbolischen Fläche (Abb. 4.62). Es ist jedoch zu beachten, daß beide Linsen zwar den Achsenpunkt punktförmig abbilden, nicht aber ein kleines achsensenkrechtes Flächenelement.

Tabelle 4.21
Koordinaten einer asphärischen Fläche

z/mm	y/mm
5	18,025
10	24,725
15	29,580
20	33,333
25	36,325
30	38,73

Im allgemeinen ist die Berechnung von asphärischen Rotationsflächen, die innerhalb eines optischen Systems oder an einer Einzellinse einen vorgegebenen Strahlenverlauf realisieren sollen, aufwendiger als im beschriebenen Beispiel. Normalerweise ist eine Differentialgleichung für die Meridiankurve zu lösen. Es kann aber auch die Bestimmung von diskreten Flächenpunkten aus der Strahldurchrechnung mit anschließender Darstellung der Flächengleichung als Ausgleichspolynom notwendig sein.

Spiegel mit Kegelschnitten als Meridiankurven. Die Gleichung der Meridiankurve eines Spiegels, der den unendlich fernen Achsenpunkt punktförmig abbildet, erhalten wir aus Gl. (4.154), wenn wir $n' = -n$ setzen:

$$h^2 = 4f'g.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel (Abb. 4.63a).

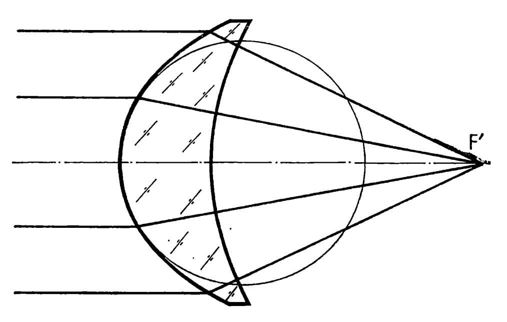


Abb. 4.61
Asphärische Linse (Rotationsellipsoid und Kugelfläche)

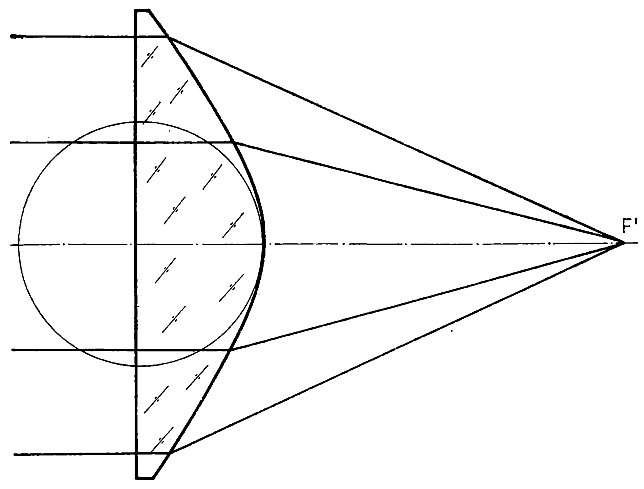


Abb. 4.62
Asphärische Linse (Planfläche und Rotationshyperboloid)

Die Abbildung eines im Endlichen liegenden reellen Objektpunktes in einen reellen Bildpunkt vermittelt das reflektierende Rotationsellipsoid (Abb. 4.63b). Ein außeraxialer Strahl hat die Länge $l_1 + l_2$, der Achsstrahl die Länge $2a$. Gleichheit beider Lichtwege ergibt die für eine Ellipse charakteristische Beziehung

$$l_1 + l_2 = 2a.$$

Die Kugelfläche ist der Sonderfall, bei dem der Objekt- und der Bildpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfallen.

Das Rotationshyperboloid bildet einen reellen Objektpunkt in einen virtuellen Bildpunkt ab (Abb. 4.63c). Das geht aus der Definition der Hyperbel hervor, für die

$$l_1 - l_2 = 2a$$

ist.

Spiegelflächen sind gegenüber Fertigungstoleranzen empfindlicher als brechende Flächen. Sie sollten deshalb nur als asphärische Flächen ausgebildet werden, wenn die gewünschte Wirkung nicht mit brechenden Flächen erreicht wird.

Strahldurchrechnung an asphärischen Rotationsflächen. Wir denken uns eine Fläche analytisch vorgegeben. Die Gleichung der Meridiankurve sei entweder in kartesischen Koordinaten $h = h(g)$ oder in Polarkoordinaten $r = r(\psi)$ ausgedrückt. Wir berechnen den Verlauf eines Meridionalstrahls.

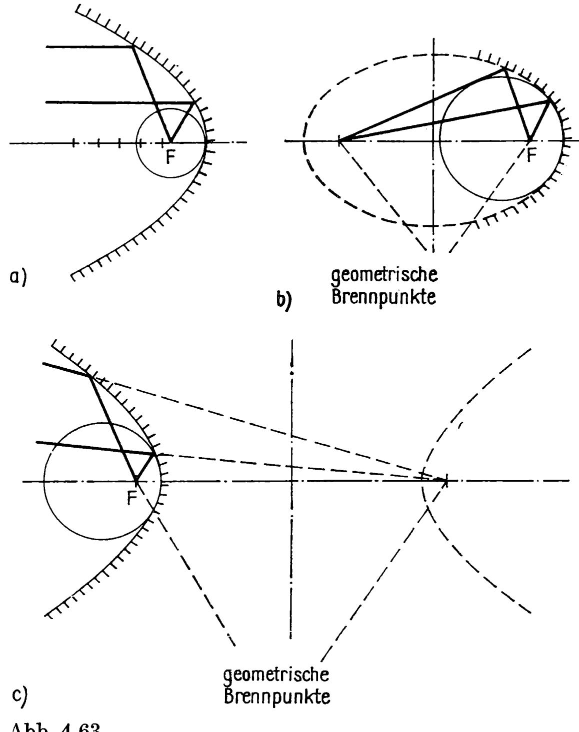


Abb. 4.63

a) Parabolspiegel
b) Elliptischer Spiegel
c) Hyperbolischer Spiegel

In *kartesischen Koordinaten* setzen wir zunächst voraus, daß die Schnittweite s und die Pfeilhöhe g vorgegeben sind (Abb. 4.64). Wir berechnen die Ableitung $h'(g)$. Aus

$$\varrho = h\sqrt{1 + h'^2} \quad \text{und} \quad \cot\varphi = h' \qquad (4.155,\ 4.156)$$

werden die Länge ϱ der Normalen und ihr Schnittwinkel mit der Achse gewonnen. (Gl. (4.155) und Gl. (4.156) übernehmen wir aus der Differentialgeometrie.)

Nach Abb. 4.64 erhalten wir weiter

$$\varrho_0 = \varrho \cos \varphi + g.$$

Mit $\cos \varphi = (\cot \varphi)/\sqrt{1 + \cot^2 \varphi}$ sowie (4.155) und (4.156) formen wir um in

$$\varrho_0 = hh' + g. \tag{4.157}$$

Außerdem gilt

$$\tan \hat{\sigma} = \frac{h}{\hat{s} - g}. \tag{4.158}$$

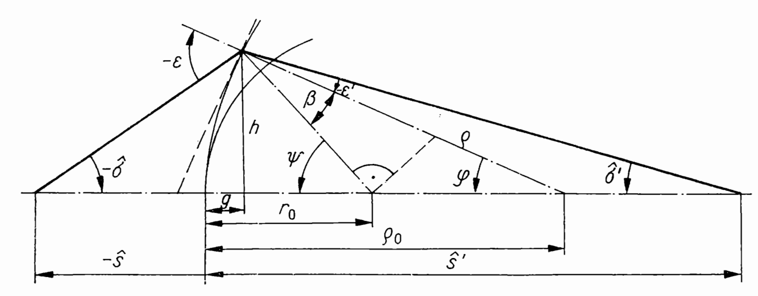


Abb. 4.64
Größen an einer asphärischen Rotationsfläche

Damit sind die Hilfsgrößen für die Strahldurchrechnung gegeben. An Hand von Abb. 4.64 leiten wir mit dem Sinussatz, dem Außenwinkelsatz und dem Brechungsgesetz auf dem gleichen Wege wie bei der sphärischen Fläche im Abschnitt 4.1.2. die Beziehungen

$$\sin \varepsilon = \frac{\varrho_0 - \hat{s}}{\varrho} \sin \hat{\sigma}, \tag{4.159}$$

$$\sin \varepsilon' = \frac{n}{n'} \sin \varepsilon, \tag{4.160}$$

$$\varphi = \hat{\sigma} - \varepsilon, \qquad \hat{\sigma}' = \varphi + \varepsilon', \tag{4.161, 4.162}$$

$$\hat{s}' = -\varrho \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \hat{\sigma}'} + \varrho_0 \tag{4.163}$$

ab. Gl. (4.161) wird nur zur Kontrolle benötigt, da φ bereits aus Gl. (4.156) folgt.

Für $\hat{s} = -\infty$ gilt

$$\hat{\sigma} = 0, \qquad \varepsilon = -\varphi. \tag{4.164}$$

(Die Rechnung beginnt erst bei Gl. (4.160).)

Die *Polarkoordinaten* wählen wir so, daß der Ursprung im Krümmungsmittelpunkt der Schmiegungskugel für den Scheitel der Fläche liegt. Die optische Achse

ist die Polarachse. Als Ausgangsgrößen dienen zunächst die Schnittweite $\hat{s}$ und der Winkel ψ. Die Hilfsgrößen folgen aus (Abb. 4.64):

$$\tan\beta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi} \quad \text{und} \quad \tan\hat{\sigma} = \frac{r\sin\psi}{\hat{s} - r_0 + r\cos\psi}. \tag{4.165, 4.166}$$

Die Durchrechnungsformeln, mit Sinussatz, Außenwinkelsatz und Brechungsgesetz abgeleitet, lauten:

$$\sin(\varepsilon - \beta) = \frac{r_0 - \hat{s}}{r}\sin\hat{\sigma}, \tag{4.167}$$

$$\sin\varepsilon' = \frac{n}{n'}\sin\varepsilon, \tag{4.168}$$

$$\hat{\sigma}' = \psi + \varepsilon' - \beta, \tag{4.169}$$

$$\hat{s}' = -r\frac{\sin(\varepsilon' - \beta)}{\sin\hat{\sigma}'} + r_0. \tag{4.170}$$

Bei $\hat{s} = -\infty$ fallen Gl. (4.166) und Gl. (4.167) wegen $\hat{\sigma} = 0$ weg. Es gilt dann

$$\varepsilon = \beta - \psi. \tag{4.171}$$

Bei den hier angegebenen Ableitungen der Durchrechnungsformeln für asphärische Flächen setzen wir voraus, daß die Pfeilhöhe g bzw. der Polarwinkel ψ gegeben ist. Steht die Fläche innerhalb eines optischen Systems, dann kennen wir über die Übergangsbeziehungen die Schnittweite $\hat{s}$ und den Schnittwinkel $\hat{\sigma}$. Die Größe von g bzw. ψ muß durch Probieren ermittelt werden. Dazu wird ψ näherungsweise vorgegeben (z. B. wird als Ausgangsgröße der Zentriwinkel φ_0 zum Durchstoßpunkt des Lichtstrahls mit dem Scheitelkreis verwendet). Aus der Flächengleichung erhalten wir eine Näherung für h bzw. r. Aus Gl. (4.158) bzw. Gl. (4.166) berechnen wir damit eine Näherung für $\hat{\sigma}$. Darauf wird ψ abgeändert und $\hat{\sigma}$ erneut bestimmt. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der richtige $\hat{\sigma}$-Wert erhalten wird. Sowohl bei der trigonometrischen Durchrechnung wie auch in Programmen zur Strahldurchrechnung ist es allerdings in der Praxis möglich und notwendig, iterative Verfahren zur Bestimmung des Strahldurchstoßpunktes anzuwenden.

Paraxiales Gebiet von asphärischen Rotationsflächen. Aus Gl. (4.159) und Gl. (4.163) folgt

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} = \frac{\varrho_0 - \hat{s}}{\varrho_0 - \hat{s}'}\frac{\sin\hat{\sigma}}{\sin\hat{\sigma}'}. \tag{4.172}$$

Die linke Seite ist wegen des Brechungsgesetzes n'/n. Auf der rechten Seite setzen wir die im paraxialen Gebiet gültigen Näherungen

$$\sin\hat{\sigma} \approx \frac{h}{s}, \quad \sin\hat{\sigma}' \approx \frac{h}{s'}, \quad \varrho_0 = r_0 \tag{4.173}$$

ein. Es ergibt sich die Abbesche Invariante:

$$n\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{s'}\right). \tag{4.174}$$

Im paraxialen Gebiet sind die Formeln für Kugelflächen gültig, wenn der Krümmungsradius r_0 der Schmiegungskugel des Flächenscheitels eingesetzt wird.

Bei geringen Ansprüchen an die Genauigkeit, z. B. bei asphärischen Flächen in Kondensoren, ist ein schneller Überblick über den Strahlenverlauf zu gewinnen, wenn das im Abschnitt 2.2.1. angegebene Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung des gebrochenen Strahls angewendet wird.

Zentrierte Spiegellinsen. Spiegellinsen stellen spezielle geometrisch-optische Funktionselemente dar, deren Hauptfunktion auf der Reflexion des Lichtes beruht. Zentrierte Spiegellinsen bestehen aus einer brechenden und einer reflektierenden Rotationsfläche. Ihr Vorteil gegenüber Oberflächenspiegeln besteht darin, daß die Spiegelfläche durch die davorliegende Glasschicht geschützt ist. Sie können deshalb leicht gesäubert werden.

Die Anwendbarkeit ist vor allem durch folgende Nachteile begrenzt:

- Neben dem einmal an der Spiegelfläche reflektierten Licht, dem Hauptreflex, entstehen Nebenreflexe. Von diesen ist der durch die Reflexion an der Vorderfläche auftretende Vorderreflex am stärksten. Die höheren Nebenreflexe nehmen intensitätsmäßig rasch ab. Der Vorderreflex kann durch die Entspiegelung mittels Interferenzschichten herabgesetzt werden. Für große Spiegellinsen ist aber das Aufbringen der Schichten schwer zu realisieren.
- Im Glas entstehen Absorptionsverluste, die bei großen und damit dicken Spiegellinsen über 5% betragen können.
- Die zweimalige Brechung an der Vorderfläche ist mit Farbfehlern verbunden, so daß ein wesentlicher Vorteil der Spiegel verlorengeht.

Spiegellinsen werden selten für hochwertige optische Systeme eingesetzt. Ihre Hauptanwendungsgebiete liegen bei den Scheinwerfern, den Signaloptiken, Beleuchtungssystemen und Fahrzeugleuchten.

Paraxiales Gebiet von Spiegellinsen. Für die Abbildung im paraxialen Gebiet sind die Abbildungsgleichungen unabhängig von der Flächenform, weil nur der Scheitelkreisradius in die Beziehungen eingeht. Wir berechnen die Scheitelbrennweite und die Brennweite, indem wir die Methode der aufgespalteten Spiegelflächen anwenden (Abb. 4.65). An der ersten Fläche gilt wegen $s_1 = -\infty$ nach Gl. (4.22)

$$s_1' = f_1' = \frac{nr_1}{n-1}. \tag{4.175}$$

Die Übergangsbeziehung zur zweiten Fläche

$$s_2 = s_1' - d \tag{4.176}$$

ergibt zusammen mit der Abbildungsgleichung (4.114)

$$\frac{1}{s_2'} = \frac{1}{s_2} - \frac{2}{r_2} \tag{4.177}$$

den Kehrwert der bildseitigen Schnittweite an der Spiegelfläche:

$$\frac{1}{s_2'} = \frac{(n-1)\,r_2 - 2nr_1 + 2(n-1)\,d}{nr_1r_2 - (n-1)\,r_2d}. \tag{4.178}$$

Aus der Abbildungsgleichung an der dritten Fläche

$$\frac{n_3'}{s_3'} - \frac{n_3}{s_3} = \frac{n_3'}{f_3'} \tag{4.179}$$

ergibt sich mit $s_3 = s_2' - d$ und Gl. (4.175)

$$\frac{1}{s_3'} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n}{s_2' - d} = \frac{(n-1)\,(s_2' - d) + nr_1}{r_1(s_2' - d)} \tag{4.180}$$

oder

$$F_s' = \frac{1}{s_3'} = \frac{n[(n-1)\,r_2 - 2nr_1 + 2(n-1)\,d]}{nr_1r_2 - 2(n-1)\,r_2d + 2nr_1d - 2(n-1)\,d^2} + \frac{n-1}{r_1}. \tag{4.181}$$

Die Brennweite folgt aus Gl. (4.37)

$$f' = \frac{s_1's_2's_3'}{s_2s_3}. \tag{4.182}$$

Mit s_2 und s_3 entsprechend Gl. (4.176) sowie s_3' nach Gl. (4.180) erhalten wir

$$f' = \frac{s_1's_2'r_1(s_2' - d)}{(s_1' - d)\,(s_2' - d)\,[(n-1)\,(s_2' - d) + nr_1]}. \tag{4.183}$$

s_1' wird mit Gl. (4.175), s_2' mit Gl. (4.178) eliminiert. Nach einigen Umformungen entsteht die Beziehung

$$f' = \frac{nr_1^2r_2}{2}\,\frac{1}{(n-1)\,r_2[nr_1 - (n-1)\,d] - nr_1[nr_1 - 2(n-1)\,d] - (n-1)^2\,d^2}. \tag{4.184}$$

Beispiele von Spiegellinsen

— Spiegellinsen mit konzentrischen Kugelflächen, für die also $r_2 = r_1 - d$ gilt, haben für $s = -\infty$ oder $s' = \infty$ einen sehr störenden Vorderreflex. Dadurch sind sie schlecht als Scheinwerferoptiken zu gebrauchen. Sie eignen sich aber als Beleuchtungsspiegel großer Öffnung mit einem Abbildungsmaßstab $\beta' \approx -1$.
Die Brennweite folgt aus Gl. (4.184) zu

$$f' = \frac{nr_1(r_1 - d)}{2[-nr_1 + (n-1)\,d]}. \tag{4.185}$$

— Spiegellinsen mit nichtkonzentrischen Kugelflächen eignen sich für unendliche Objekt- oder Bildweite, wenn der Objekt- oder Bildpunkt in den Krümmungsmittelpunkt der Vorderfläche gelegt wird (Abb. 4.66). Dadurch wird der Vorderreflex unschädlich gemacht. Derartige Spiegellinsen wurden früher als Scheinwerferspiegel mit der Bezeichnung „Manginspiegel" eingesetzt. Mit $s_3' = -r_1$ ergibt sich aus Gl. (4.181) der Radius der Spiegelfläche:

$$r_2 = 2\,\frac{(2n-1)\,r_1 d - n r_1^2 - (n-1)\,d^2}{2(n-1)\,d - r_1(2n-1)}. \tag{4.186}$$

Der Nachteil der Manginspiegel ist ihre große Randdicke, besonders bei großen Durchmessern. Damit verbunden sind ein hohes Gewicht, Spannungen beim Erwärmen und Farbfehler.

— Für Scheinwerfer werden Spiegellinsen hergestellt, die Parabolflächen oder deformierte Parabolflächen haben. Damit lassen sich günstige Abbildungseigenschaften und geringe Reflexe erreichen. Ein Beispiel dafür ist der R-Spiegel, der im VEB Carl Zeiss JENA entwickelt wurde.

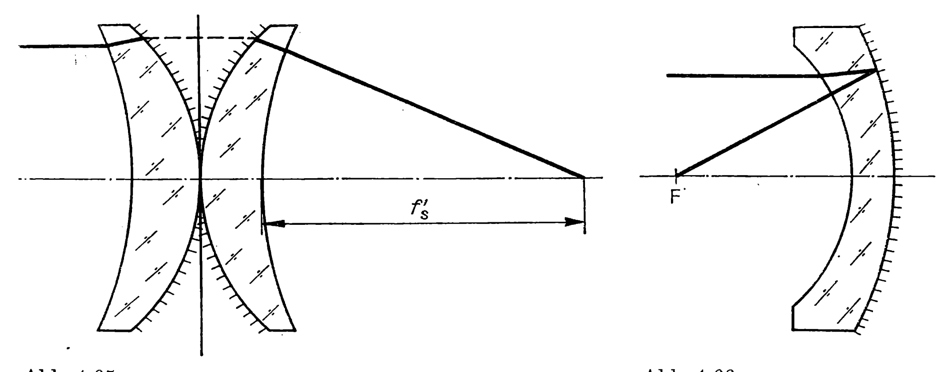


Abb. 4.65
Spiegellinse mit aufgespalteter Spiegelfläche

Abb. 4.66
Mangin-Spiegel

Zylinderlinsen gehören zu den nichtzentrierten abbildenden Funktionselementen. Die optisch wirksamen Flächen stellen polierte Zylinderflächen dar (Abb. 4.67).

> Eine Zylinderlinse enthält zwei polierte Zylinderoberflächen, deren Rotationsachsen parallel zueinander verlaufen.

Die Kreiszylinderlinse wird von Kreiszylindern begrenzt. Die von den Zylinderachsen aufgespannte Ebene stellt eine Symmetrieebene dar. Beim Einsatz der Zylinderlinse in einem zentrierten optischen System muß darauf geachtet werden, daß die optische Achse beide Zylinderachsen senkrecht schneidet. Zylinderlinsen, die in zylindrische Fassungen aufgenommen werden sollen, sind zu „zentrieren". Darunter ist zu verstehen, daß die Formachse — d. h. die Symmetrieachse der äußeren Berandung — beide Zylinderachsen senkrecht schneidet.

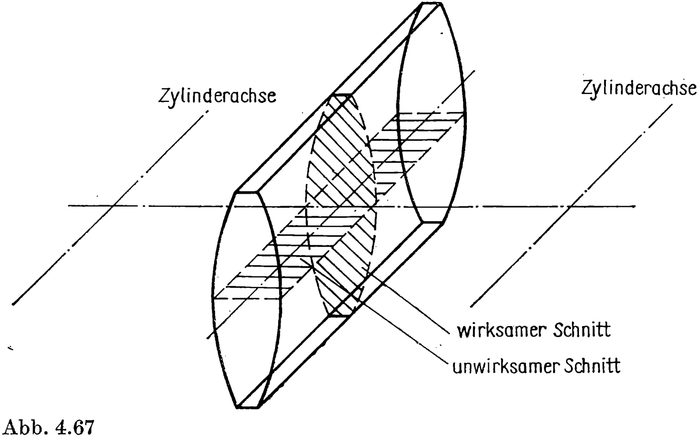


Abb. 4.67
Zylinderlinse

Die Zylinderlinse hat zwei ausgezeichnete Schnitte (Abb. 4.67). Ein senkrecht auf den Zylinderachsen stehender Schnitt wird als wirksamer Schnitt bezeichnet.
Ein parallel zu der Ebene, die die Zylinderachsen enthält, liegender Schnitt wird als unwirksamer Schnitt bezeichnet. Lichtstrahlen, die im wirksamen Schnitt liegen, werden so gebrochen wie die Meridionalstrahlen an einer sphärischen Linse. Dem wirksamen Schnitt kann eine Brennweite zugeordnet werden. Strahlen, die im unwirksamen Schnitt verlaufen, werden wie an einer planparallelen Platte gebrochen, also nur parallel zu sich versetzt (Abb. 4.68).

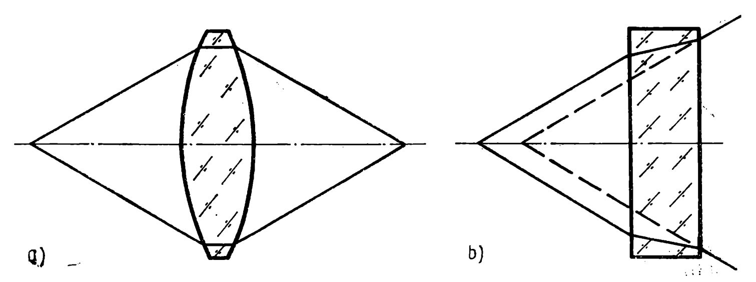


Abb. 4.68
Brechung im wirksamen (a) bzw. unwirksamen (b) Schnitt der Zylinderlinse

Zylinderlinsen bilden weder punktförmig noch ähnlich ab. Sie sind überhaupt nicht geeignet, Strahlenbündel in der Umgebung eines Punktes zu vereinigen. Im paraxialen Gebiet der beiden ausgezeichneten Schnitte ist der Abbildungsmaßstab unterschiedlich, und zwar ist er im unwirksamen Schnitt $\beta' = 1$, im wirksamen Schnitt von der Objektweite und der Brennweite abhängig. Dabei ist aber noch zu beachten,

daß die Vereinigungspunkte der Strahlen des unwirksamen und des wirksamen Schnittes im allgemeinen weit auseinanderfallen.

Die Wirkung von Zylinderlinsen soll an einigen Beispielen verdeutlicht werden. Die brechenden Flächen seien jeweils so berechnet, daß die Strahlen, die in einem wirksamen Schnitt verlaufen, in einem Punkt vereinigt werden.

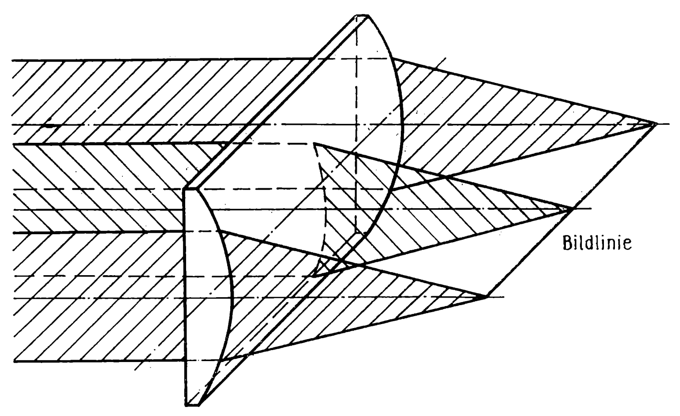


Abb. 4.69
Bildlinie bei der Brechung an der Zylinderlinse ($s = -\infty$)

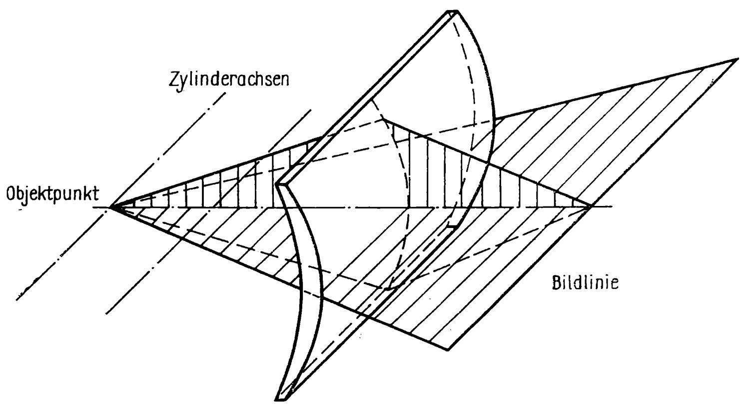


Abb. 4.70
Bildlinie bei der Brechung an der Zylinderlinse ($s \neq \infty$)

In Abb. 4.69 wird ein Objektpunkt abgebildet, der senkrecht vor der Planfläche im Unendlichen liegt. Es ist zu erkennen, daß jeweils nur die Strahlenbündel der einzelnen wirksamen Schnitte in einem Punkt vereinigt werden. Als Bild des Objektpunktes ist eine Bildlinie anzusehen. Die Lichtenergie verteilt sich auf eine Gerade.

In der Abb. 4.70 liegt der Objektpunkt im Endlichen senkrecht vor der Mitte der Zylinderlinse. In diesem Fall gibt es überhaupt nur ein Büschel, das in einem wirksamen Schnitt verläuft und ein Büschel, das in einem unwirksamen Schnitt

verläuft. Alle anderen Strahlen sind windschiefe Strahlen. Damit treten Abweichungen der Strahlendurchstoßpunkte von der eigentlichen Bildlinie auf.

Die Abbildung einer Objektlinie, die parallel zu den Zylinderachsen in der Symmetrieebene liegt, führt zu einer verwaschenen Bildlinie. Ein Objektspalt, dessen Mittellinie die gleiche Lage hat, wird so abgebildet, daß sich seine Länge nur in Abhängigkeit von der Divergenz des im unwirksamen Schnitt verlaufenden Büschels ändert, seine Breite aber entsprechend dem Abbildungsmaßstab im wirksamen Schnitt abgewandelt wird. Gewisse Bildunschärfen durch die windschiefen Strahlen sind nicht zu vermeiden (Abb. 4.71).

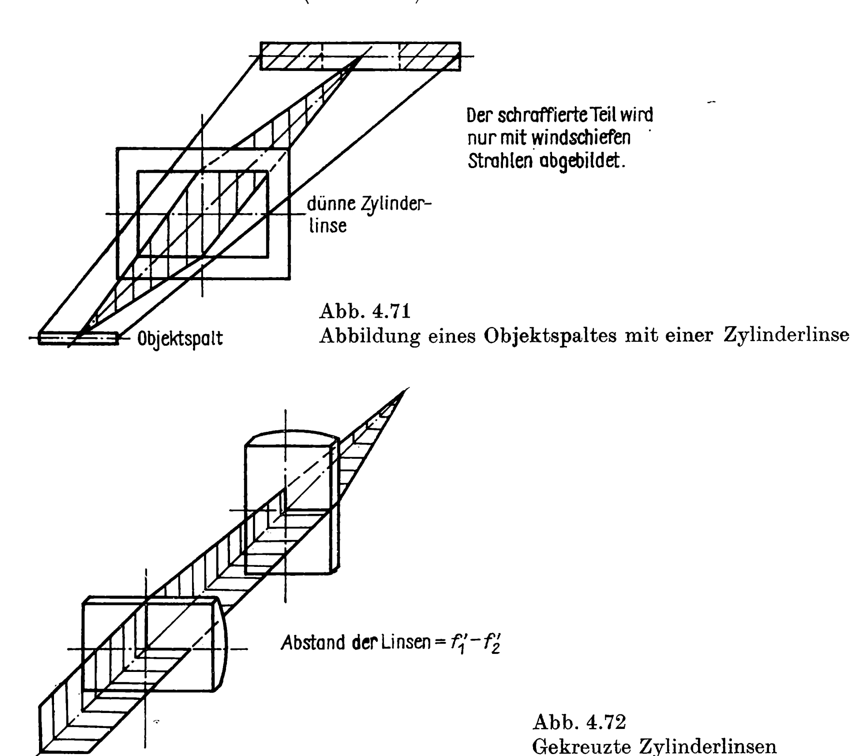


Abb. 4.71
Abbildung eines Objektspaltes mit einer Zylinderlinse

Abb. 4.72
Gekreuzte Zylinderlinsen

Der Abbildungsmaßstab läßt sich in zwei zueinander senkrechten Schnitten unterschiedlich gestalten, wenn zwei Zylinderlinsen gekreuzt angeordnet werden (Abb. 4.72).

Beim *Anamorphoten* aus einem sammelnden und einem zerstreuenden Glied aus Zylinderlinsen, die wie ein holländisches Fernrohr wirken, ist eine Bilddehnung oder -stauchung in einem Schnitt möglich. In Verbindung mit einem Projektionsobjektiv, das die praktisch punktförmige Abbildung übernimmt, wird das bei der Aufnahme einseitig gestauchte Bild wieder gedehnt und damit die Breitwandprojektion ermöglicht (Abb. 4.73).

Torische Flächen stellen nichtzentrierte Flächen dar, die vorwiegend in Brillengläsern verwendet werden. Torische Linsen bestehen im allgemeinen aus einer torischen und einer sphärischen Fläche. Sie haben in senkrecht zueinander stehenden Schnitten verschiedene Brechkräfte und dienen der Korrektur astigmatischer Augen. Wir beschreiben die Entstehung einer torischen Fläche (Abb. 4.74).

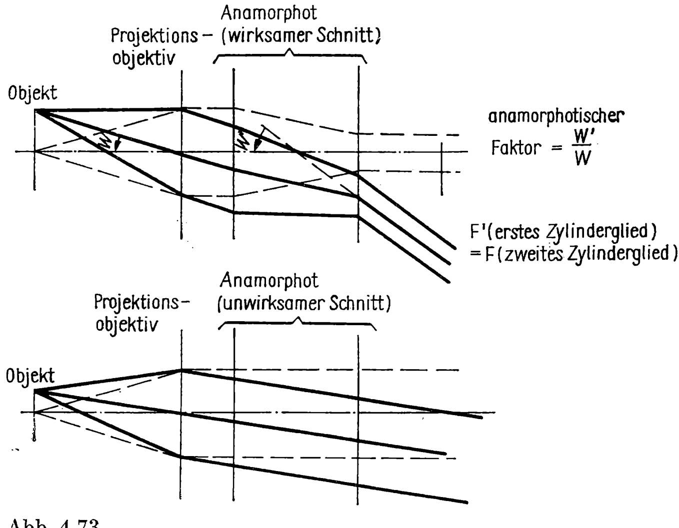


Abb. 4.73
Anamorphot aus Zylinderlinsen

Gegeben sei ein Kreisbogen mit dem Radius r_2, der in der Y-Z-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Wir drehen diesen Kreisbogen um eine zur Y-Achse parallele Achse. Die Entfernung der Drehachse von der Y-Achse betrage r_1. Die vom Kreisbogen überstrichene Fläche wird als torische Fläche bezeichnet. Einen beliebigen Punkt des in der X-Z-Ebene entstehenden Schnittkreises mit dem Radius r_1 können wir als Flächenscheitel V ansehen. In diesen legen wir den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z, so daß die x-y-Ebene Tangentialebene zur torischen Fläche ist.

Im Flächenscheitel hat also die torische Fläche in der y-z-Ebene den Krümmungsradius r_2, in der x-z-Ebene den Krümmungsradius r_1. Die Krümmungsradien sind demnach in zwei senkrecht zueinander stehenden Schnitten verschieden, so daß die torische Fläche nicht zentriert ist. Für zwei enge Büschel, die die Fläche in der Ebene des Flächenscheitels durchstoßen, betragen die wirksamen Brennweiten

$$f_1' = \frac{n' r_1}{n' - n} \quad \text{und} \quad f_2' = \frac{n' r_2}{n' - n}. \tag{4.187a, b}$$

Die Ebene, die im Scheitel den Kreis mit dem Radius r_1 aus dem Torus ausschneidet, heißt Rotationsschnitt. Für einen beliebigen Rotationsschnitt ist P_2C_0 der wirksame

Krümmungsradius. Jede senkrecht zum Rotationsschnitt stehende Ebene bildet einen Meridianschnitt, der einen Schnittkreis mit dem Radius $P_2C_2 = r_2$ enthält. P_2C_2 gibt die Richtung der Flächennormalen an.

Bei $r_1 > r_2$ spricht man von einem „wurstförmigen“ Torus;
bei $r_1 < r_2$ spricht man von einem „tonnenförmigen“ Torus.

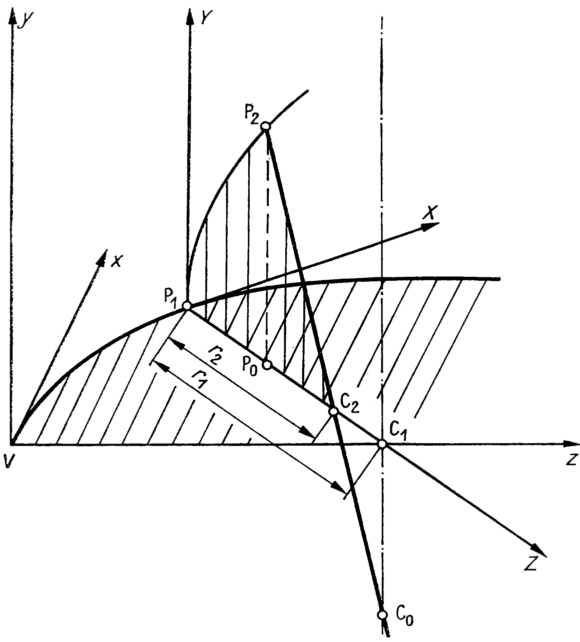


Abb. 4.74
Zur Entstehung der torischen Fläche

Fresnel-Linsen stellen Stufenlinsen dar. Sie bestehen aus Ringzonen, die jeweils ein Lichtbündel in die gewünschte Richtung brechen. Die älteren Fresnel-Linsen, wie sie in Scheinwerfern und Signaloptiken eingesetzt werden, haben relativ grobe Stufen. Sie werden aus Glas gepreßt, und die Begrenzungsflächen der Zonen sind im Meridionalschnitt gekrümmt (Abb. 4.75). Fresnel-Linsen lassen sich bei geringem Gewicht mit großem Öffnungsverhältnis herstellen.

Als Beleuchtungsoptiken für Positionslampen von Schiffen oder Seezeichen werden Gürtellinsen verwendet. Diese kann man sich entstanden denken, indem der Meridionalschnitt einer Fresnel-Linse um eine zur optischen Achse senkrechte Achse gedreht wird. (Die Gürtellinse stellt dann einen Kreiszylinder dar, auf dessen Oberfläche die Ringzonen angeordnet sind, Abb. 4.76.) Im allgemeinen Fall kann die Gürtellinse auch eine vom Kreiszylinder abweichende Form haben.

Die heute im Gerätebau eingesetzten Fresnel-Linsen bestehen im allgemeinen aus Plaste. Sie haben sehr feine Stufen (bis etwa 0,05 mm herab), so daß die brechenden Flächen, die Wirkflanken, aus technologischen Gründen Ausschnitte aus Kreis-

kegeln sein müssen. Der Übergang zwischen den Wirkflächen wird durch Störflanken gebildet (Abb. 4.77). Diese führen in der Bildebene zu Streulicht und zu ringförmigen Abschattungsgebieten, wenn die Fresnel-Linse als Kondensor in der Nähe der Objektebene steht.

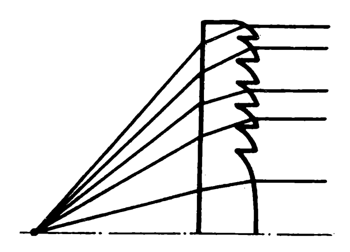


Abb. 4.75
Fresnel-Linse mit gekrümmten Wirkflanken

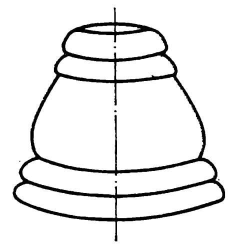


Abb. 4.76
Zylindrische Gürtellinse

Für die Fresnel-Linse, die ein Parallelbündel fokussieren soll, gilt nach Abb. 4.78 für die k-te Ringzone

$$\varepsilon_{2k} = \gamma_k, \qquad \delta_k = \varepsilon'_{2k} - \gamma_k, \qquad \tan \gamma_k = \frac{h_k}{s'_2}. \tag{4.188a...c}$$

Setzt man ε_{2k} nach Gl. (4.188a) und ε'_{2k} nach Gl. (4.188b) in das Brechungsgesetz ein, so erhält man

$$n \sin \gamma_k = \sin (\delta_k + \gamma_k).$$

Nach Umformen ergibt sich mit Gl. (4.188c)

$$\tan \gamma_k = \frac{\dfrac{h_k}{s'_2}}{n \sqrt{1 + \left(\dfrac{h_k}{s'_k}\right)^2} - 1}. \tag{4.189}$$

Die Zone mit der Flankenneigung γ_k vereinigt das ringförmige Bündel mit der Breite Δh_k längs der Achse auf der Strecke

$$\Delta s'_2 = \Delta h_k \cot \delta_k = s'_2 \frac{\Delta h_k}{h_k}. \tag{4.190}$$

Es ist also

$$\frac{\Delta s'_2}{s'_2} = \frac{\Delta h_k}{h_k} = \text{const} \tag{4.191}$$

zu wählen, wenn die Bündel aller Zonen im gleichen Intervall der Achse vereinigt werden sollen. Der Zerstreuungskreis in einer achssenkrechten Ebene ist allerdings nur von der Zonenbreite Δh_k abhängig.

Die Fresnel-Linse zerlegt eine ebene Wellenfläche in Ringzonen mit unterschiedlicher Phase auf einer Bezugskugel um den angestrebten Bildpunkt (mit der Schnitt-

weite s_2'). Sie bewirkt also auch bei infinitesimal schmalen Wirkflanken keine punktförmige Abbildung mit gleichen Phasen der Teilwellen. Der Lichtweg von einer achssenkrechten Ebene vor der Linse bis zum „Bildpunkt" ist nicht konstant.

Durch das Überlagern von zwei Systemen aus Wirkflanken auf demselben Untergrund lassen sich Fresnel-Linsen mit zwei „Bildpunkten" herstellen, allerdings mit vermindertem Bildkontrast.

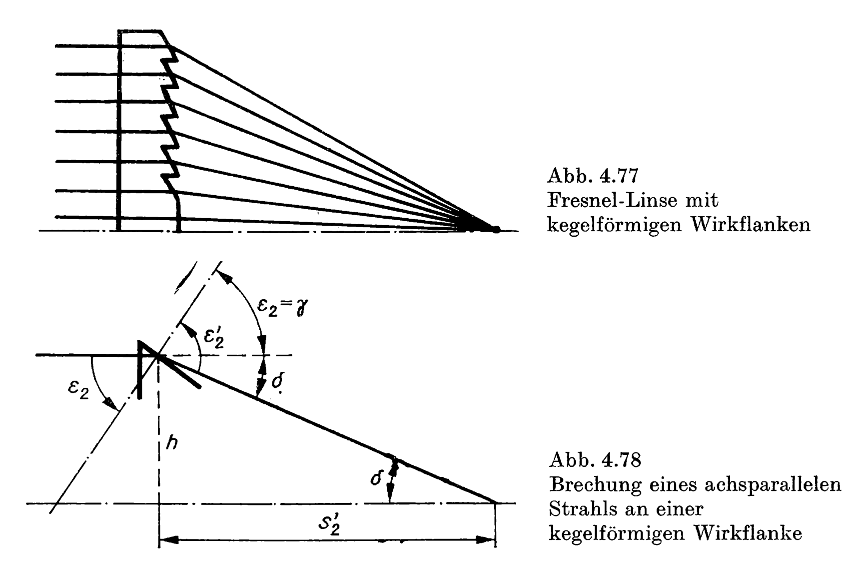


Abb. 4.77
Fresnel-Linse mit kegelförmigen Wirkflanken

Abb. 4.78
Brechung eines achsparallelen Strahls an einer kegelförmigen Wirkflanke

Mit zwei Fresnel-Linsen ist ein im Endlichen liegender Objektpunkt in einen im Endlichen liegenden Bildpunkt abzubilden, wobei das Lichtbündel zwischen den Linsen achsparallel sein kann. Die Struktur der Wirk- und Störflanken muß aufeinander abgestimmt sein.

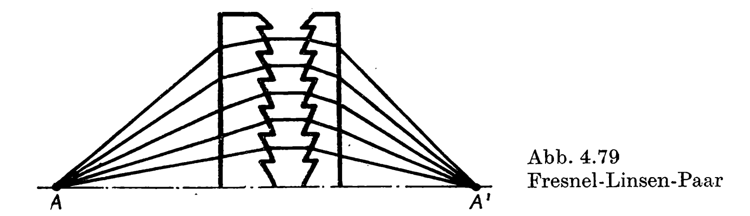


Abb. 4.79
Fresnel-Linsen-Paar

Berücksichtigt man die Brechung an den Planflächen, dann ist ein Paar von Fresnel-Linsen möglich, deren Struktur gegenübersteht (Abb. 4.79). Damit ist diese vor Staub geschützt. Die geeignete Berechnung der Wirk- und Störflanken sichert, daß die zweite Linse nicht das von den Wirkflanken der ersten Linse ausgehende Licht abschattet.

Schließlich ist auch das Anbringen der Rillenstruktur auf einem gekrümmten Untergrund möglich.

4.2. Bündelbegrenzende optische Funktionselemente

4.2.1. Begrenzung der Öffnung

Blenden. In der geometrischen Optik werden die Objekte mit Strahlenbündeln abgebildet, die von den einzelnen Objektpunkten ausgehen. In den optischen Systemen blenden die Spiegel-, Prismen- und Linsenfassungen sowie besondere Blenden aus den objektseitigen Lichtkegeln die Bündel aus, die die Abbildung vermitteln. Der gesamte damit zusammenhängende Komplex an Erscheinungen wird als „Strahlenbegrenzung" bezeichnet, obwohl der Begriff „Bündelbegrenzung" besser ist. Dieser soll deshalb hier bevorzugt werden.

Sämtliche Öffnungen im Strahlenraum eines optischen Systems, die an der Bündelbegrenzung beteiligt sind, heißen Blenden.

Im allgemeinen nehmen wir die Blenden kreisförmig und konzentrisch zur optischen Achse an, d. h., wir setzen im allgemeinen zentrierte optische Systeme und Blenden voraus. Nur bei anderen Blendenformen und -lagen soll besonders darauf hingewiesen werden.

Die Bündelbegrenzung durch Blenden hat für die Realisierung der optischen Abbildung große Bedeutung. Wir erkannten im Abschnitt 4.1., daß Linsen und Spiegel, also geometrisch-optisch abbildende Funktionselemente, im allgemeinen nicht punktförmig abbilden, sondern nur eine Strahlenvereinigung in der Nähe von Bildpunkten ermöglichen. Dabei war bereits stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die Strahlenbündel begrenzt sind. Anderenfalls streuen die Schnittpunkte der Strahlen über einen sehr großen Bereich. Wir erläutern dies am Beispiel einer brechenden Fläche (Tab. 4.22 und Abb. 4.80). Verwenden wir das — auch bereits

Tabelle 4.22
Schnittweiten und Zerstreuungskreisradien an einer brechenden Fläche

h/mm	$\check{s}'$/mm	r'/mm
10	145,21	0,089
20	141,23	0,767
30	134,09	3,000
40	122,43	9,395
45	113,55	17,368

begrenzte — Bündel mit 90 mm Durchmesser, dann liegt der Schnittpunkt des Randstrahls mit der Achse 32,94 mm vor dem paraxialen Bildpunkt. Die Strahlenvereinigung ist schlecht. In der Gaußschen Bildebene entsteht ein Zerstreuungskreis mit 17,37 mm Radius (Tab. 4.22). Die Abbildung verbessert sich beim Abblenden beträchtlich, z. B. mit einer Irisblende auf 20 mm Bündeldurchmesser. Die maximale Abweichung der Strahlschnittpunkte vom paraxialen Bildpunkt beträgt dann nur noch 1,28 mm, und der Zerstreuungskreis schrumpft auf 0,089 mm Radius zusammen. Im angeführten Beispiel der Abb. 4.80 ist nur der Durchmesser einer Blende für die Abbildungsgüte entscheidend. In anderen Fällen ist auch der Ort der Blende wichtig.

Einzelheiten über den Einfluß der Blenden auf die Strahlenvereinigung werden wir im Abschnitt 4.3. behandeln. Es gibt jedoch grundlegende Blendenwirkungen, die mit ausreichender Näherung durch Anwenden der Beziehungen des paraxialen Gebietes untersucht werden können. Diesen wenden wir uns in diesem Abschnitt vorwiegend zu.

Strenggenommen arbeiten wir in diesem Komplex mit so großen Blenden, Blendenbildern, Objekten und Bildern, daß das paraxiale Gebiet verlassen wird. Wenn wir in diesem Zusammenhang vom paraxialen Gebiet der geometrisch-optisch abbildenden Funktionselemente sprechen, dann meinen wir damit, daß wir die Formeln des paraxialen Gebietes anwenden. Da die Abbildung im paraxialen Gebiet ideal ist, wäre es eigentlich theoretisch exakt, von einer Untersuchung der Blendenwirkungen in einem ideal abbildenden System zu sprechen.

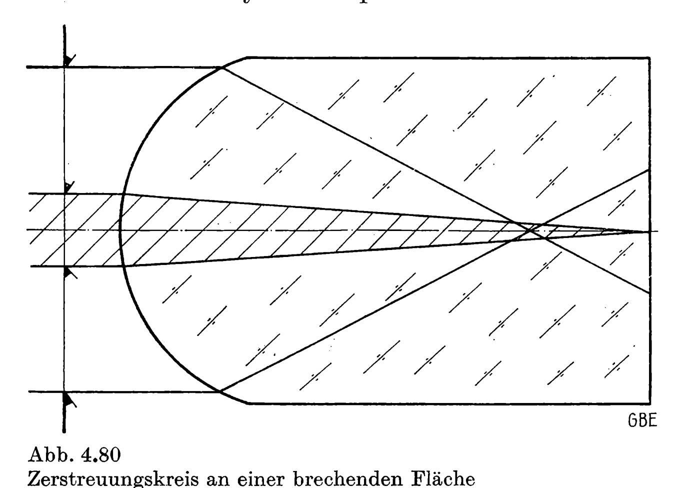


Abb. 4.80
Zerstreuungskreis an einer brechenden Fläche

Das Einzeichnen der Linsen in die Abbildungen dient zur Erhöhung der Anschaulichkeit und soll ständig darauf hinweisen, daß auch die Linsenfassungen als Blenden wirken.

Zu behandeln sind auf der dargestellten Basis

— die Begrenzung der Öffnung,
— die Begrenzung des Feldes,
— die Begrenzung des Zerstreuungskreises und
— die Begrenzung des Lichtstroms.

Die hier verwendeten Definitionen weichen teilweise von denen ab, die in TGL 20249 und in einigen Lehrbüchern verwendet werden. Die Unterschiede werden im Abschnitt 4.2.3. zusammengefaßt dargestellt.

Öffnungsblende. Wir beschäftigen uns zuerst mit der Begrenzung der Öffnung. Die hier betrachteten optischen Bilder sollen Luftbilder sein, d. h., sie werden nicht auf einem Schirm aufgefangen. Die Objektpunkte liegen auf der optischen Achse.

Abbildung 4.81 zeigt eine Plankonvexlinse. Die objektseitige Schnittweite beträgt $s = -\infty$, die bildseitige Schnittweite $s' = f'$ (weil Flächenscheitel und Hauptpunkt H′ zusammenfallen). Eine besondere Blende ist nicht vorhanden. Die Linsenfassung begrenzt das Bündel, das vom unendlich fernen Achsenpunkt ausgeht, indem sie objektseitig den Durchmesser $2\,h$ des Bündels festlegt.

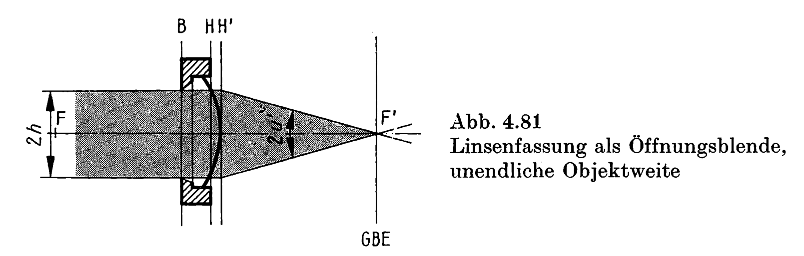


Abb. 4.81
Linsenfassung als Öffnungsblende, unendliche Objektweite

Abbildung 4.82 zeigt dieselbe Plankonvexlinse wie die Abb. 4.81, aber die objektseitige Schnittweite ist endlich. Die Begrenzung des Bündels durch die Linsenfassung kommt in der Festlegung des objektseitigen Öffnungswinkels $2u$ zum Ausdruck.

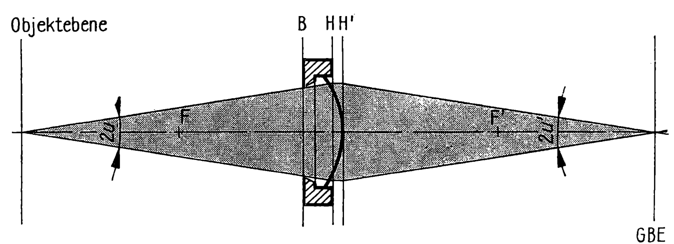


Abb. 4.82
Linsenfassung als Öffnungsblende, endliche Objektweite

Sowohl in der Abb. 4.81 wie auch in der Abb. 4.82 begrenzt die Blende den bildseitigen Öffnungswinkel $2u'$. Damit gelten folgende Definitionen:

Der $\dfrac{\text{objektseitige}}{\text{bildseitige}}$ Öffnungswinkel $\dfrac{2u}{2u'}$ ist der Winkel, den zwei in einer Ebene liegende Randstrahlen im $\dfrac{\text{Objektraum}}{\text{Bildraum}}$ einschließen.

Die Blende, die bei der Abbildung des unendlich fernen Achsenpunktes den objektseitigen Durchmesser $2h$, bei der Abbildung eines im Endlichen liegenden Achsenpunktes den objektseitigen Öffnungswinkel $2u$ des Lichtbündels begrenzt, ist die Öffnungsblende.

In den Abb. 4.81 und 4.82 wirkt die Linsenfassung als Öffnungsblende.

Bei optischen Systemen, die für endliche objektseitige Schnittweite verwendet werden, ist es aus theoretischen Gründen oft zweckmäßiger, statt des objektseitigen Öffnungswinkels die numerische Apertur A (lies Alpha) anzugeben. Diese ist definiert durch

$$A = n \sin u. \tag{4.192}$$

Der Faktor n ist die Brechzahl des Stoffes, der sich vor dem optischen System befindet.

Austrittspupille. In der Abb. 4.83 wurde gegenüber der Abb. 4.81 zusätzlich eine Blende vor der Linse angebracht. Wir sprechen von einer Vorderblende. Jetzt wirkt diese als Öffnungsblende, weil sie und nicht die Linsenfassung das Bündel einengt.

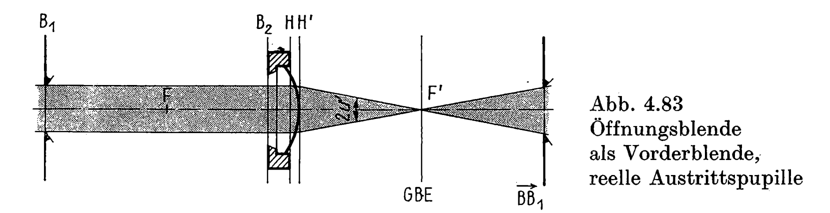


Abb. 4.83
Öffnungsblende als Vorderblende, reelle Austrittspupille

Wir bilden die Öffnungsblende paraxial durch die Linse ab und erhalten $\overrightarrow{BB}_1$. Das Symbol bedeutet: Durch Abbilden nach rechts entstandenes Bild der Blende B_1. Das Symbol steht unterhalb des Blendenbildes, weil es einem umgekehrten Bild zugeordnet ist. Da B_1 und $\overrightarrow{BB}_1$ zueinander konjugiert sind, verläuft das Bündel so, als befinde sich an der Stelle von $\overrightarrow{BB}_1$ eine wirkliche Blende.

Das bildseitige Bild der Öffnungsblende ÖB ist die Austrittspupille AP.

Die Kenntnis von Ort und Größe der Austrittspupille reicht bei bekanntem Bildort aus, um die Begrenzung des Lichtbündels im Bildraum zu bestimmen.

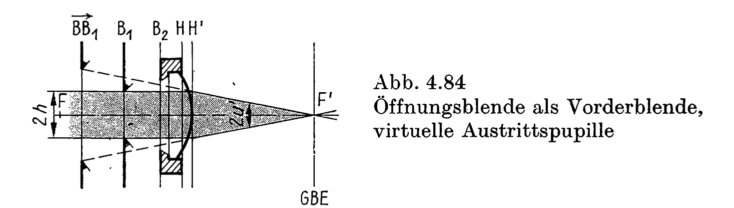


Abb. 4.84
Öffnungsblende als Vorderblende, virtuelle Austrittspupille

Die Abb. 4.84 unterscheidet sich von der Abb. 4.83 dadurch, daß die Öffnungsblende näher an die Linse herangerückt ist. Sie befindet sich innerhalb der Brennweite der Linse, so daß ihr Bild, die Austrittspupille, links der Linse liegt und virtuell ist. Dadurch gehen bildseitig die Randstrahlen nicht durch den Rand der Austrittspupille, sie scheinen von ihm herzukommen. (Die Strahlenverlängerungen gehen durch den Pupillenrand.) Die Äquivalenz von Öffnungsblende und Austrittspupille

drückt sich darin aus, daß die Austrittspupille den bildseitigen Öffnungswinkel $2u'$ festlegt. Damit ergibt sich eine zweite Möglichkeit, die Austrittspupille zu definieren.

> Die Austrittspupille AP ist das bildseitige Blendenbild, das bei einer im Endlichen liegenden Bildebene von deren Achsenpunkt aus unter dem kleinsten Winkel erscheint, bei einer im Unendlichen liegenden Bildebene das Blendenbild mit dem kleinsten Durchmesser.
> (Hinterblenden sind wie bildseitige Blendenbilder zu behandeln.)

Diese Definition ist besonders für das Aufsuchen der Austrittspupille bei unbekannter Lage der Öffnungsblende nützlich.

Eintrittspupille. In der Abb. 4.83 ändert sich an der Bündelbegrenzung nichts, wenn die Blende B_1 und ihr Bild $\overrightarrow{BB}_1$ ausgetauscht werden (Abb. 4.85). Es liegt dann eine Hinterblende vor. Diese wirkt in der Abb. 4.85 als Öffnungsblende, weil sie den bildseitigen Öffnungswinkel $2u'$ bestimmt.

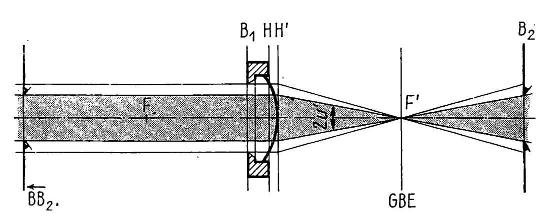


Abb. 4.85
Öffnungsblende als Hinterblende, reelle Eintrittspupille

Die Kenntnis des objektseitigen Blendenbildes $\overleftarrow{BB}_2$ genügt, um im Objektraum die Begrenzung des Bündels festlegen zu können. Ohne diese Kenntnis müßten wir das gesamte Bündel verfolgen, das die Linsenfassung hindurchläßt. Die Blende B_2 schneidet dann den in der Abb. 4.85 nicht getönten Anteil weg, so daß die nicht getönten Ränder des objektseitigen Bündels nicht an der Abbildung beteiligt sind.

> Das objektseitige Bild der Öffnungsblende ÖB ist die Eintrittspupille EP.

Weiter gilt also:

> Eintrittspupille, Öffnungsblende und Austrittspupille sind zueinander konjugiert.

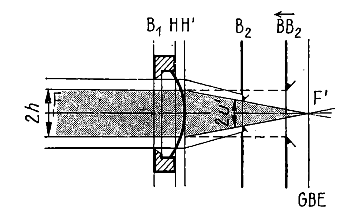


Abb. 4.86
Öffnungsblende als Hinterblende, virtuelle Eintrittspupille

Auch die Blende B_2 in der Abb. 4.86 stellt eine Hinterblende dar. Sie begrenzt das Bündel stärker als die Linsenfassung und ist deshalb die Öffnungsblende. Im Unterschied zur Abb. 4.85 ist in der Abb. 4.86 die Eintrittspupille ein virtuelles Bild der Öffnungsblende. Die objektseitigen Randstrahlen zielen demnach auf die Eintrittspupille hin und gehen nicht wirklich hindurch. Zur Bestimmung der Eintrittspupille bei unbekannter Lage der Öffnungsblende ist folgende Definition anwendbar:

> Die Eintrittspupille EP ist das objektseitige Blendenbild, das bei einer im Endlichen liegenden Objektebene von deren Achsenpunkt aus unter dem kleinsten Winkel erscheint, bei einer im Unendlichen liegenden Objektebene das Blendenbild mit dem kleinsten Durchmesser.
> (Vorderblenden sind wie objektseitige Blendenbilder zu behandeln.)

Als Maßzahl der objektseitigen Begrenzung der Öffnung verwenden wir bei unendlich fernem Objekt die Öffnungs- oder Blendenzahl k. Diese ist definiert durch

$$k = \frac{f'}{2h}. \tag{4.193}$$

$2h$ ist der Durchmesser der Eintrittspupille. Der Kehrwert der Öffnungszahl ist die relative Öffnung oder das Öffnungsverhältnis

$$K = \frac{2h}{f'}. \tag{4.194}$$

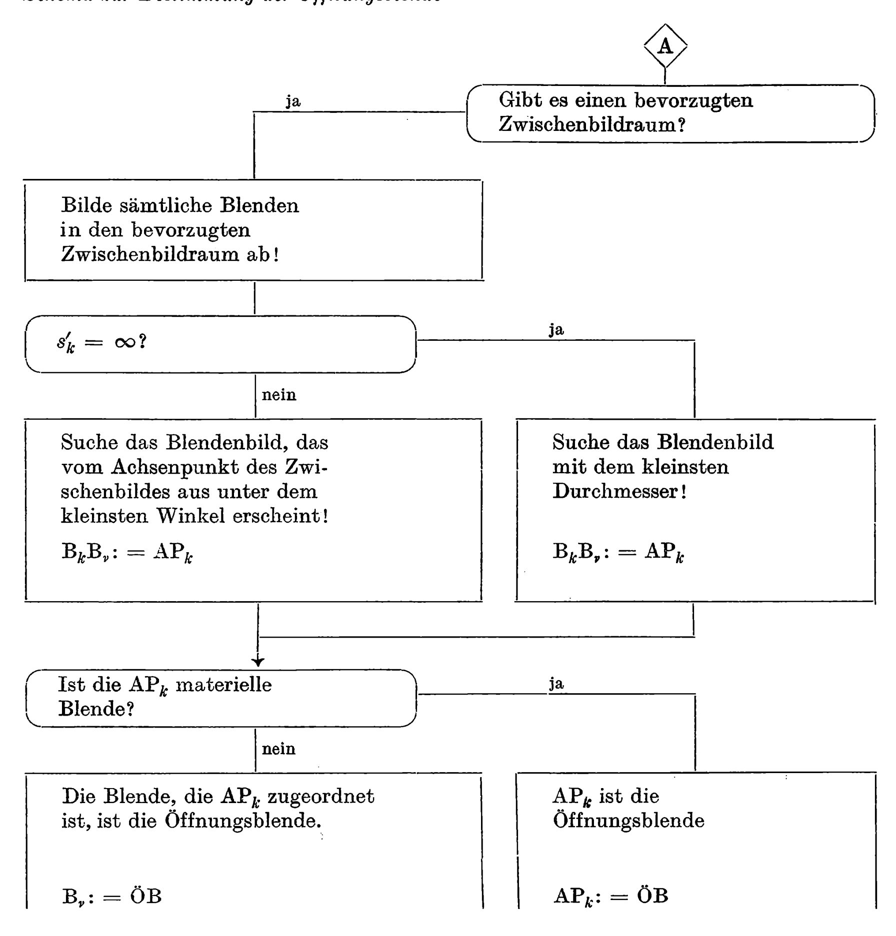
Abbildung 4.87 (S. 262) soll noch einmal demonstrieren, daß es vom Objektort abhängt, welche Blende als Öffnungsblende wirkt.

In der Abb. 4.87a ist die objektseitige Schnittweite unendlich. Die Blende B_1 hat einen kleineren Durchmesser als die Blende B_2, so daß sie Öffnungsblende (Vorderblende) und Eintrittspupille ist. Das Bild $\overrightarrow{BB}_1$ stellt die Austrittspupille dar; es erscheint vom Achsenpunkt des Bildes aus unter einem kleineren Winkel als die Blende B_2. In der Abb. 4.87b ist der Grenzfall dargestellt. B_1 und B_2 werden vom Achsenpunkt des Objektes aus unter dem gleichen Winkel gesehen. Wir haben zwei Eintrittspupillen, Öffnungsblenden und Austrittspupillen. Die Blende B_2 und das Blendenbild $\overrightarrow{BB}_1$ sind die Austrittspupillen. In der Abb. 4.87c schließlich ist die Blende B_2 Öffnungsblende, Eintrittspupille und Austrittspupille. (Den geringen Unterschied zwischen der Linsenfassung und ihrem Bild können wir in allen Fällen vernachlässigen, weil die Fassung sehr nahe bei der Hauptebene H steht.)

Bestimmung der Öffnungsblende. Der Algorithmus, mit dem die Begrenzung der Öffnung in einem beliebigen zentrierten optischen System untersucht werden kann, läßt sich in einem Flußbild darstellen (Tab. 4.23). Folgende Bezeichnungen und Begriffe sind zu erläutern:

Bevorzugter Zwischenbildraum. Eine optische Abbildung ist im allgemeinen zusammengesetzt, d. h., das Objekt wird nacheinander von mehreren Funktionselementen abgebildet. Das Bild, das vom ersten abbildenden Funktionselement

Tabelle 4.23
Schema zur Bestimmung der Öffnungsblende



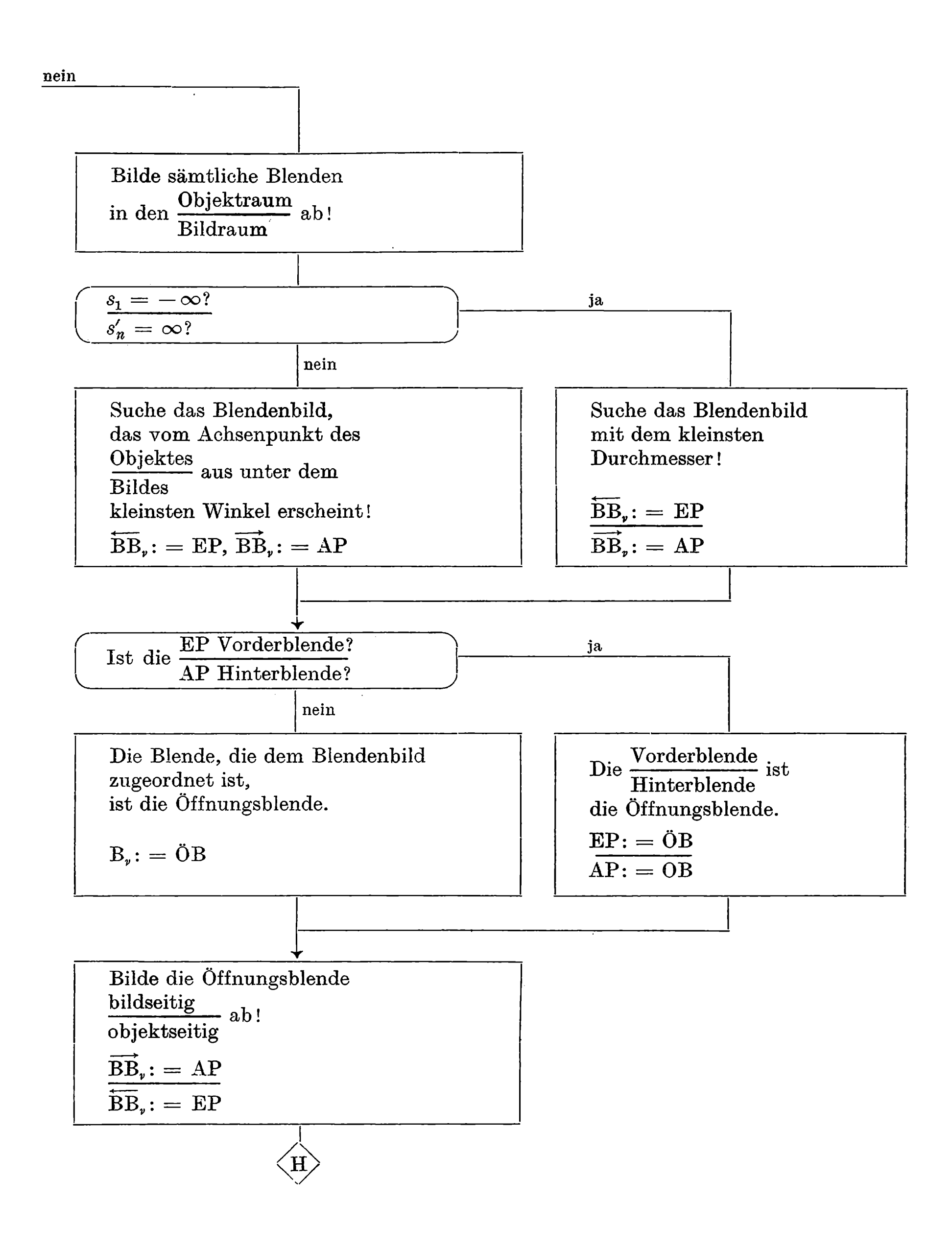

nein
Bilde sämtliche Blenden
in den Objektraum / Bildraum ab!
$s_1 = -\infty$?
$s'_n = \infty$?
ja
nein
Suche das Blendenbild,
das vom Achsenpunkt des
Objektes / Bildes aus unter dem
kleinsten Winkel erscheint!
$\overleftarrow{BB}_\nu := EP$, $\overrightarrow{BB}_\nu := AP$
Suche das Blendenbild
mit dem kleinsten
Durchmesser!
$\overleftarrow{BB}_\nu := EP$
$\overrightarrow{BB}_\nu := AP$
Ist die EP Vorderblende? / AP Hinterblende?
ja
nein
Die Blende, die dem Blendenbild
zugeordnet ist,
ist die Öffnungsblende.
$B_\nu := ÖB$
Die Vorderblende / Hinterblende ist
die Öffnungsblende.
EP: = ÖB
AP: = OB
Bilde die Öffnungsblende
bildseitig / objektseitig ab!
$\overrightarrow{BB}_\nu := AP$
$\overleftarrow{BB}_\nu := EP$
H

Tabelle 4.24
Bestimmung der Öffnungsblende für das System aus Abb. 4.88

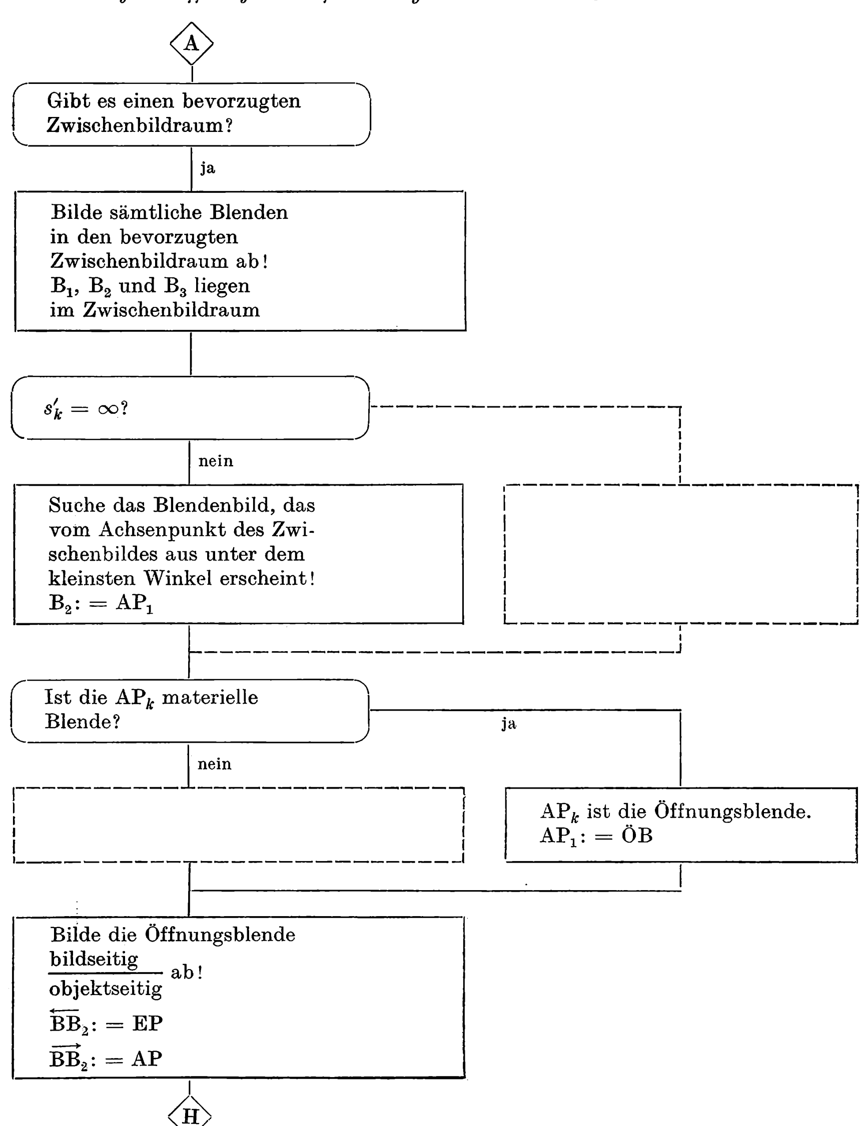
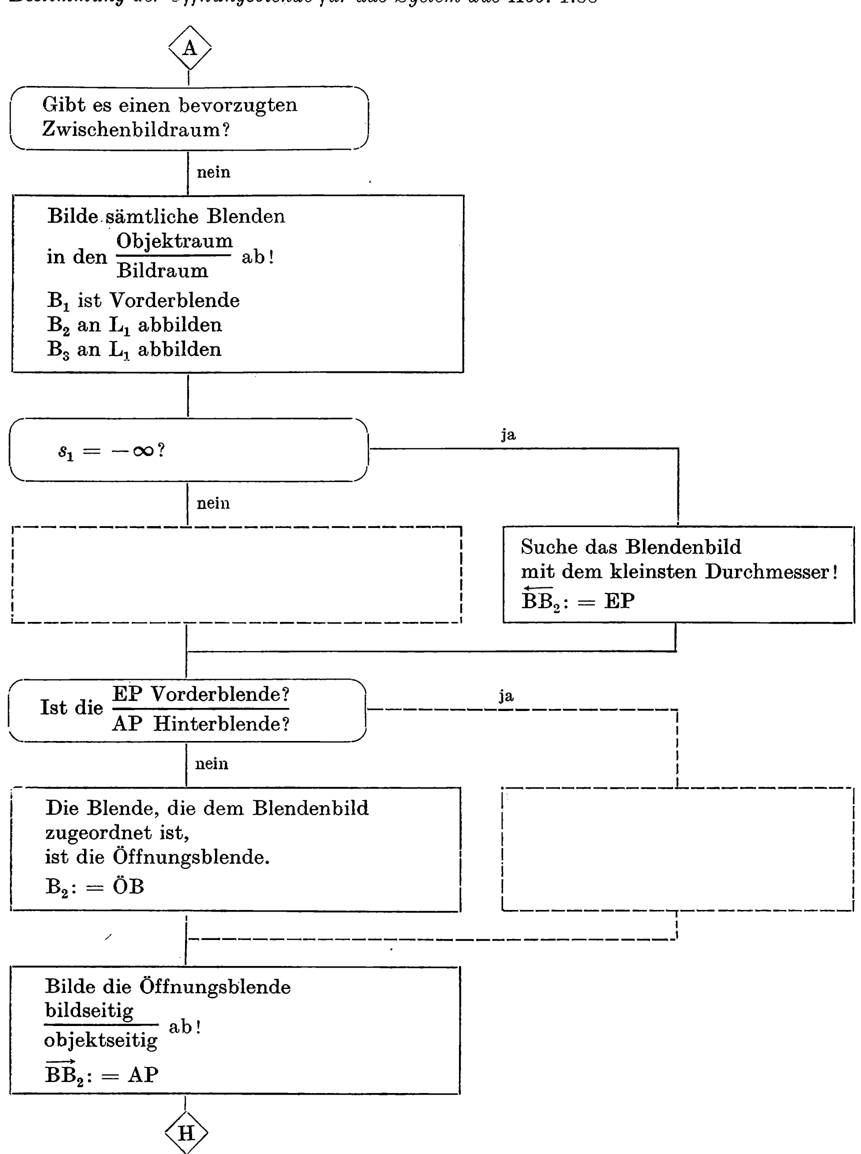


Tabelle 4.25
Bestimmung der Öffnungsblende für das System aus Abb. 4.88



erzeugt wird, also das erste Zwischenbild, ist das Objekt für das zweite abbildende Funktionselement usw. Jeder Teilabbildung sind ein Objekt- und ein Bildraum zugeordnet. Sämtliche Objekt- und Bildräume überdecken sich vollständig.

In einer optischen Abbildung aus n Einzelabbildungen sind die Bildräume $1 \cdots (n-1)$ Zwischenbildräume.

Die Begrenzung der Öffnung kann in jedem Zwischenbildraum untersucht werden. Sämtliche Blenden sind in den ausgewählten Zwischenbildraum abzubilden. In diesem ist die Definition der Austrittspupille anzuwenden, womit die Austrittspupille für den Systemteil gefunden wird, der als Ganzes das ausgewählte Zwischenbild erzeugt.

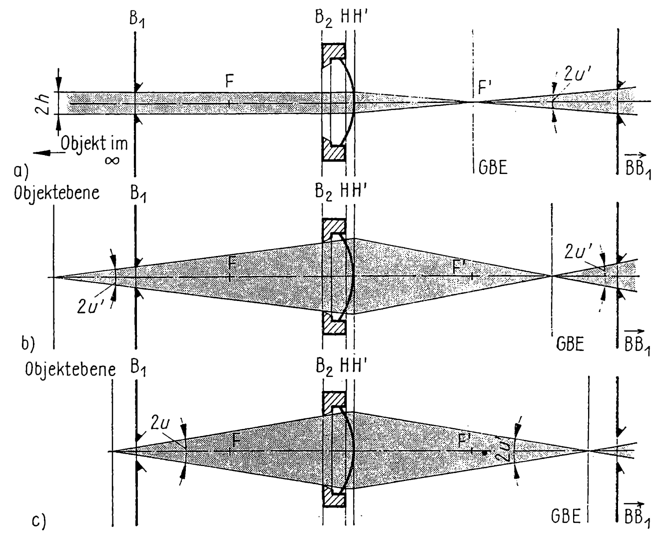


Abb. 4.87
Abhängigkeit der Öffnungsblende von der Objektweite

Der Aufwand zur Abbildung der Blenden ist am geringsten, wenn der Zwischenbildraum ausgewählt wird, in dem die meisten Blenden stehen. Diese sind ja dann direkt wie zwischenbildseitige Blendenbilder zu behandeln.

In diesem Sinne formulieren wir:

> Ein bevorzugter Zwischenbildraum enthält mehr Blenden als die übrigen Bildräume des optischen Systems.

Blenden und Blendenbilder. Die Teilabbildung k ist mit dem Index k gekennzeichnet. Die Blenden tragen den Index ν. So bedeutet $B_k B_\nu$: Bild der Blende ν im Zwischenbildraum der Teilabbildung k.

Grundsätzlich führt der in der Tab. 4.23 dargestellte Zweig über die Blendenbilder im Objekt- oder Bildraum stets zum Ziel. Der Aufwand kann jedoch größer sein als über die Blendenbilder in einem Zwischenbildraum.

Abbildung 4.88 zeigt ein optisches System aus zwei Linsen. In der Abb. 4.88c wurde der geringe Unterschied zwischen B_1 und dem davon durch die Linse 1 erzeugten Bild vernachlässigt. Dasselbe gilt für B_3 und das durch die Linse 2 davon erzeugte Bild. In den Tabellen 4.24 und 4.25 sind jeweils nur die Felder des Flußbildes ausgefüllt, die bei dem ausgewählten Weg benötigt werden.

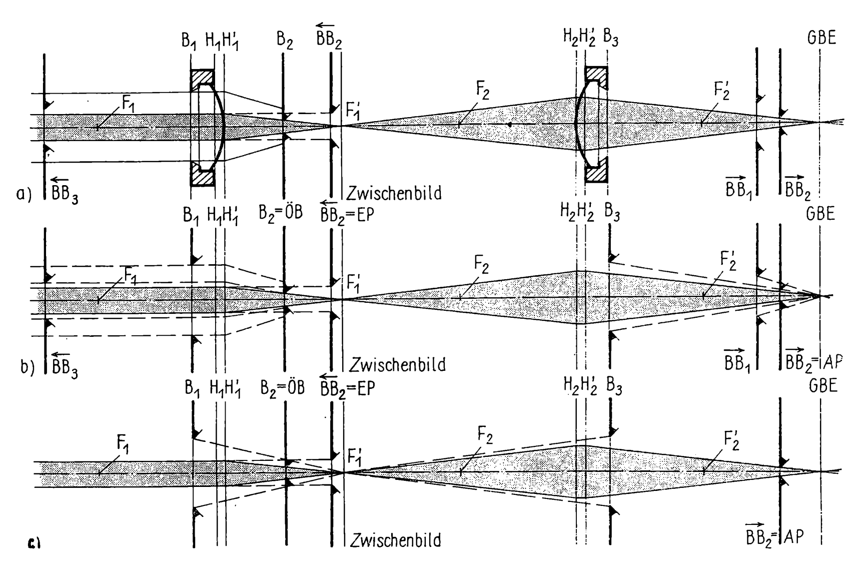


Abb. 4.88
Öffnungsbegrenzung bei zwei Linsen, Bestimmung der Öffnungsblende

4.2.2. Scharfe Feldbegrenzung

Die Öffnungsblende begrenzt das Strahlenbündel, das von einem Achsenpunkt ausgeht. Für Strahlenbündel, die in außerhalb der optischen Achse liegenden Objektpunkten konvergieren, haben wir die Blendenwirkung noch zu untersuchen.

Die Lichtbündel, die außeraxiale Punkte ausstrahlen, werden nicht nur von der Öffnungsblende begrenzt, sondern auch noch durch andere Blenden des optischen Systems.

Einmal kann die Öffnung des Bündels, das von einem außeraxialen Punkt ausgeht, zusätzlich eingeschränkt werden, zum anderen wird der Ausschnitt der Objektebene begrenzt, dessen Objektpunkte abgebildet werden.

Es wird also im allgemeinen durch Blenden, die keine Öffnungsblenden sind, die Leuchtdichte- bzw. Beleuchtungsstärkeverteilung im Bild zusätzlich beeinflußt und der abgebildete Teil der Objektebene, das Objektfeld, festgelegt. Die mit der Feldbegrenzung verbundenen Begriffe und Definitionen erläutern wir an ausgesuchten Beispielen. Abbildung 4.89 enthält eine Linse und eine in der Objektebene ange-

brachte Blende B_1. Der Rand der Blende B_1 erscheint vom Mittelpunkt der Eintrittspupille aus unter einem kleineren Winkel als die Linsenfassung B_3.

Die freie Fläche der Blende B_1 stellt den Teil der Objektebene dar, der abgebildet wird. Die Blende B_1 begrenzt also den Durchmesser $2y$ des Objektfeldes und damit auch den Durchmesser $2y'$ des Bildfeldes.

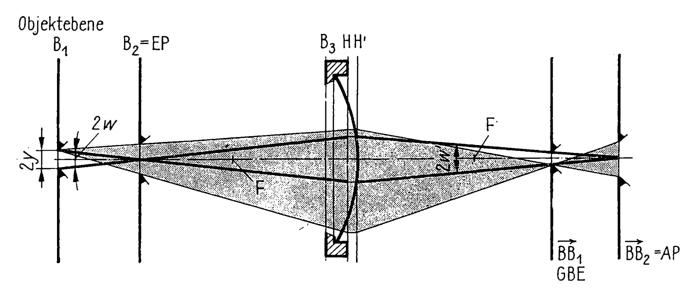


Abb. 4.89
Feldblende in der Objektebene

Die Begrenzung des Feldes kann auch durch die Angabe des Winkels $2w$, unter dem das Objektfeld vom Achsenpunkt der Eintrittspupille aus erscheint oder des Winkels $2w'$, unter dem das Bildfeld vom Achsenpunkt der Austrittspupille aus erscheint, ausgedrückt werden. Es gelten folgende Definitionen:

> Der $\dfrac{\text{objektseitige Feldwinkel } 2w\text{, kurz Objektwinkel}}{\text{bildseitige Feldwinkel } 2w'\text{, kurz Bildwinkel}}$ genannt,
>
> ist der Winkel, unter dem das $\dfrac{\text{Objektfeld}}{\text{Bildfeld}}$ vom Achsenpunkt
>
> der $\dfrac{\text{Eintrittspupille}}{\text{Austrittspupille}}$ aus erscheint.
>
> Der Durchmesser eines im Endlichen liegenden Objektfeldes $2y$ ist die Feldzahl. (Die Feldzahl wird im allgemeinen in Millimeter gemessen.)
>
> Die Blende, die bei einer im Endlichen liegenden Eintrittspupille den Objektwinkel $2w$,
>
> bei einer im Unendlichen liegenden Eintrittspupille die Feldzahl festlegt, ist die Feldblende FB.

In die Abb. 4.89 ist auch das bildseitige Bild der Feldblende $\overrightarrow{BB_1}$ eingetragen. Die Kenntnis dieses Blendenbildes erlaubt die Beurteilung der Feldbegrenzung im Bildraum. Die Feldblende und ihr Bild sind für die Feldbegrenzung gleichwertig.

> Das bildseitige Bild der Feldblende FB ist die Austrittsluke AL.

Abbildung 4.90 unterscheidet sich von der Abb. 4.89 nur dadurch, daß die feld-

begrenzende Blende in der Bildebene liegt. An den Verhältnissen ändert sich dadurch nichts. Das objektseitige Bild der Feldblende $\overleftarrow{BB}_3$ gestattet die Beurteilung der Feldbegrenzung im Objektraum.

Das objektseitige Bild der Feldblende FB ist die Eintrittsluke EL.

In der Abb. 4.89 ist die Feldblende wegen ihrer Lage im Objektraum zugleich Eintrittsluke, in der Abb. 4.90 ist sie wegen ihrer Lage im Bildraum zugleich Austrittsluke.

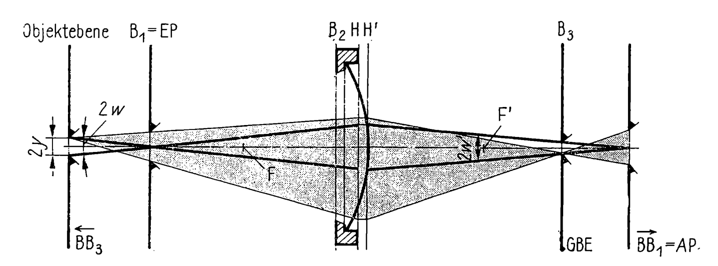


Abb. 4.90
Feldblende in der Bildebene

In der Abb. 4.91 steht die Öffnungsblende in der bildseitigen Brennebene der Linse, so daß sich die Eintrittspupille im Unendlichen befindet. In diesem Falle kann objektseitig nur die Feldzahl, nicht der Objektwinkel angegeben werden.

Abbildung 4.92 enthält den häufig auftretenden Fall des unendlich fernen Objektes, dessen Feldgröße objektseitig nur durch den Objektwinkel festgelegt ist.

Die Definitionen der Luken lassen sich auch folgendermaßen angeben:

Die $\frac{\text{Eintrittsluke EL}}{\text{Austrittsluke AL}}$ ist bei einer im Endlichen liegenden $\frac{\text{Eintrittspupille}}{\text{Austrittspupille}}$ das $\frac{\text{objektseitige}}{\text{bildseitige}}$ Blendenbild, das von deren Achsenpunkt aus unter dem kleinsten Winkel erscheint, bei einer im Unendlichen liegenden $\frac{\text{Eintrittspupille}}{\text{Austrittspupille}}$ das $\frac{\text{objektseitige}}{\text{bildseitige}}$ Blendenbild mit dem kleinsten Durchmesser. ($\frac{\text{Vorderblenden}}{\text{Hinterblenden}}$ sind wie $\frac{\text{objektseitige}}{\text{bildseitige}}$ Blendenbilder zu behandeln.)

In den bisherigen Beispielen ist das Bildfeld scharf begrenzt, d. h., an seinem Rand springt die Leuchtdichte von einem endlichen Wert auf Null, weil die Eintrittsluke mit der Objektebene zusammenfällt. Außerdem geht das gesamte von einem

Punkt des Objektfeldes, also auch von dessen Randpunkten, kommende und durch die Eintrittspupille ausgeblendete Bündel auch durch die Linse. Sämtliche Punkte des Objektfeldes werden mit Lichtbündeln, die die Eintrittspupille vollständig ausfüllen, abgebildet; es wird kein Teil der Bündel durch weitere Blenden abgeschnitten.

Das Objekt- und das Bildfeld sind scharf begrenzt, wenn die Feldblende in der Objektebene oder in einer zur Objektebene konjugierten Ebene steht.

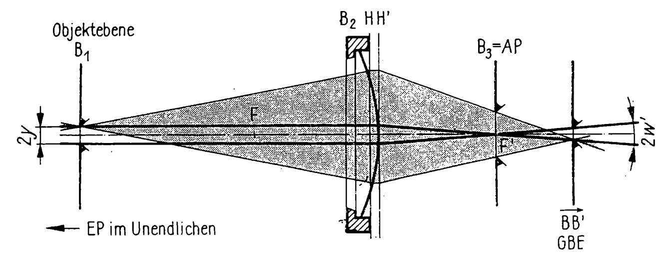


Abb. 4.91
Feldblende in der Objektebene, Eintrittspupille im Unendlichen

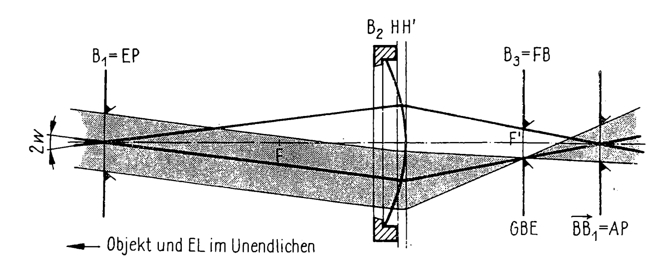


Abb. 4.92
Feldblende in der Brennebene, Objekt im Unendlichen

Der Strahl, der von einem Objektpunkt aus durch die Mitte der Eintrittspupille geht, spielt eine besondere Rolle als Bezugsstrahl. Er wird deshalb Hauptstrahl genannt.

In den bisher dargestellten Fällen sind die Hauptstrahlen Symmetriestrahlen der abbildenden Bündel. Der Begriff „Symmetriestrahl" wird hier in dem Sinne verwendet, daß dieser Strahl durch den Schwerpunkt der Fläche geht, die den Schnitt des Bündels mit einer achssenkrechten Ebene darstellt.

Die Hauptstrahlen zu den beiden in einer Ebene liegenden Randpunkten des Feldes schließen objektseitig den Objektwinkel $2w$, bildseitig den Bildwinkel $2w'$ ein.

Der Strahl, der von einem Objektpunkt aus objektseitig durch die Mitte der Eintrittspupille, bildseitig durch die Mitte der Austrittspupille geht, wird Hauptstrahl genannt. Bei scharfer Feldbegrenzung ohne Abschattung ist der Hauptstrahl Symmetriestrahl des abbildenden Bündels.

4.2.3. Randabschattung

Abschattung durch Abschattblenden. Das optische System in der Abb. 4.93a unterscheidet sich von demjenigen der Abb. 4.89a in der Größe der Feldblende, die zugleich Eintrittsluke ist. Durch das vergrößerte Objektfeld wird für einen Teil der Objektpunkte die Linsenfassung B_3 zusätzlich zur Öffnungsblende bündelbegrenzend wirksam. Der innere Bereich der Objektebene wird mit voller Eintrittspupille abgebildet (in der Abb. 4.93a durch die strichpunktierten Strecken begrenzt).

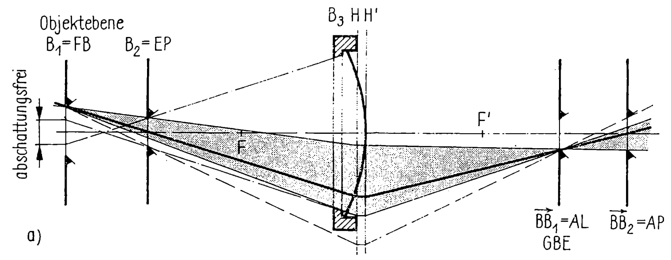


Abb. 4.93a)
Randabschattung durch die Linsenfassung

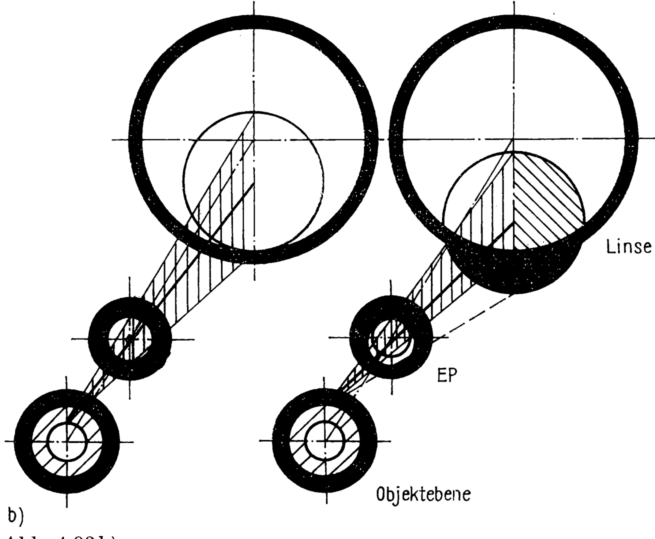


Abb. 4.93b)
Perspektivische Darstellung zu Abb. 4.93a

Die den Objektpunkten dieses Bereiches zugeordneten Hauptstrahlen sind Symmetriestrahlen der abbildenden Bündel. Die Punkte des ringförmigen äußeren Bereiches werden nicht mit der vollen Eintrittspupille abgebildet, weil die Linsenfassung B_3 einen Teil des einen Punkt abbildenden Bündels wegschneidet. Für einen Randpunkt des Objektfeldes in der Abb. 4.93a ist das der nichtgetönte und durch eine unterbrochene

Linie begrenzte Teil des Bündels. Die perspektivische Darstellung (Abb. 4.93b) läßt erkennen, daß das Bündel in der Eintrittspupille ein Kreiszweieck ausfüllt.

> Eine Blende, die weder Öffnungs- noch Feldblende ist und die trotzdem in das abbildende Bündel hineinragt, stellt eine Abschattblende AB dar. Sie erzeugt Randabschattung oder künstliche Vignettierung.
> Die Bilder von Abschattblenden werden Abschattluken ASL genannt.

Bei Randabschattung sinkt die Leuchtdichte in der ringförmigen Außenzone des Bildfeldes nach dem Rande zu stärker als ohne Randabschattung, aber stetig ab. Liegt die Eintrittsluke in der Objektebene wie in der Abb. 4.93a, dann bleibt eine scharfe Begrenzung des Bildfeldes erhalten. Die Leuchtdichte springt am Feldrand von einem endlichen Wert auf Null.

Die Randstrahlen eines abgeschatteten Bündels liegen nicht symmetrisch zum Hauptstrahl, sondern zu dem durch den Schwerpunkt des Kreiszweiecks gehenden Schwerstrahl.

Abschattung durch die Feldblende. In der Abb. 4.94a fallen Objektebene und Feldblende, die zugleich Eintrittsluke ist, nicht zusammen. Die perspektivische Darstellung (Abb. 4.94b) zeigt besonders, daß hier auch ohne Abschattblende, also bereits durch die Feldblende, Randabschattung auftritt. Im Unterschied zur Randabschattung durch Abschattblenden gliedern sich die Objekt- und die Bildebene in drei Bereiche.

Der innere Bereich wird mit voller Eintrittspupille abgebildet, die Hauptstrahlen sind Schwerstrahlen. Für den Rand dieses Bereiches ist in der Abb. 4.94a das abbildende Bündel unterbrochen begrenzt.

Im Bild des ringförmigen mittleren Bereiches sinkt die Leuchtdichte stärker ab als ohne Abschattung. Die Hauptstrahlen sind in den abbildenden Bündeln enthalten, aber nicht mehr mit den Schwerstrahlen identisch. Für den äußeren Rand dieses Bereiches ist in der Abb. 4.94c das abbildende Bündel eingetragen. Es füllt in meridionaler Richtung nur noch die halbe Eintrittspupille aus. Der innere und der mittlere Bereich stellen das Objektfeld dar, denn nur sie werden vom Objektwinkel $2w$ erfaßt.

Im Bild der äußeren Ringzone sinkt die Leuchtdichte stetig auf Null ab. Für keinen Punkt dieser Zone existiert der Hauptstrahl. Die Grenze des äußeren Bereichs ist in der Abb. 4.94a strichpunktiert gezeichnet.

> Liegt die Feldblende nicht in der Objektebene oder in einer zur Objektebene konjugierten Ebene, dann sind Objekt- und Bildfeld nicht scharf begrenzt.
>
> Das $\dfrac{\text{Objektfeld}}{\text{Bildfeld}}$ ist definitionsgemäß durch den $\dfrac{\text{Objektwinkel } 2w}{\text{Bildwinkel } 2w'}$
>
> festgelegt und zeigt Randabschattung durch die Feldblende. Außerhalb des Objektfeldes besteht eine Ringzone, deren Punkte noch abgebildet werden, für die aber im Bildfeld die Leuchtdichte nach dem Rande zu stetig auf Null zurückgeht.

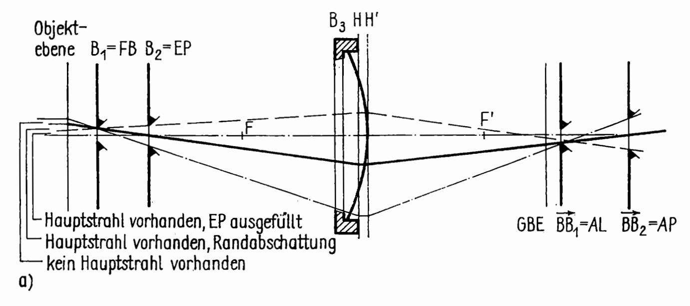


Abb. 4.94 a)
Randabschattung durch die Feldblende

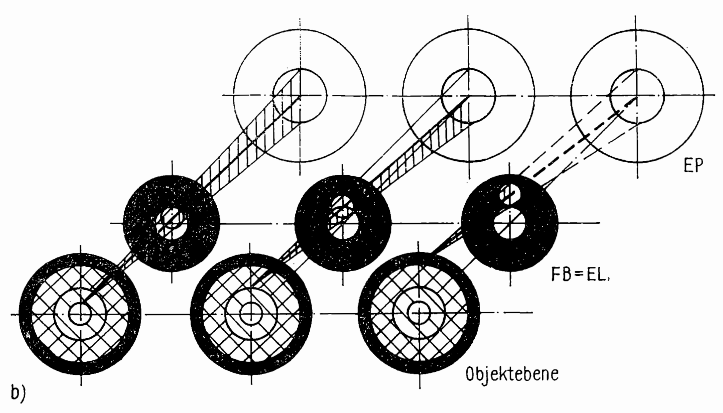


Abb. 4.94 b)
Perspektivische Darstellung zu Abb. 4.94 a

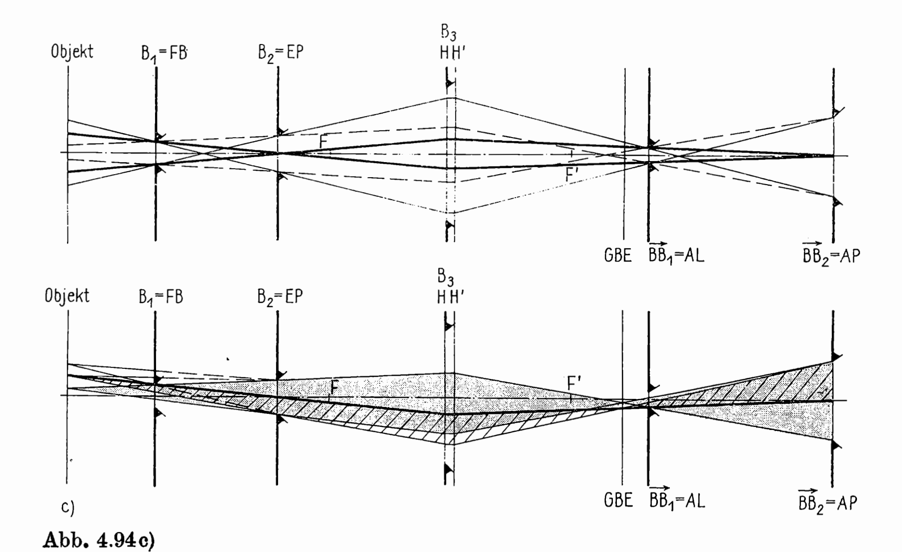
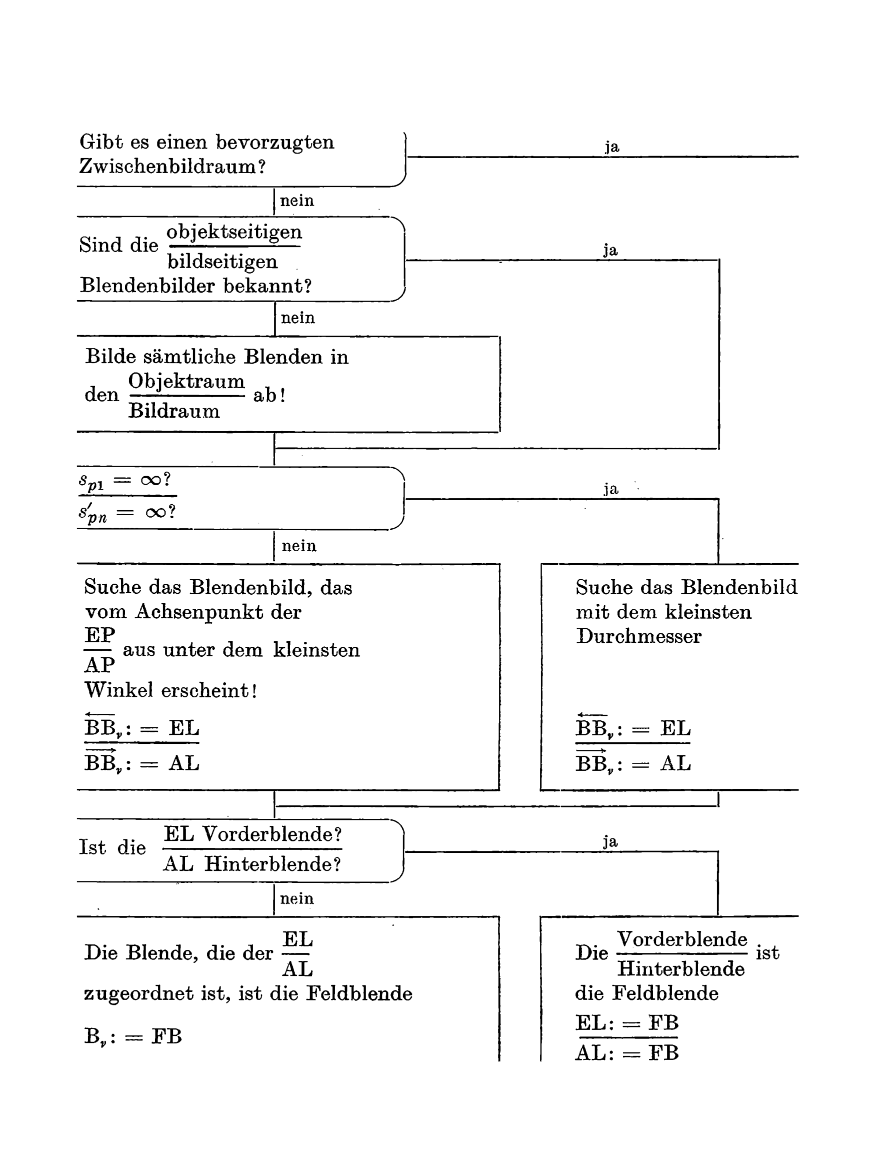
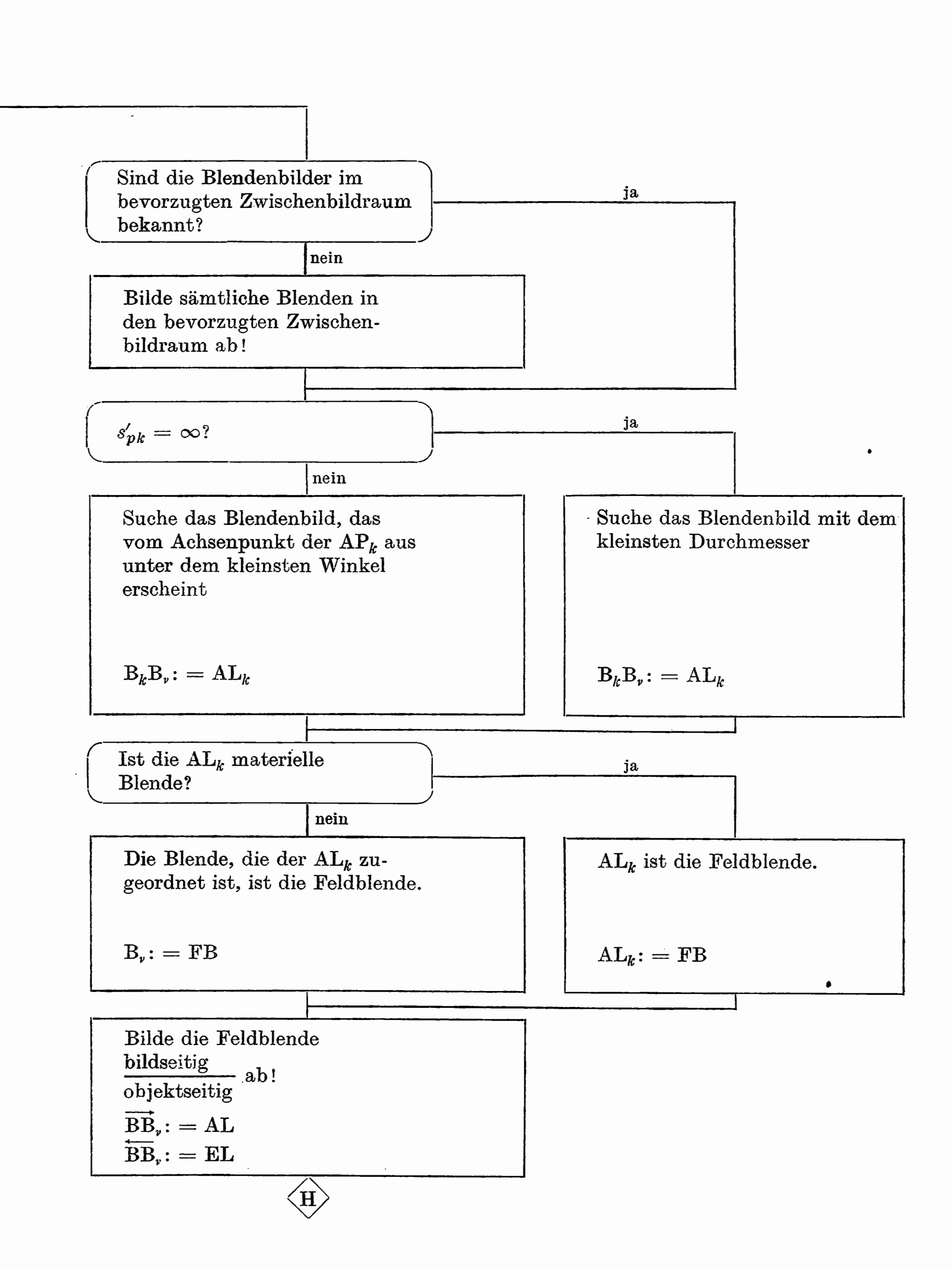


Abb. 4.94 c)



Gibt es einen bevorzugten Zwischenbildraum?
ja
nein
Sind die objektseitigen / bildseitigen Blendenbilder bekannt?
ja
nein
Bilde sämtliche Blenden in den Objektraum / Bildraum ab!
$s_{p1} = \infty$?
$s'_{pn} = \infty$?
ja
nein
Suche das Blendenbild, das vom Achsenpunkt der EP / AP aus unter dem kleinsten Winkel erscheint!
$\overleftarrow{BB}_\nu := EL$
$\overrightarrow{BB}_\nu := AL$
Suche das Blendenbild mit dem kleinsten Durchmesser
$\overleftarrow{BB}_\nu := EL$
$\overrightarrow{BB}_\nu := AL$
Ist die EL Vorderblende? / AL Hinterblende?
ja
nein
Die Blende, die der EL / AL zugeordnet ist, ist die Feldblende
$B_\nu := FB$
Die Vorderblende / Hinterblende ist die Feldblende
EL: = FB
AL: = FB

Tabelle 4.26
Schema zur Bestimmung der Feldblende



Abschattblenden, die in den Abbildungen 4.94a···c vermieden sind, würden eine weitere Randabschattung bewirken.

Bestimmung der Feldblende. Das Flußbild zum Algorithmus „Bestimmung der Feldbegrenzung“ ist in der Tab. 4.26 enthalten. Sollten die Eintrittspupille, die Austrittspupille oder die Öffnungsblende nicht bekannt sein, dann muß erst das „Unterprogramm“ Bestimmung der Öffnungsblende (Tab. 4.26) abgearbeitet werden. In das Schnittbild des optischen Systems sollten noch der Hauptstrahl und die Randstrahlen eingezeichnet werden. Auf diese Weise ist auch die evtl. vorliegende Randabschattung zu erkennen.

Abbildung 4.95 zeigt dasselbe optische System aus zwei Linsen wie die Abb. 4.88. Es ist eine Blende hinzugefügt worden. Die Tab. 4.27 enthält den Weg, der zur Bestimmung der Feldbegrenzung zweckmäßig ist.

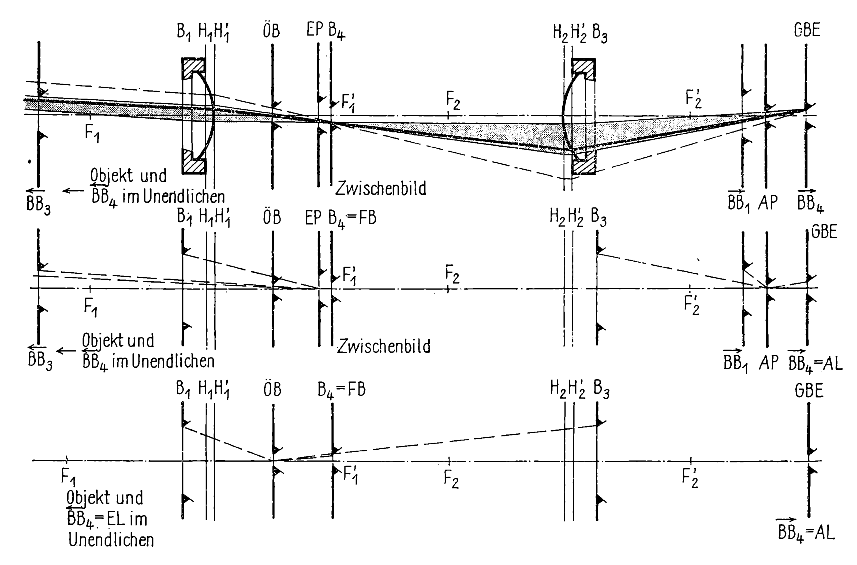


Abb. 4.95
Bestimmung der Feldblende im zweilinsigen optischen System

Vergleich mit den Festlegungen im Standard. Die im Abschnitt 4.2. verwendeten Definitionen weichen von denen ab, die in der TGL 20249 für die Begrenzung des Feldes vorgegeben werden. Wir nennen in Tab. 4.28 stichpunktartig die Unterschiede.

Der wesentliche Unterschied zwischen den Festlegungen in der TGL 20249 und den im Abschnitt 4.2. verwendeten besteht also in der Definition der Feldblende. Wir sind jedoch der Meinung, die Definition sollte so ausgelegt sein, daß in jedem optischen System eine Feldblende enthalten ist. Die Feldbegrenzung ist immer vorhanden, es ist deshalb unbefriedigend, wenn diese nicht durch eine Feldblende, sondern durch eine Abschattblende bewirkt werden soll. Außerdem unterscheiden

Tabelle 4.27

Bestimmung der Feldblende für das System aus Abb. 4.95

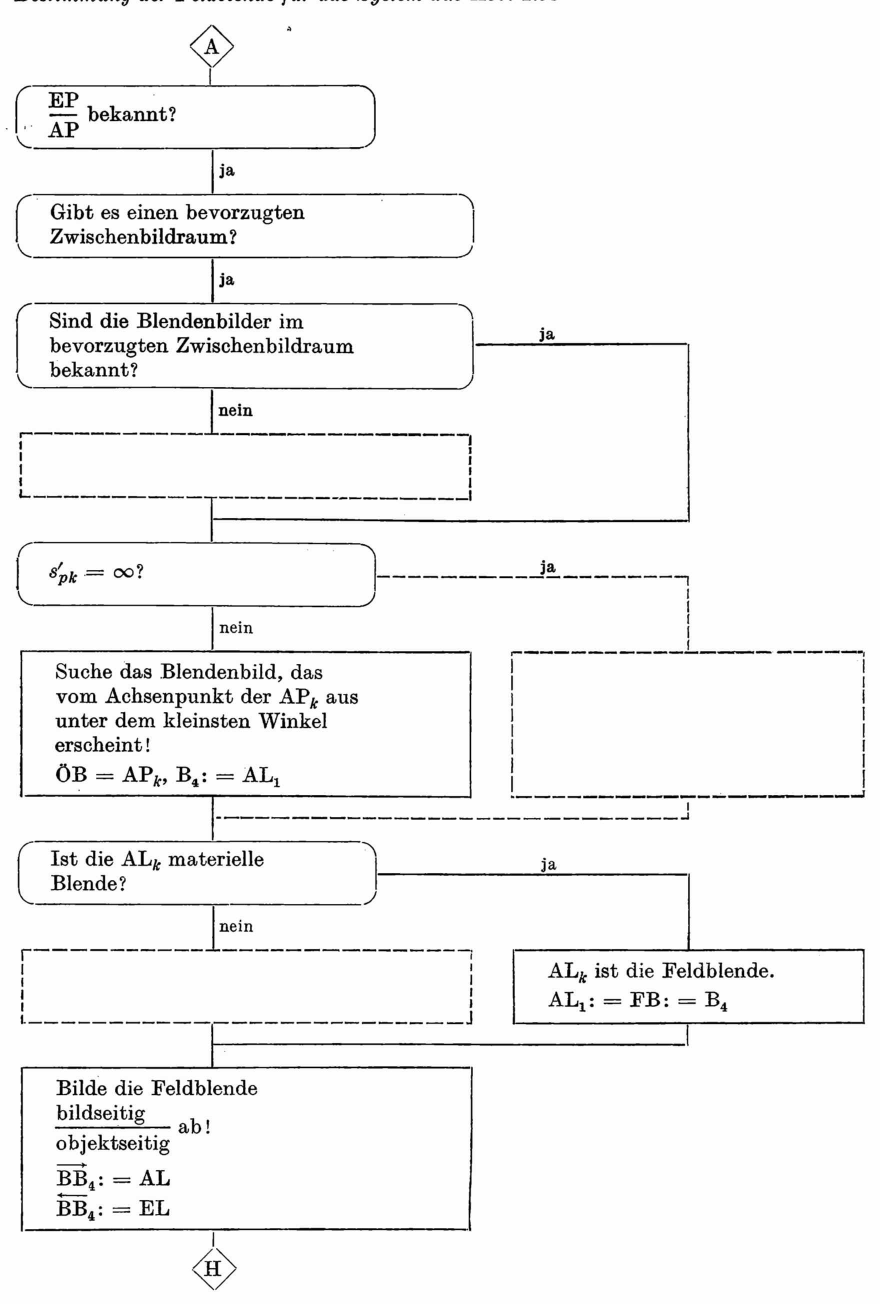


Tabelle 4.28
Unterschiede zwischen TGL 20249 *und Abschnitt 4.2.*

TGL 20249	Abschnitt 4.2.
Als Feldblende wird eine Blende nur dann bezeichnet, wenn sie scharfe Feldbegrenzung hervorruft. Die Feldblende muß demnach in der Objektebene oder in einer dazu konjugierten Ebene stehen.	Als Feldblende wird jede Blende bezeichnet, die das abgebildete Objektfeld begrenzt, auch wenn sie zugleich abschattend wirkt. Die Feldblende kann beliebige Lage haben.
Eine Feldblende, die in der $\dfrac{\text{Objektebene}}{\text{Bildebene}}$ steht, wird als $\dfrac{\text{Objektfeldblende}}{\text{Bildfeldblende}}$ bezeichnet.	Die Begriffe „Objektfeldblende“ und „Bildfeldblende“ werden nicht verwendet.
Die Bilder der Feldblende werden als Sichtfelder bezeichnet.	Die Bilder der Feldblende werden als Luken bezeichnet.
Das Bild der Feldblende im $\dfrac{\text{Objektraum}}{\text{Bildraum}}$ wird als $\dfrac{\text{Eintrittsfeld (Objektfeld)}}{\text{Austrittsfeld (Bildfeld)}}$ bezeichnet.	Das Bild der Feldblende im $\dfrac{\text{Objektraum}}{\text{Bildraum}}$ wird als $\dfrac{\text{Eintrittsluke}}{\text{Austrittsluke}}$ bezeichnet. Das $\dfrac{\text{Objektfeld}}{\text{Bildfeld}}$ ist der vom $\dfrac{\text{Objektwinkel}}{\text{Bildwinkel}}$ festgelegte Teil der $\dfrac{\text{Objektebene}}{\text{Bildebene}}$.
Die Feldzahl wird auch für Bild- und Zwischenbildfelder definiert.	Die Feldzahl wird nur für Objektfelder definiert.
Objekt- und Bildwinkel werden nur bei unendlich fernem Objekt- bzw. Bildfeld definiert.	Objekt- und Bildwinkel werden unabhängig von Objekt- und Bildlage angegeben.
Zu den Abschattblenden wird auch die feldbegrenzende Blende gezählt, wenn diese zugleich Randabschattung hervorruft.	Abschattblenden sind alle Blenden, die Randabschattung hervorrufen, außer der Öffnungs- und der Feldblende.
Luken sind nur die paraxialen Bilder der Abschattblenden.	Bilder der Feldblende werden auch als Luken bezeichnet. Die Bilder der Abschattblenden werden Abschattluken genannt.

sich die Randabschattungen durch eine Abschattblende (keine Abschattung über den Hauptstrahl hinaus) und durch die Feldblende (Abschattung bis über den Hauptstrahl hinaus).

Nach der Definition der TGL 20249 hat z. B. das holländische Fernrohr keine Feldblende, eine Darstellungsweise, die wir für unbefriedigend halten.

4.2.4. Begrenzung des Zerstreuungskreises

Sehwinkel und Perspektive. Wir beschreiben die Verhältnisse beim Betrachten von Gegenständen, die in der Tiefe gestaffelt sind, oder von räumlichen Strukturen. Wir nehmen an, daß mit einem ruhenden Auge beobachtet wird. Von den einzelnen Objektpunkten gehen Strahlenbündel aus. Der von einem Objektpunkt aus durch die Mitte der Eintrittspupille des Auges verlaufende Lichtstrahl, also der Hauptstrahl für direkte Beobachtung, wird als Sehstrahl bezeichnet.

> Der Winkel w_s zwischen den äußeren Sehstrahlen eines Gegenstandes oder eines seiner Strukturelemente ist der Sehwinkel.

Die Größe des Netzhautbildes ist im wesentlichen vom Sehwinkel des zugeordneten Gegenstandes abhängig. Es gilt also:

> Gegenstände, die unter dem gleichen Sehwinkel gesehen werden, erscheinen dem Auge gleich groß.

Der Sehwinkel w_s ist ein Maß für die scheinbare Größe eines Gegenstandes. Es ist jedoch rechnerisch günstiger, mit dem Tangens des Sehwinkels zu arbeiten. Da die Sehwinkel meistens klein sind, ist praktisch kein Unterschied zwischen dem Sehwinkel und seinem Tangens zu bemerken. Wir definieren deshalb:

> Die scheinbare Größe eines Gegenstandes oder eines Strukturelementes ist der Tangens seines Sehwinkels, also der Ausdruck $\tan w_s$.

Messen wir die Sehweite p_s von der Eintrittspupille des Auges aus, dann gilt nach Abb. 4.96

$$\tan w_s = -\frac{y}{p_s}. \qquad (4.195)$$

Bei der Betrachtung räumlicher Strukturen haben wir einen perspektivischen Eindruck. Dieser hängt von den Größenverhältnissen hintereinander liegender Strukturelemente ab. Wir können den Objekten eine Perspektive zuordnen, die folgendermaßen zu definieren ist:

> Die Perspektive eines Gegenstandes bzw. einer Struktur, ist seine beim einäugigen Sehen vorhandene räumliche Erscheinungsform, die durch die Verhältnisse der scheinbaren Größen hintereinander liegender Strukturelemente bestimmt wird.

Die Perspektive einer Struktur hängt also vom Verhältnis der Sehwinkel ab, deren

Scheitel im Schnittpunkt sämtlicher Sehstrahlen liegen. Dieser hat demnach für die Beurteilung der Perspektive eine besondere Bedeutung.

Der Schnittpunkt der Sehstrahlen ist das Perspektivitätszentrum.

Beim direkten Sehen mit einem ruhenden Auge ist die Mitte der Augenpupille das Perspektivitätszentrum. Beim Blicken mit bewegtem Auge tritt der Augen-

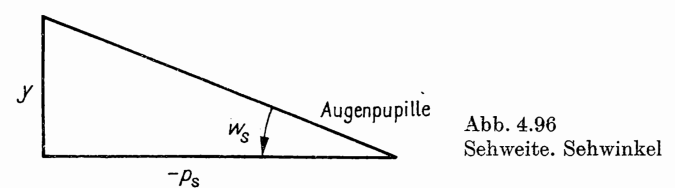


Abb. 4.96
Sehweite. Sehwinkel

drehpunkt an die Stelle der Eintrittspupille. Optische Systeme können durch Abbilden das Perspektivitätszentrum verlagern. Es gibt hinsichtlich der Lage des Perspektivitätszentrums relativ zu Auge und Gegenstand drei Möglichkeiten.

— Bei der entozentrischen Perspektive liegt das Perspektivitätszentrum in Lichtrichtung gesehen hinter dem Gegenstand. Die dem Auge abgewandten Strecken des Gegenstandes erscheinen bei gleicher Länge unter kleineren Sehwinkeln als die näheren (Abb. 4.97). Die entozentrische Perspektive tritt beim direkten Sehen und beim Fernrohr auf (Abb. 4.98).

— Bei der telezentrischen Perspektive liegt das Perspektivitätszentrum im Unendlichen. Sämtliche Strecken erscheinen gleich lang. Die telezentrische Perspektive kommt beim Mikroskop mit objektseitig telezentrischem Strahlengang vor (Abb. 4.99 und 4.100).

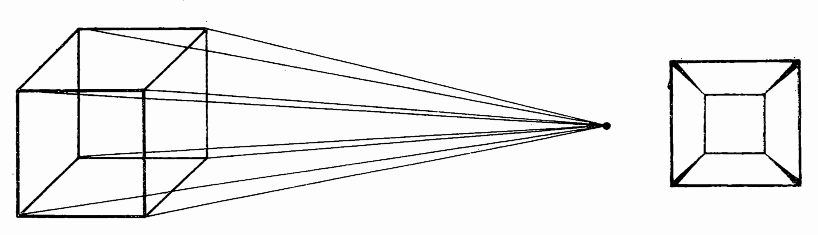


Abb. 4.97
Entozentrische Perspektive

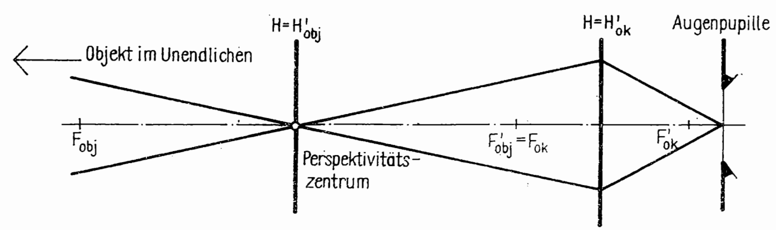


Abb. 4.98
Entozentrische Perspektive beim Fernrohr

— Bei der hyperzentrischen Perspektive liegt das Perspektivitätszentrum in Lichtrichtung gesehen vor dem Gegenstand. Der perspektivische Eindruck ist ungewohnt, weil die weiter entfernten Strecken unter größeren Sehwinkeln erscheinen als die näheren (Abb. 4.101). Hyperzentrische Perspektive kann bei der Beobachtung mit der Lupe auftreten (Abb. 4.102).

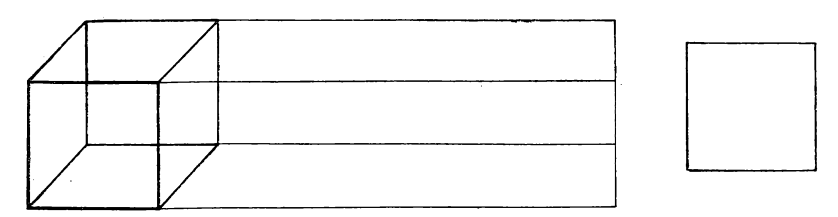


Abb. 4.99
Telezentrische Perspektive

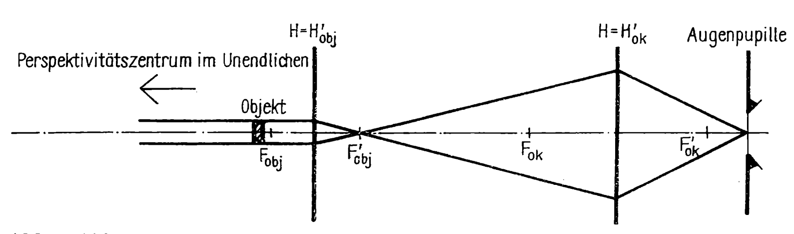


Abb. 4.100
Telezentrische Perspektive beim Mikroskop

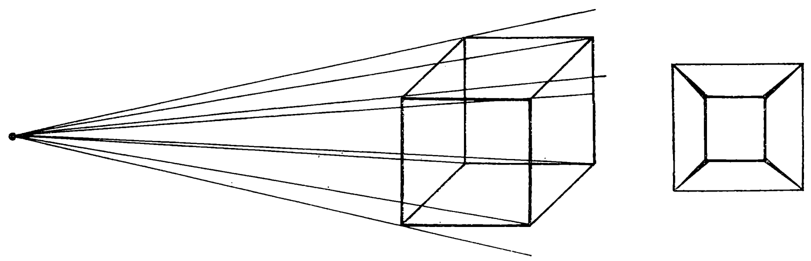


Abb. 4.101
Hyperzentrische Perspektive

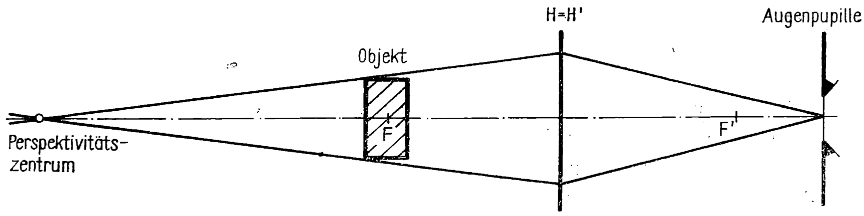


Abb. 4.102
Hyperzentrische Perspektive bei der Lupe

Bildauffang und perspektivische Darstellung. Zentrierte optische Systeme bilden paraxial ein achssenkrechtes Flächenelement in ein achssenkrechtes Flächenelement ab. Das Bild kann virtuell sein, so daß es nicht auf einer Fläche auffangbar ist. Ein reelles Bild entsteht zunächst als Struktur aus Strahlschnittpunkten im Raum und wird dann als Luftbild bezeichnet. Sowohl ein virtuelles Bild wie auch ein Luftbild ist direkt mit dem Auge beobachtbar. Als Auffangfläche dient dann die gewölbte Netzhaut. Diese Fälle kommen in den subjektiven optischen Instrumenten vor, zu denen das Mikroskop und das Fernrohr gehören. Bei objektiven optischen Instrumenten, wie z. B. bei Foto- und Projektionsobjektiven, wird das reelle Bild auf einer Fläche aufgefangen. Die Form der Auffangfläche hängt vom jeweiligen optischen System und von der Aufgabenstellung ab. Bei bestimmten Astrokameras ist die Auffangfläche, in die der Film gebracht werden muß, eine Kugelfläche. Bei manchen Röntgenschirmbildkameras werden torische Auffangflächen verwendet.

In vielen Fällen wird das Bild auf einer ebenen Fläche aufgefangen. Bei der fotografischen Bildaufnahme ist dadurch eine einfache und genaue Filmführung möglich.

> Eine ebene Auffangfläche bezeichnen wir als Filmebene oder Mattscheibenebene. Die ihr paraxial zugeordnete Objektebene ist die Einstellebene.

Da wir die Verhältnisse im paraxialen Gebiet bzw. bei einer kollinearen Abbildung betrachten, gilt, daß Strukturen, die in der Einstellebene liegen, punktförmig in die Auffangebene abgebildet werden. Von Strukturen, die sich vor oder hinter der Einstellebene befinden, entsteht beim Fehlen von Randabschattung in der Einstellebene und in der Auffangebene eine Struktur aus Zerstreuungskreisen, deren Durchmesser von der Größe der Eintrittspupille des Systems abhängt.

In der Abb. 4.103 ist diese Tatsache für einen Punkt A vor der Einstellebene veranschaulicht. Das vom Punkt A ausgesendete Strahlenbündel, dessen Öffnungswinkel durch die Eintrittspupille festgelegt wird, durchsetzt die Einstellebene EE in einer Zerstreuungsfigur. Diese ist beim Fehlen von Randabschattung kreisförmig, sonst ein Kreiszweieck oder -mehreck. Die Größe der Zerstreuungsfigur hängt vom Durchmesser der Eintrittspupille wesentlich ab. Bildseitig erzeugt das Strahlenbündel in der Filmebene FE eine Zerstreuungsfigur, die der objektseitigen konjugiert ist. Allgemein gilt:

> Die Gesamtheit der von sämtlichen Punkten des Objektraumes ausgehenden Strahlenbündel ergibt in der Einstellebene die objektseitige Projektionsfigur. Diese ist die Summe der Projektionen der Eintrittspupille von den Raumpunkten aus. Die objektseitige Projektionsfigur wird in die ihr paraxial zugeordnete bildseitige abgebildet. Diese liegt in der Filmebene.

Eine Zerstreuungsfigur in der Filmebene wird nicht aufgelöst, wenn sie eine bestimmte, dem speziellen Empfänger zugeordnete Größe nicht überschreitet. Sie erscheint dann dem Empfänger als Punkt. Am deutlichsten erkennen wir diesen Umstand am Beispiel der Netzhaut. Die Struktur der Netzhaut läßt die Auflösung zweier Punkte, die einen kleineren Winkelabstand als eine Minute haben, nicht zu. Folglich sehen wir einen Zerstreuungskreis, dessen Ränder weniger als eine Minute

Winkelabstand haben, als Punkt. In 250 mm Entfernung entspricht einer Minute ein Durchmesser von 0,07 mm. In ähnlicher Weise haben auch die fotografischen Schichten und die lichtelektrischen Empfänger ein begrenztes Auflösungsvermögen.

Die Anordnung aus Zerstreuungsfiguren, die in der Filmebene von außerhalb der Einstellebene liegenden Strukturen entsteht, erscheint demnach als System von Bildpunkten, wenn die einzelnen Zerstreuungsfiguren nicht aufgelöst werden.

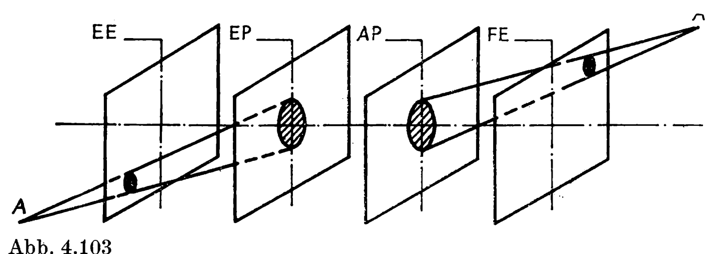


Abb. 4.103
Zur Schärfen- und Abbildungstiefe

Daraus folgt:

> Durch die Begrenzung der Öffnung, durch die auch die Größe der Zerstreuungsfiguren begrenzt ist, und durch das endliche Auflösungsvermögen der Empfänger ist es möglich, nicht nur von der Einstellebene, sondern auch von gewissen Raumbereichen vor und hinter ihr eine perspektivische Darstellung in der Filmebene zu erhalten.
> Die Öffnungsblende hat eine Tiefenwirkung für die Abbildung.

Die perspektivische Darstellung läßt sich folgendermaßen definieren:

> Die perspektivische Darstellung ist die Überlagerung der nichtaufgelösten Zerstreuungsfiguren, die in der Filmebene von Punkten eines vor und hinter der Einstellebene liegenden Bereiches des Objektraumes erzeugt werden. Die perspektivische Darstellung stellt die in die Ebene projizierten Verhältnisse der scheinbaren Größen von hintereinander liegenden Strukturelementen dar.

(Der gesamte Bildeindruck wird in gewissem Umfang auch von aufgelösten Zerstreuungsfiguren beeinflußt.)

Abbildungs- und Schärfentiefe. Im Bildraum wird der Bereich, dessen Projektionsfigur in der Filmebene scharf erscheint, durch den Feldkegel und zwei achssenkrechte Ebenen begrenzt.

Abbildung 4.104 enthält die Größen, die bei der folgenden Rechnung auftreten werden. Die Entfernung b'_l und b'_r der beiden Ebenen von der Filmebene werden durch den maximal zulässigen Zerstreuungskreisdurchmesser $2\varrho'$ bestimmt. b'_l bezeichnen wir als linke, b'_r als rechte Abbildungstiefe. Die Summe $b' = b'_r + (-b'_l)$ ist die gesamte Abbildungstiefe. Die Abstände b_l und b_r der objektseitig zugeordneten

Ebenen von der Einstellebene sind die linke bzw. rechte Schärfentiefe. Die Bezeichnungen „links“ und „rechts“ bilden wir im Objektraum. Damit gilt:

> Die Abbildungstiefe ist der achsparallele Abstand der beiden Ebenen im Bildraum, deren Punkte mit dem maximal zulässigen Zerstreuungskreisdurchmesser in die Filmebene projiziert werden. Die Schärfentiefe ist der zur Abbildungstiefe konjugierte Bereich des Objektraumes.

Wir berechnen die Schärfentiefenbereiche anhand der Abb. 4.104. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{\varrho_p}{\varrho} = \frac{-b_l - p}{-b_l}, \quad \frac{\varrho_p}{\varrho} = \frac{-p - b_r}{b_r}. \tag{4.196a, b}$$

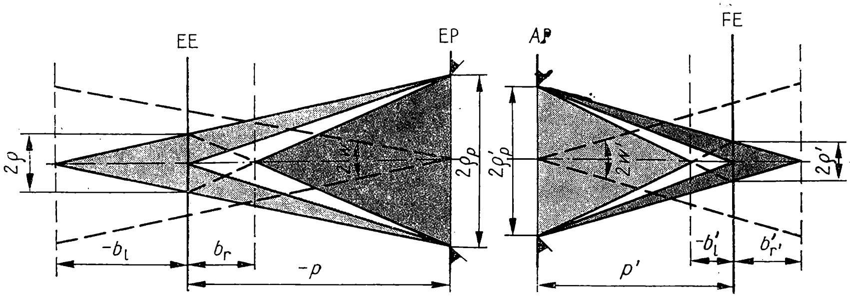


Abb. 4.104
Zur Berechnung der Schärfentiefe

Auflösen nach b_l bzw. b_r ergibt

$$b_l = \frac{p}{\dfrac{\varrho_p}{\varrho} - 1}, \quad b_r = -\frac{p}{\dfrac{\varrho_p}{\varrho} + 1}. \tag{4.197a, b}$$

Statt ϱ_p führen wir Blendenzahl k durch

$$\varrho_p = \frac{f'}{2k}$$

und statt ϱ den bildseitigen Zerstreuungskreisradius

$$\varrho' = |\beta'|\, \varrho$$

ein. Wir erhalten

$$b_l = \frac{p}{\dfrac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} - 1}, \quad b_r = -\frac{p}{\dfrac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} + 1}. \tag{4.198a, b}$$

Wir können auch die numerische Apertur

$$A = \frac{\varrho_p}{|p|}$$

verwenden, womit

$$b_l = \frac{p}{\frac{|p|\, A\, |\beta'|}{\varrho'} - 1}, \quad b_r = -\frac{p}{\frac{|p|\, A\, |\beta'|}{\varrho'} + 1} \tag{4.199a, b}$$

entsteht. Für

$$\left|\frac{pA\beta'}{\varrho'}\right| \gg 1$$

ist

$$b_l = \frac{\varrho'}{A\, |\beta'|}\, \operatorname{sgn}(p), \quad b_r = -\frac{\varrho'}{A\, |\beta'|}\, \operatorname{sgn}(p). \tag{4.200a, b}$$

Die Gl. (4.197), (4.199) und (4.200) spiegeln den Einfluß der Eintrittspupillengröße auf die Schärfentiefenbereiche wider. Es kommt darin der anschauliche Sachverhalt zum Ausdruck, daß die Schärfentiefe mit kleiner werdendem Durchmesser der Eintrittspupille anwächst. Die Diskussion der Gleichung führen wir an dieser Stelle nicht im einzelnen durch, weil dies besser bei der Behandlung der einzelnen optischen Instrumente erfolgt.

Die Abb. 4.105a, b demonstrieren die Abhängigkeit der Schärfentiefe von der Blendenzahl bei einer fotografischen Aufnahme.

Perspektivischer Eindruck. Wir legen ein optisches System zugrunde, durch das die Einstellebene in die Filmebene abgebildet wird. Nach den bisher erläuterten Verhältnissen bei der Abbildung von räumlichen Strukturen entsteht in der Filmebene eine perspektivische Darstellung. Die Eintrittspupille des optischen Systems vertritt beim Bildauffang die Augenpupille und stellt das Perspektivitätszentrum dar.

Die perspektivische Darstellung kann direkt oder durch eine Lupe vergrößert auf einer Mattscheibe betrachtet werden (z. B. bei Plattenkameras oder im Sucher einer Spiegelreflexkamera).

Auch bei der Fixierung auf einer fotografischen Schicht wird eine Nachvergrößerung häufig angewendet.

> Der Betrachter projiziert subjektiv die perspektivische Darstellung aufgrund seiner Erfahrung in den Raum und hat einen perspektivischen Eindruck.

Ein natürlicher perspektivischer Eindruck kann nur dann entstehen, wenn das Perspektivitätszentrum des optischen Systems mit dem Perspektivitätszentrum identisch ist, das der Beobachter beim direkten Betrachten des Objekts wählen würde.

Außerdem müssen sämtliche Sehwinkel w_s beim direkten Sehen des Objekts und beim Betrachten der perspektivischen Darstellung w'_s gleich sein.

Der perspektivische Eindruck hängt demnach vom Wert des Quotienten $\gamma'_s = \tan w'_s / \tan w_s$ ab. Es gilt:

$$\gamma'_s \begin{cases} > 1: & \text{tiefenverkürzter perspektivischer Eindruck,} \\ = 1: & \text{tiefenrichtiger (natürlicher) perspektivischer Eindruck,} \\ < 1: & \text{tiefenverlängerter perspektivischer Eindruck.} \end{cases}$$

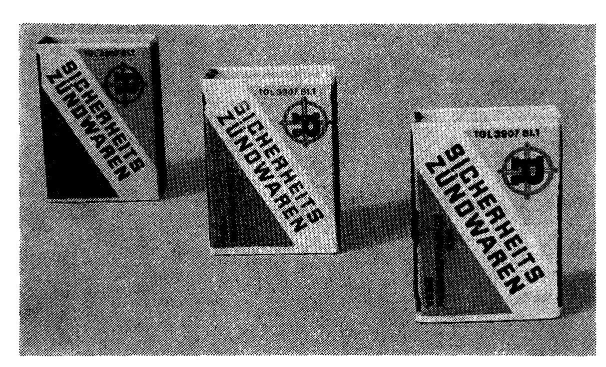


Abb. 4.105a)

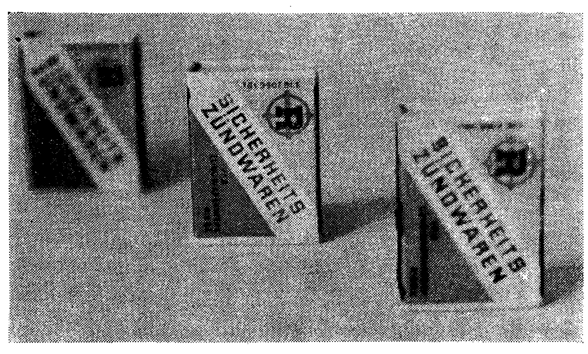


Abb. 4.105b)

Abb. 4.105
Abhängigkeit der Schärfentiefe von der Blendenzahl
a) große, b) kleine Blendenzahl

Zur Berechnung von γ'_s setzen wir voraus, daß die Perspektivitätszentren bei der Aufnahme der Darstellung und beim direkten Sehen keine Höhen- und Seitenverschiebung haben. Eine ungleiche Entfernung vom Objekt lassen wir zu. Die ursprüngliche Darstellung sei um den Faktor v nachvergrößert. Bei direkter Betrachtung des Objektes ist (Abb. 4.106):

$$\tan w_s = -\frac{y}{p_s}. \tag{4.201}$$

Das auf vy' nachvergrößerte Bild wird aus der Sehweite p'_s betrachtet. Analog zu Abb. 4.96 ist

$$\tan w'_s = -\frac{vy'}{p'_s}. \tag{4.202}$$

Division von Gl. (4.202) durch Gl. (4.201) ergibt

$$\frac{\tan w'_s}{\tan w_s} = \frac{y' p_s v}{y p'_s}. \tag{4.203}$$

Weiter gilt (Abb. 4.106)

$$-p_s = -a + a_p + \Delta p \tag{4.204}$$

und nach Gl. (4.56)

$$a = f'\left(\frac{1}{\beta'} - 1\right), \quad a_p = f'\left(\frac{1}{\beta'_p} - 1\right).$$

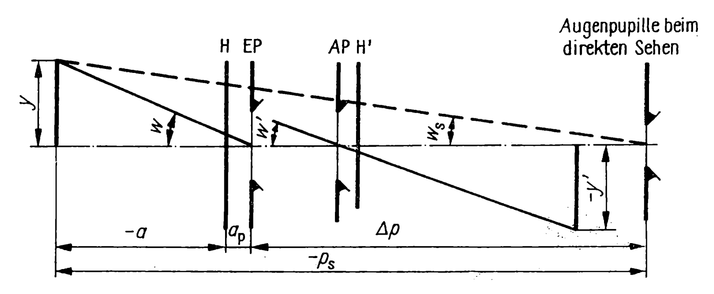


Abb. 4.106
Zur Berechnung des Sehwinkelverhältnisses

Einsetzen in Gl. (4.204) führt auf

$$p_s = f'\left(\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\beta'_p}\right) - \Delta p.$$

Wir verwenden $\beta' = y'/y$ und erhalten aus Gl. (4.203)

$$\gamma'_s = \frac{\tan w'_s}{\tan w_s} = \frac{vf'\left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}\right) - v\beta' \Delta p}{p'_s}. \tag{4.205}$$

Bei $\Delta p = 0$ (zusammenfallende Perspektivitätszentren) beträgt also die Betrachtungsentfernung mit natürlichem perspektivischem Eindruck wegen $\gamma'_s = 1$

$$p'_s = vf'\left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}\right). \tag{4.206}$$

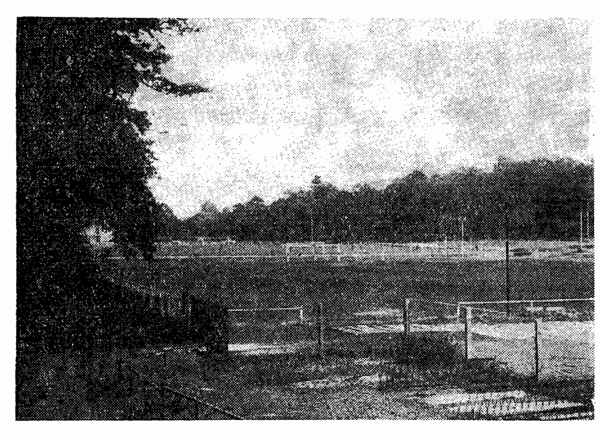


Abb. 4.107 a)

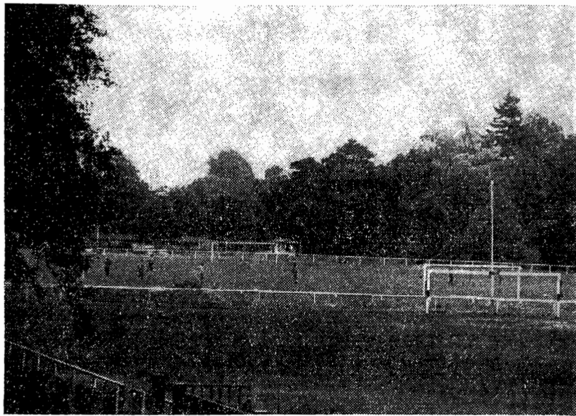


Abb. 4.107 b)

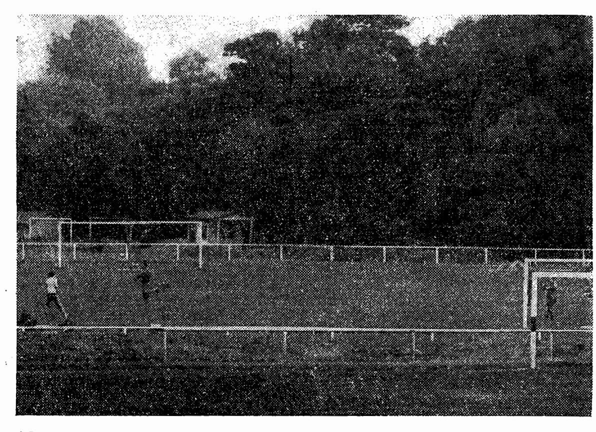


Abb. 4.108 c)

Abb. 4.107
Sehwinkel beim Betrachten der nachvergrößerten Aufnahme (Brennweite von oben nach unten wachsend): Tiefen verlängert (a), richtig (b) bzw. verkürzt (c)

Die Gleichungen (4.205) und 4.206) sind besonders bei der fotografischen Aufnahme anzuwenden. Hier soll nur ein einfaches Beispiel angegeben werden.

Beispiel. Eine Fernaufnahme ($a = -\infty$) auf Kleinbildformat (24 mm × 36 mm) mit einem Objektiv der Brennweite $f' = 50$ mm soll so nachvergrößert werden, daß sie aus $p'_s = -375$ mm Sehweite einen natürlichen perspektivischen Eindruck vermittelt.

Lösung. Bei $a = -\infty$ wird $\beta' = 0$ und nach Gl. (4.206)

$$v = \frac{p'_s}{f'} = -\frac{375}{50} = -7{,}5.$$

Das Bildformat muß 18 cm × 24 cm betragen.

Die Abb. 4.107a···c sollen die drei Arten von perspektivischen Eindrücken vermitteln. Sie sind auf 24 mm × 36 mm aufgenommen und so nachvergrößert, daß sie aus der Sehweite $p'_s = -400$ mm betrachtet werden müssen.

Telezentrischer Strahlenverlauf. Bei der kollinearen Abbildung ohne Randabschattung ist das abbildende Bündel symmetrisch zum Hauptstrahl. In der Gaußschen Bildebene wird der Bildpunkt durch den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls repräsentiert. In jeder anderen achssenkrechten Auffangebene ergibt sich statt des Bildpunktes ein Zerstreuungskreis, dessen Mittelpunkt der Durchstoßpunkt des Hauptstrahls ist (Abb. 4.108). Die paraxiale Bildgröße $\bar{y}'_{b'}$ in einer um b' aus der

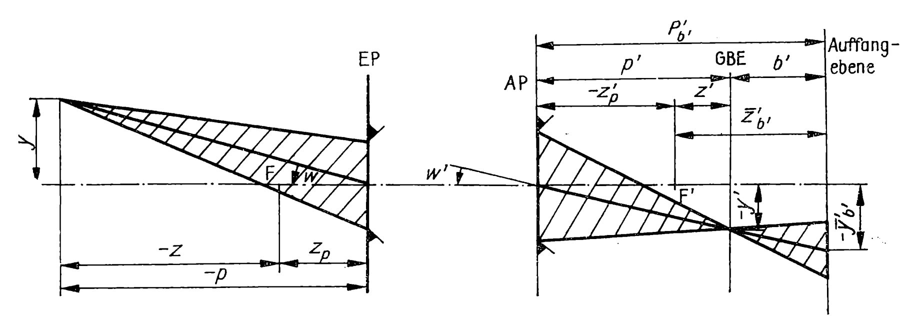


Abb. 4.108
Zur Berechnung des Abbildungsmaßstabs für eine Auffangebene

Gaußschen Bildebene verschobenen Auffangebene ist also durch den Abstand des Hauptstrahl-Durchstoßpunktes von der optischen Achse gegeben. (Durch den Querstrich wird darauf hingewiesen, daß $\bar{y}'_{b'}$ nicht zu y konjugiert ist.)

Wir definieren den Abbildungsmaßstab für die Auffangebene durch

$$\bar{\beta}'_{b'} = \frac{\bar{y}'_{b'}}{y}. \tag{4.207}$$

In einem optischen System ohne Randabschattung ist die paraxiale Bildgröße in einer Auffangebene nur von der Durchstoßhöhe des Hauptstrahls abhängig. In Auffangebenen, die parallel zur Gaußschen Bildebene liegen, entstehen Zerstreuungskreise um die Durchstoßpunkte der Hauptstrahlen. Werden die Zerstreuungskreise vom Empfänger nicht aufgelöst, dann erscheint das Bild in der Auffangebene punktförmig, und der Abbildungsmaßstab $\overline{\beta}'_{b'}$ ist unabhängig von Verschiebungen der Auffangebene, wenn die Durchstoßhöhen der Hauptstrahlen erhalten bleiben.

Wir leiten den Zusammenhang zwischen dem Abbildungsmaßstab $\overline{\beta}'_{b'}$ und der Entfernung z_p der Eintrittspupille vom objektseitigen Brennpunkt des optischen Systems ab.

Nach Abb. 4.108 ist

$$y = -p \tan w, \quad \overline{y}'_{b'} = -\overline{p}'_{b'} \tan w', \tag{4.208a, b}$$

also

$$\overline{\beta}'_{b'} = \frac{\overline{p}'_{b'}}{p} \frac{\tan w'}{\tan w}. \tag{4.209}$$

Nach Tab. 4.6 gilt für das Winkelverhältnis der Pupillenabbildung

$$\gamma'_p = \frac{\tan w'}{\tan w} = \frac{z_p}{f'} = \frac{f}{z'_p} \tag{4.210}$$

und nach Abb. 4.108

$$p = z - z_p. \tag{4.211}$$

Mit Gl. (4.210) und Gl. (4.211) geht Gl. (4.209) über in

$$\overline{\beta}'_{b'} = \frac{\overline{p}'_{b'}}{f'} \cdot \frac{1}{\frac{z}{z_p} - 1}. \tag{4.212}$$

Wir verbinden die Auffangebene fest mit dem optischen System, so daß

$$\overline{p}'_{b'} = \text{const}$$

ist. Die Entfernung z des Objektes variieren wir, wobei auch p' variiert.

Für $p' = \overline{p}'_{b'}$ fällt die Auffangebene mit der Gaußschen Bildebene zusammen. Es gilt

$$\overline{\beta}'_{b'} = \beta' = \frac{p'}{f'} \cdot \frac{1}{\frac{z}{z_p} - 1}.$$

Bei einer Änderung des Abstandes zwischen Objekt und Eintrittspupille rückt das Bild aus der Gaußschen Bildebene heraus, und es gilt im allgemeinen

$$\overline{\beta}'_{b'} \neq \beta'.$$

ur für

$$z_\mathrm{p} = \infty$$

lt unabhängig von z

$$\bar{\beta}'_{b'} = -\frac{\bar{p}'_{b'}}{f'} \quad (z_\mathrm{p} = \infty). \tag{4.213}$$

ie Eintrittspupille liegt dann im Unendlichen. Die Hauptstrahlen verlaufen objekt- itig achsparallel, was als objektseitig telezentrischer Strahlenverlauf bezeichnet ird (Abb. 4.109). Analoge Verhältnisse liegen bei bildseitig telezentrischem Strahlen- ›rlauf vor (Abb. 4.110).

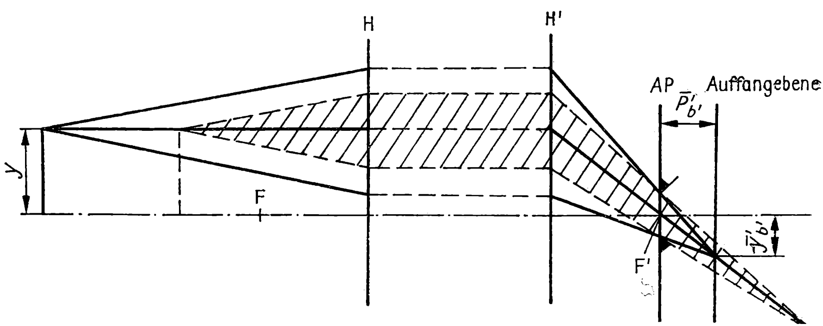


Abb. 4.109
Objektseitig telezentrischer Strahlenverlauf

$\frac{\text{Objektseitig}}{\text{Bildseitig}}$ telezentrischer Strahlenverlauf liegt vor, wenn bildseitig

die $\frac{\text{Eintrittspupille EP}}{\text{Austrittspupille AP}}$ im Unendlichen, also die

$\frac{\text{Austrittspupille in der bildseitigen}}{\text{Eintrittspupille in der objektseitigen}}$ Brennebene des optischen Systems liegt.

Der paraxiale Abbildungsmaßstab $\bar{\beta}'_{b'}$ $\frac{\text{in einer}}{\text{für eine}}$ fest mit dem optischen

System $\frac{\text{verbundenen Auffangebene}}{\text{verbundene Objektebene}}$ ist beim Fehlen von Randabschattung

unabhängig von der $\frac{\text{Objektweite}}{\text{Bildweite}}$. Das Bild besteht aus Zerstreuungs-

kreisen, in dessen Mittelpunkten die Durchstoßpunkte der Hauptstrahlen liegen.

Aus Gl. (4.209) erhalten wir mit Gl. (4.210) und

$$\overline{p}'_{b'} = \overline{z}'_{b'} - z'_{\mathrm{p}}$$

(Abb. 4.108) für den Abbildungsmaßstab $\overline{\beta}'_{b'}$

$$\overline{\beta}'_{b'} = \frac{f}{p}\left(\frac{\overline{z}'_{b'}}{z'_{\mathrm{p}}} - 1\right). \tag{4.214}$$

Mit $p = \mathrm{const}$ ergibt sich bei bildseitigem telezentrischem Strahlenverlauf

$$\overline{\beta}'_{b'} = -\frac{f}{p}, \quad z'_{\mathrm{p}} = \infty. \tag{4.215}$$

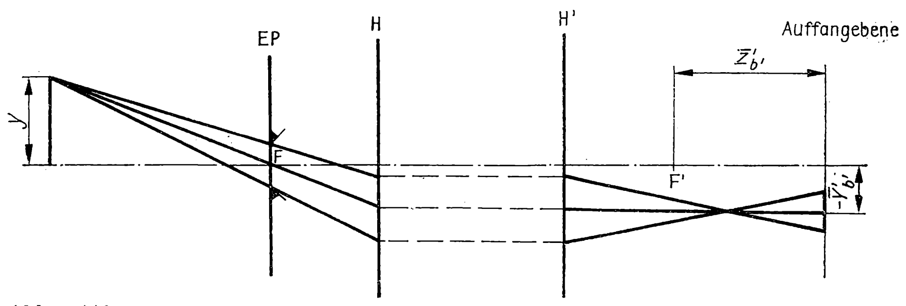


Abb. 4.110
Bildseitig telezentrischer Strahlenverlauf

Objektseitig telezentrischer Strahlenverlauf ist bei Meßmikroskopen wichtig, bei denen eine Teilung (Okularmikrometer) in der Auffangebene angebracht ist, die vor der Messung mit einer Teilung in der Objektebene (Objektmikrometer) kalibriert wird. Jede Abweichung der Lage des auszumessenden Objektes von der Ebene, für die kalibriert wurde, würde einen Meßfehler verursachen, wenn nicht objektseitig telezentrischer Strahlenverlauf eingehalten würde.

4.2.5. Begrenzung des Lichtstroms

Begrenzung des Lichtstroms für achsnahe Flächenelemente. Ein ideales zentriertes optisches System bildet einen Ausschnitt der achssenkrechten Einstellebene in einen Ausschnitt der Gaußschen Bildebene ab. Wir greifen zunächst ein symmetrisch zur optischen Achse liegendes Flächenelement heraus und untersuchen den Verlauf des Lichtstroms durch das optische System. (Die folgenden Ableitungen gelten bis auf die Einheiten und die Zahlenwertgleichungen sowohl für die lichttechnischen wie auch für die strahlungstechnischen Größen. Wir beschränken die Ausführungen auf die lichttechnischen Größen, weil dafür teilweise Besonderheiten in den Einheiten zu beachten sind.)

Das Flächenelement $\mathrm{d}q$ der Objektebene habe die Leuchtdichte L. Es sei ein

Lambert-Strahler mit der Lichtstärke $\mathrm{d}I = \mathrm{d}I_0 \cos\vartheta$ (Abb. 4.111). Nach Gl. (3.11) strahlt das Flächenelement in ein Raumwinkelelement den Lichtstrom

$$\mathrm{d}^2\Phi = \mathrm{d}I_0 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\Omega. \tag{4.216}$$

In Polarkoordinaten gilt

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega_0 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi.$$

Objektseitig begrenzt die Eintrittspupille den Öffnungswinkel $2u$ und damit den vom optischen System erfaßten Lichtstrom. Dieser ergibt sich aus Gl. (4.216) durch Integration über den Raumwinkel:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}I_0 \cdot \Omega_0 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{u} \sin\vartheta \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta. \tag{4.217}$$

Die Integration ergibt

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}I_0 \cdot \Omega_0 \pi \sin^2 u,$$

so daß wir mit $\mathrm{d}I_0 = L\,\mathrm{d}q$ für den vom Flächenelement $\mathrm{d}q$ ausgehenden und vom optischen System aufgenommenen Lichtstrom

$$\mathrm{d}\Phi = \pi\Omega_0 L \sin^2 u \cdot \mathrm{d}q \tag{4.218}$$

erhalten.

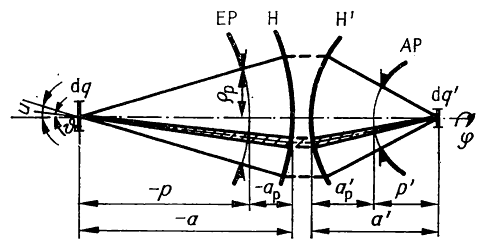


Abb. 4.111
Zur Berechnung des Lichtstroms durch ein optisches System

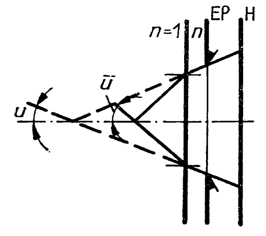


Abb. 4.112
Brechung des Lichtes vor Eintritt in das optische System

Grenzt an die Vorderfläche des optischen Systems ein Stoff mit von Luft verschiedener Brechzahl und achssenkrechter ebener Vorderfläche an, dann werden die vom Objekt ausgehenden Lichtstrahlen gebrochen (Abb. 4.112). Das optische System mit dem Öffnungswinkel $2u$ erfaßt den Lichtstrom, den das Objekt in den Winkel $2\bar{u}$ strahlt. Wegen des Brechungsgesetzes gilt

$$\sin\bar{u} = n \sin\breve{u}.$$

Die obere Grenze von ϑ im Integral (4.127) ist der Winkel $\bar{u}$, sonst bleibt die Rechnung dieselbe. Gl. (4.218) geht über in

$$\mathrm{d}\Phi = \pi\Omega_0 L n^2 \sin^2 u \cdot \mathrm{d}q \tag{4.219}$$

bzw. mit der numerischen Apertur

$$A = n \sin u$$

$$d\Phi = \pi\Omega_0 L A^2 \, dq. \quad [d\Phi] = \mathrm{lm} = \mathrm{sr} \cdot \mathrm{sb} \cdot \mathrm{cm}^2. \tag{4.220}$$

(Einigen Beziehungen fügen wir ein Einheitenbeispiel bei.) Der optische Fluß beträgt demnach

$$dG = \pi\Omega_0 A^2 \, dq. \tag{4.221}$$

Abgesehen von Verlusten im optischen System muß wegen des Energieerhaltungssatzes der Lichtstrom objekt- und bildseitig gleich sein

$$d\Phi = d\Phi'. \tag{4.222}$$

Wir wiederholen die Ableitung bis zur Gl. (4.219) mit den bildseitigen Größen und erhalten

$$d\Phi' = \pi\Omega_0 L' n'^2 \sin^2 u' \, dq'. \tag{4.223}$$

L' ist die Leuchtdichte, die im Luftbild vorhanden ist. Nach Gl. (4.222) gilt

$$L n^2 \sin^2 u \, dq = L' n'^2 \sin^2 u' \, dq'. \tag{4.224}$$

Die Leuchtdichten sind im Objekt und im Bild gleich, d. h., es ist

$$L = L', \tag{4.225}$$

wenn

$$n^2 \sin^2 u \, dq = n'^2 \sin^2 u' \, dq' \tag{4.226}$$

gilt. Bei quadratischen Flächenelementen können wir

$$dq = (dy)^2, \quad dq' = (dy')^2$$

setzen. Gleichung (4.226) geht über in

$$n \sin u \cdot dy = n' \sin u' dy'. \tag{4.227}$$

Für kleine Objekt- und Bildhöhen schreiben wir dafür

$$ny \sin u = n'y' \sin u'. \tag{4.228}$$

Das ist die Abbesche Sinusbedingung, die in einem optischen System erfüllt sein muß, wenn bei der punktförmigen Abbildung eines Achsenpunktes gleichzeitig ein achssenkrechtes Flächenelement in ein achssenkrechtes Flächenelement transformiert werden soll.

> In einem optischen System, bei dem die Sinusbedingung erfüllt ist, bleibt die Leuchtdichte in zueinander konjugierten achsnahen Flächenelementen konstant. (Von Verlusten, z. B. durch Absorption, Reflexion und Streuung, muß abgesehen werden.)

Bei $n = n'$ ist nach Gl. (4.228)

$$y \sin u = y' \sin u'.$$

Die Punkte, für die $y = y'$ ($\beta' = 1$) ist, also die Hauptpunkte, fallen wegen $u = u'$ mit den Knotenpunkten zusammen. Der bildseitige Verlauf sämtlicher von einem Achsenpunkt ausgehenden Lichtstrahlen wird richtig wiedergegeben, wenn sie an den Hauptkugeln geknickt werden (Abb. 4.113). Zum Beweis bilden wir

$$\sin u = \frac{h}{a}, \quad \sin u' = \frac{h}{a'}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}.$$

Es ist also

$$a \sin u = a' \sin u'$$

und

$$y \sin u = y' \sin u'.$$

Die Pupillenflächen müssen gemäß der Ableitung des Lichtstroms ebenfalls als Kugelflächen angenommen werden (in der Abb. 4.111 bereits berücksichtigt).

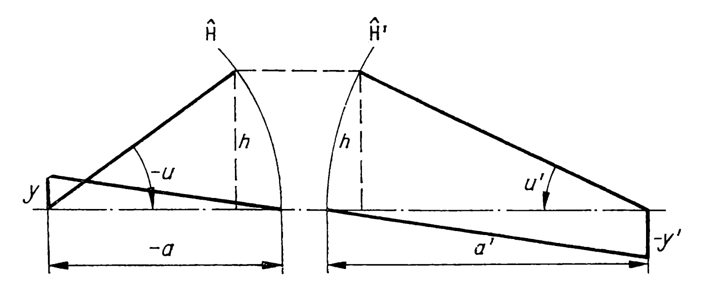


Abb. 4.113
Abbildung mit Hilfe der Hauptkugeln

Die Beleuchtungsstärke in der Gaußschen Bildebene folgt aus

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}q'}.$$

Wegen $\mathrm{d}\Phi' = \mathrm{d}\Phi$ und

$$\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}q'}{\beta'^2}$$

ergibt sich aus Gl. (4.220)

$$E = \frac{\pi \Omega_0 L A^2}{\beta'^2}, \quad [E] = \text{phot} = \text{sb} \cdot \text{sr}. \tag{4.229}$$

Wir nehmen für die weitere Rechnung die Gültigkeit der Sinusbedingung Gl. (4.228) für den Fall $n = 1$ an. Nach Abb. 4.111 ist

$$\sin u = \frac{\varrho_\mathrm{p}}{a - a_\mathrm{p}}. \tag{4.230a}$$

Nach Gl. (4.56) gilt

$$a = f'\left(\frac{1}{\beta'} - 1\right) \quad \text{und} \quad a_p = f'\left(\frac{1}{\beta'_p} - 1\right),$$

also

$$a - a_p = f'\left(\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\beta'_p}\right). \tag{4.230b}$$

Einsetzen von Gl. (4.230) in Gl. (4.229) ergibt

$$E = \pi \Omega_0 L \frac{\varrho_p^2}{f'^2 \beta'^2 \left(\frac{1}{\beta'} - \frac{1}{\beta'_p}\right)}. \tag{4.231}$$

Statt ϱ_p führen wir die Blendenzahl

$$k = \frac{f'}{2\varrho_p}$$

ein und erhalten

$$E = \pi \Omega_0 L \frac{1}{4k^2 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}\right)^2}, \quad [E] = \text{phot} = \text{sb} \cdot \text{sr}. \tag{4.232}$$

Soll E in Lux herauskommen, wenn L in Stilb eingesetzt wird, dann müssen wir Gl. (4.232) in eine Zahlenwertgleichung umwandeln.

Sie lautet

$$E/\text{lx} = \frac{10^4 \pi \Omega_0 L/\text{sb}}{4k^2 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}\right)^2}. \tag{4.233}$$

Unter Verwendung von $10^4\pi$ asb = 1 sb gilt

$$E/\text{lx} = \frac{\Omega_0 L/\text{asb}}{4k^2 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}\right)^2}. \tag{4.234}$$

Begrenzung des Lichtstroms für außeraxiale Flächenelemente. Das lichtaussendende Flächenelement der Objektebene dq_1 befinde sich außerhalb der optischen Achse des zentrierten optischen Systems. Wir berechnen den Lichtstrom, der durch das Flächenelement dq_2 der Eintrittspupille aufgenommen wird, durch dessen Mittelpunkt die optische Achse geht (Abb. 4.114). Im fotometrischen Entfernungsgesetz Gl. (3.25)

$$d^2\Phi = \frac{L}{r^2} \Omega_0 \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 \, dq_1 \, dq_2$$

ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = w \quad \text{und} \quad r = \frac{p}{\cos w}$$

zu setzen. Damit erhalten wir

$$\mathrm{d}^2\Phi = \frac{L}{p^2}\,\Omega_0 \cos^4 w \,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2. \tag{4.235}$$

Das kreisförmige Flächenelement $\mathrm{d}q_2$ der Eintrittspupille habe den Radius $\mathrm{d}\varrho_\mathrm{p}$ und erscheine vom Achsenpunkt des Objektes aus unter dem Winkel $\mathrm{d}u$. Sein Flächeninhalt ergibt sich zu

$$\mathrm{d}q_2 = \pi(\mathrm{d}\varrho_\mathrm{p})^2 = \pi p^2(\mathrm{d}u)^2. \tag{4.236}$$

Aus Gl. (4.235) folgt mit Gl. (4.236)

$$\mathrm{d}^2\Phi = \pi\Omega_0 L(\mathrm{d}u)^2\,\mathrm{d}q_1 \cos^4 w. \tag{4.237}$$

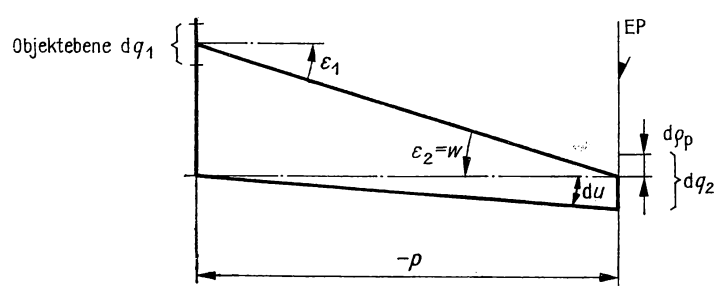


Abb. 4.114
Zur Berechnung des Lichtstroms von außeraxialen Flächenelementen

Im Bereich kleiner Öffnungswinkel, für die der Winkel durch den Sinus des Winkels ersetzbar ist, läßt sich für Gl. (4.237)

$$\mathrm{d}\Phi = \pi\Omega_0 L \sin^2 u \,\mathrm{d}q_1 \cos^4 w \tag{4.238}$$

schreiben. Mit $\mathrm{d}q_1 = \mathrm{d}q_1'/\beta'^2$ und $\mathrm{d}\Phi' = \mathrm{d}\Phi$ gilt für die Beleuchtungsstärke in der Gaußschen Bildebene

$$E = \frac{\pi\Omega_0 L \sin^2 u}{\beta'^2} \cos^4 w. \tag{4.239}$$

Wir setzen

$$E_0 = \frac{\pi\Omega_0 L \sin^2 u}{\beta'^2} \tag{4.240}$$

und schreiben Gl. (4.239) um in

$$E_\mathrm{w} = E_0 \cos^4 w. \tag{4.241}$$

Für E_0 können wir sämtliche dafür abgeleiteten Beziehungen einsetzen.

> Bei der Abbildung außeraxialer Flächenelemente der Objektebene, die als Lambert-Strahler betrachtet werden kann, nimmt die Beleuchtungsstärke in der Gaußschen Bildebene mit der vierten Potenz des Kosinus des halben Feldwinkels ab.

Der optische Fluß beträgt

$$\mathrm{d}G = \pi \Omega_0 \sin^2 u \cos^4 w \, \mathrm{d}q_1 . \tag{4.242}$$

Die Ableitung bringt deutlich zum Ausdruck, daß Gl. (4.241) strenggenommen nur eine Näherungsformel darstellt. Sie gilt insbesondere nur bei kleinen Öffnungswinkeln (Objekt im Endlichen) bzw. großen Blendenzahlen (Objekt im Unendlichen). Allgemein muß festgestellt werden, daß eine hohe Genauigkeit der Rechnung nicht angestrebt zu werden braucht. Einflüsse, die bei der Ableitung unberücksichtigt bleiben müssen (z. B. Randabschattung, Reflexions- und Absorptionsverluste, Einfluß von Abbildungsfeldern bei der Objekt- und Öffnungsblenden-Abbildung), bringen ohnehin quantitative Abweichungen von den qualitativ richtigen Ergebnissen mit sich.

4.3. Abbildungsfehler

4.3.1. Klassifikation der Abbildungsfehler

Wir beschäftigen uns nochmals mit der optischen Abbildung. Zunächst wiederholen wir die bisher behandelten Gesichtspunkte.

- Die ideale geometrisch-optische Abbildung ordnet jedem Punkt des Objektraumes umkehrbar eindeutig einen Bildpunkt zu und transformiert geometrische Figuren in ähnliche Figuren. Eine punktförmige Abbildung liegt vor, wenn homozentrische Bündel in homozentrische Bündel überführt werden. Die ideale geometrisch-optische Abbildung ist nur mit ebenen Oberflächenspiegeln weitgehend anzunähern.
- Die wichtigsten geometrisch-optisch abbildenden Funktionselemente, die zentrierten sphärischen Spiegel und Linsen, bilden im allgemeinen nicht punktförmig und ähnlich ab.
- Asphärische Spiegel und Linsen können so berechnet werden, daß sie einen Achsenpunkt mit weitgeöffneten Bündeln in einen Achsenpunkt abbilden. Allgemein läßt sich in einem optischen System durch asphärische Flächen die Annäherung an die ideale geometrisch-optische Abbildung verbessern. Asphärische Flächen werden jedoch aus ökonomischen und technologischen Gründen oft vermieden.
- In der Praxis genügt es, eine geometrisch-optische Abbildung anzustreben, bei der nur Punkte eines begrenzten Teils des Objektraumes in ausreichend kleine Zerstreuungsfiguren abzubilden sind.

— Im paraxialen Gebiet, d. h. mit flach und achsnahe verlaufenden Lichtstrahlen, bilden zentrierte optische Systeme mit monochromatischem Licht punktförmig und ähnlich ab.

Abbildungsfehler. Mit Strahlen, die außerhalb des paraxialen Gebietes verlaufen, also bei der Abbildung von ausgedehnten Objektfeldern mit weitgeöffneten Bündeln, ergeben sich im allgemeinen Abweichungen von der punktförmigen ähnlichen Abbildung. Bereits im paraxialen Gebiet, aber auch im außeraxialen Gebiet, entstehen bei brechenden Flächen Abweichungen von der idealen geometrisch-optischen Abbildung, wenn mit polychromatischem Licht gearbeitet wird.

Die Abweichungen von der idealen geometrisch-optischen Abbildung werden Abbildungsfehler oder Aberrationen genannt. Die Abbildungsfehler, die bei der Abbildung mit monochromatischem Licht auftreten, werden geometrische Fehler genannt. Die Abbildungsfehler, die durch die Dispersion der optischen Werkstoffe entstehen, werden Farbfehler oder chromatische Fehler genannt.

Strahlaberrationen. Die durch die Abbildungsfehler hervorgerufenen Abweichungen müssen quantitativ erfaßt werden. Im Rahmen der geometrischen Optik können dazu nur Größen dienen, die in Verbindung mit dem Verlauf der Lichtstrahlen stehen. Im allgemeinen verwendet man die Abweichungen der Strahlkoordinaten von den Koordinaten eines Bezugsstrahls und erhält so die Strahlaberrationen.

Wir unterscheiden zwei Gruppen von Strahlaberrationen, die Querabweichungen und die Längsabweichungen.

Die Querabweichungen sind die in einer achssenkrechten Ebene gemessenen Abweichungen der Strahl-Durchstoßkoordinaten $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ von den Koordinaten eines Bezugsstrahls x', y'. Bei der Anwendung von kartesischen Koordinaten legen wir die Meridionalebene in die y-z-Ebene. Wir erhalten dann (Abb. 4.115)

die sagittale Querabweichung $\quad \Delta x' = \hat{x}' - x'$

und die meridionale Querabweichung $\quad \Delta y' = \hat{y}' - y'$.

Als Auffangebene wird oftmals die Gaußsche Bildebene angenommen, als Bezugskoordinaten werden bevorzugt die Koordinaten des Gaußschen Bildpunktes verwendet.

Die Längsabweichungen von Strahlschnittpunkten werden entweder von einem auf dem Bezugsstrahl liegenden Bezugspunkt oder von einer achssenkrechten Bezugsebene — z. B. der Gaußschen Bildebene — aus gemessen (Abb. 4.116).

Für die Abbildung von Achsenpunkten ist die optische Achse der Bezugsstrahl. In diesem Falle wird die Schnittweitenabweichung angegeben. Diese lautet also

$$\Delta s' = \hat{s}' - s'.$$

Im allgemeinen wird für s' die paraxiale Schnittweite eingesetzt.

Die Abweichungen hängen von den Systemparametern und von den unabhängigen Strahlkoordinaten ab. Die grafischen Darstellungen der Abweichungen als Funktionen der unabhängigen Strahlkoordinaten werden als Korrektionsdarstellungen bezeichnet.

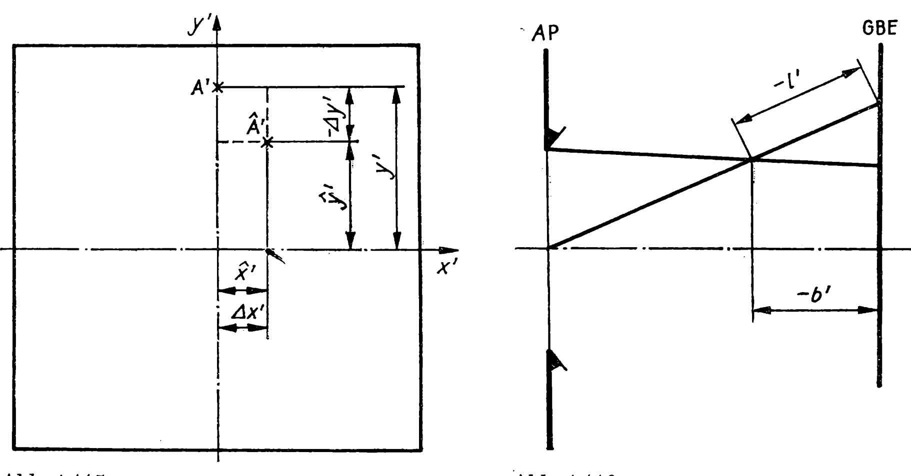


Abb. 4.115
Sagittale und meridionale Querabweichung

Abb. 4.116
Längsabweichungen im Meridionalschnitt

Öffnungsfehler oder sphärische Aberration. Bei der Abbildung von Punkten der optischen Achse mit weit geöffneten Bündeln hängt die bildseitige Schnittweite der Strahlen vom objektseitigen Schnittwinkel $\hat{\sigma}$ bzw. von der Einfallshöhe h ab (Abb. 4.117). Damit verbunden sind die sphärische Längsabweichung $\Delta s'$ und die sphärische Querabweichung $\Delta y'$. Das bildseitige Strahlenbündel liegt symmetrisch zur optischen Achse.

Für die Abbildung von Achsenpunkten ist der Öffnungsfehler der einzige geometrische Fehler.

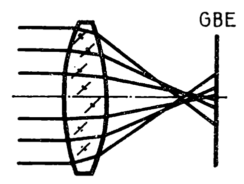


Abb. 4.117
Öffnungsfehler bei einer Sammellinse

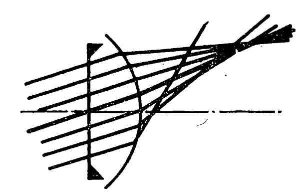


Abb. 4.118
Meridionale Koma bei einer brechenden Fläche

Koma oder Asymmetriefehler. Bei der Abbildung von außeraxialen Punkten mit weit geöffneten Bündeln überlagert sich dem Öffnungsfehler die Koma. Als Bezugsstrahl für die Abbildung außeraxialer Punkte dient meistens der Hauptstrahl. Die Koma äußert sich in bildseitig unsymmetrisch zum Hauptstrahl liegenden Strahlenbündeln. Zwei objektseitig symmetrisch zum Hauptstrahl verlaufende Meridionalstrahlen haben bildseitig ungleiche Längsabweichungen $\Delta l'$ (Abb. 4.118). Ein beliebiger Komastrahl hat in der Gaußschen Bildebene eine meridionale und eine sagittale Querabweichung.

Astigmatismus oder Zweischalenfehler. In Analogie zur Abbildung von Achsenpunkten mit Paraxialstrahlen können bei der Abbildung von außeraxialen Punkten hauptstrahlnahe Strahlen untersucht werden. Da jedoch die Flächen des optischen Systems im allgemeinen nicht rotationssymmetrisch zum Hauptstrahl liegen, ist im allgemeinen bildseitig auch keine Rotationssymmetrie im hauptstrahlnahen Bündel vorhanden. Die beiden ausgezeichneten Büschel, das meridionale und das sagittale Büschel, haben deshalb unterschiedliche bildseitige Schnittpunkte auf dem Hauptstrahl (Abb. 4.119). Bei der Abbildung von außeraxialen Punkten mit haupt-

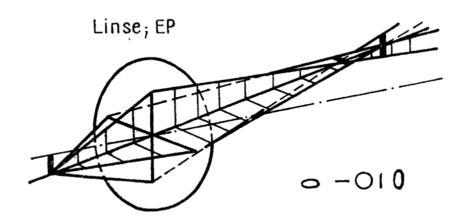


Abb. 4.119
Astigmatismus bei einer Sammellinse

strahlnahen Bündeln wird einem Objektpunkt durch das meridionale Büschel ein meridionaler und durch das sagittale Büschel ein sagittaler Bildort zugeordnet. Die damit verbundene Abweichung von der Punktförmigkeit wird Astigmatismus genannt.

Bildfeldwölbung. Sowohl der meridionale wie auch der sagittale Bildort fallen im allgemeinen nicht mit dem Durchstoßpunkt des Hauptstrahls in der Gaußschen Bildebene zusammen. Die Abweichungen ändern sich mit der Hauptstrahlneigung. Die Folge davon ist, daß eine in der Meridionalebene liegende gerade Strecke durch

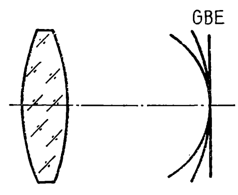


Abb. 4.120
Bildschalen bei einer Sammellinse

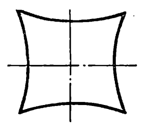


Abb. 4.121
Bild eines Quadrates bei kissenförmiger Verzeichnung

die meridionalen und durch die sagittalen hauptstrahlnahen Büschel in je eine gekrümmte Strecke abgebildet werden. Einem ebenen Objekt werden zwei gekrümmte Bildflächen zugeordnet (Abb. 4.120).

Das Vorliegen von gekrümmten Bildschalen wird als Bildfeldwölbung, das Auseinanderfallen der meridionalen und der sagittalen Bildschale als Astigmatismus bezeichnet.

Verzeichnung. Bei der Abbildung außeraxialer Punkte fällt der Durchstoßpunkt des Hauptstrahls in der Gaußschen Bildebene nicht mit dem Gaußschen Bildpunkt

zusammen. Betrachten wir den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls als den außeraxialen Bildort, dann weicht die Bildgröße von der paraxial berechneten Bildgröße ab (Abb. 4.121). Die Abweichung ist von der Hauptstrahlneigung abhängig, so daß dadurch die Ähnlichkeit zwischen Bild und Objekt beeinträchtigt wird. Der damit verbundene Abbildungsfehler wird als Verzeichnung bezeichnet.

Farblängsfehler. Die paraxiale Schnittweite eines Systems aus brechenden Flächen hängt von der Brechzahl und damit von der Wellenlänge ab. Die paraxiale Schnittweitenabweichung von der Schnittweite für eine Bezugsfarbe kennzeichnet den Farblängsfehler (Abb. 4.122).

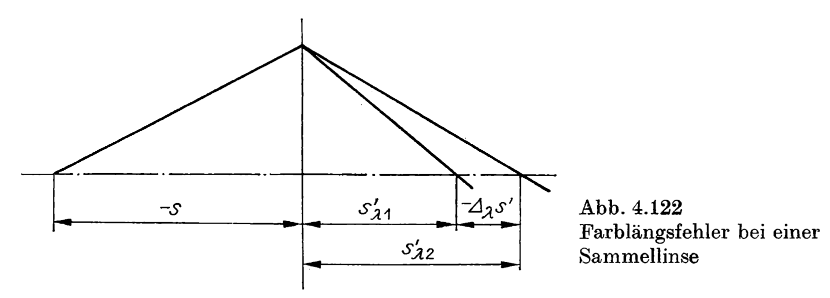


Abb. 4.122
Farblängsfehler bei einer Sammellinse

Farbfehler des Hauptstrahls. Auch die Schnittweite des Hauptstrahls hängt von der Wellenlänge ab. Die Folge davon ist eine Änderung der paraxial berechneten Bildgröße mit der Wellenlänge. Es tritt der Farbfehler des Hauptstrahls auf (Abb. 4.123).

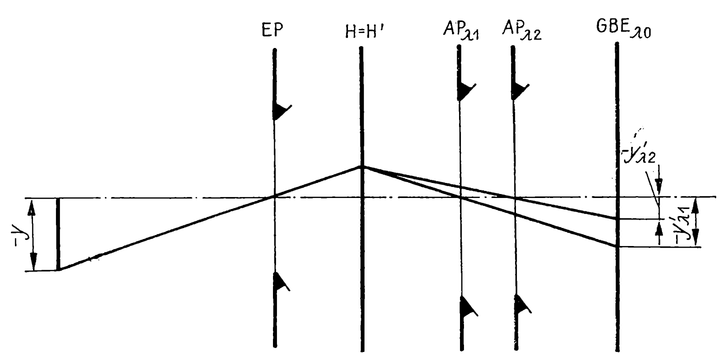


Abb. 4.123
Farbfehler des Hauptstrahls bei einer Sammellinse

Farbige Variationen der geometrischen Abbildungsfehler. Bei Strahlenbündeln mit endlichen Öffnungen und bei endlichen Feldern treten sämtliche Abbildungsfehler auf. Wird außerdem mit polychromatischem Licht abgebildet, dann hängen die Abweichungen von der Wellenlänge ab. Es ergeben sich die farbigen Variationen der geometrischen Abbildungsfehler.

Abbildungsfehler dritter Ordnung. Für ein vorgegebenes optisches System sind die Querabweichungen in der Gaußschen Bildebene Funktionen der Strahldurchstoßkoordinaten in der Objekt- und Eintrittspupillenebene. Die Objektgröße hängt mit dem Objektwinkel $2w$, die Pupillengröße mit dem Öffnungswinkel $2u$ zusammen. Eine Reihenentwicklung der Querabweichungen nach Potenzen des Objekt- und des Öffnungswinkels ergibt, daß die erste Näherung aus Summanden besteht, die die Faktoren $u^m w^n$ mit $m + n = 3$ enthalten. In erster Näherung gilt also

$$\Delta y' = \sum_{m+n=3} u^m w^n B_{mn}.$$

Die Tab. 4.29 enthält die den einzelnen Summanden zugeordneten Abbildungsfehler, die in dieser Näherung als Abbildungsfehler dritter Ordnung bezeichnet werden. Der Gültigkeitsbereich der Reihenentwicklung bis zur dritten Ordnung ist das Seidelsche Gebiet.

Tabelle 4.29
Abbildungsfehler dritter Ordnung

	m	n	Koeffizient
Öffnungsfehler	3	0	B_{30}
Koma	2	1	B_{21}
Astigmatismus	1	2	B_{12}
Bildfeldwölbung	1	2	B'_{12}
Verzeichnung	0	3	B_{03}

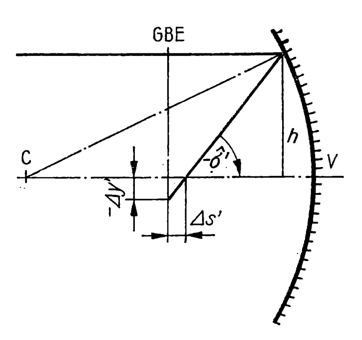


Abb. 4.124
Sphärische Abweichungen beim Hohlspiegel

Die vom Öffnungswinkel $2u$ abhängigen Fehler — Öffnungsfehler, Koma, Astigmatismus und Bildfeldwölbung — führen zu Zerstreuungsfiguren in der Gaußschen Bildebene. Die Verzeichnung hat keinen Einfluß auf die Größe der Zerstreuungsfigur, sie verschiebt den Bildort innerhalb der Gaußschen Bildebene. Aus der Tab. 4.29 ist zu entnehmen:

> Der Öffnungsfehler und die Koma treten bereits bei der Abbildung kleiner Objekte mit weit geöffneten Bündeln stark in Erscheinung.
> Bei der Abbildung großer Fehler mit sehr engen Bündeln stören besonders die Verzeichnung, der Astigmatismus und die Bildfeldwölbung.

Als ein spezielles Beispiel für die Reihenentwicklung des Öffnungsfehlers wählen wir einen sphärischen Hohlspiegel mit unendlicher Objektweite (Abb. 4.124). Die sphärische Längsabweichung beträgt

$$\Delta s' = \frac{r}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2}}\right]. \tag{4.243}$$

Durch Reihenentwicklung folgt daraus

$$\Delta s' = -\frac{r}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{h}{r}\right)^6 + \frac{35}{128}\left(\frac{h}{r}\right)^8 + \cdots\right]. \tag{4.244}$$

Im Seidelschen Gebiet gilt angenähert für $s = -\infty$

$$\Delta y' = \Delta s' \cdot \frac{2h}{r}, \tag{4.245}$$

so daß die Querabweichung durch Öffnungsfehler dritter Ordnung

$$\Delta y' = -\frac{r}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^3 \tag{4.246}$$

beträgt. Abbildung 4.125 enthält die Korrektionsdarstellung $-\Delta s'/f = f\left(\frac{h}{r}\right)$ mit den exakten Werten und nach Abbrechen der Reihe (4.244) mit verschiedenen Summanden. Die Abb. 4.126 demonstriert den relativen Fehler der Schnittweitendifferenz dritter Ordnung in Abhängigkeit von h/r.

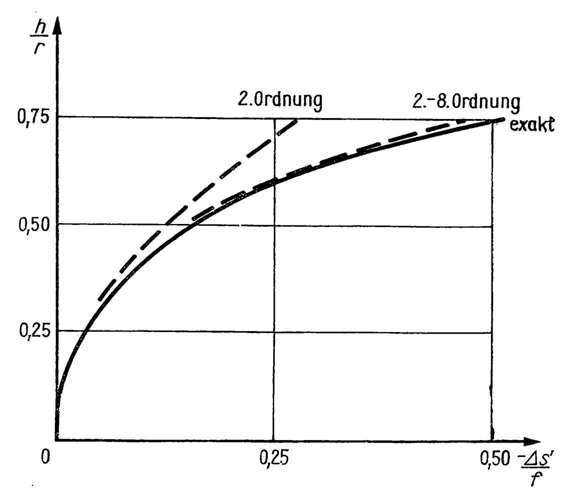


Abb. 4.125
Zur Gültigkeit der Reihenentwicklung der sphärischen Längsabweichung

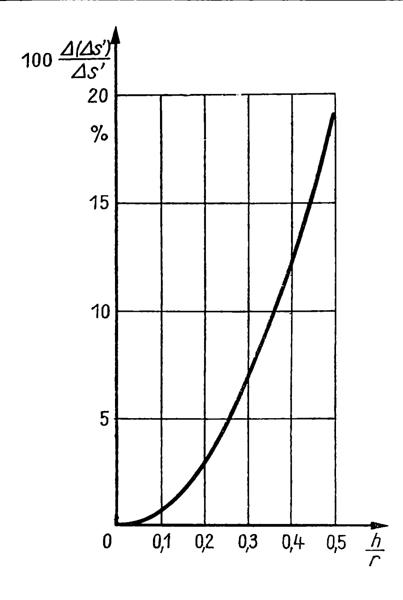


Abb. 4.126
Relativer Fehler für den Öffnungsfehler dritter Ordnung

4.3.2. Abbildungsfehler im paraxialen Gebiet

Farblängsfehler. Im paraxialen Gebiet ist die Abbildung mit monochromatischem Licht punktförmig und ähnlich. Die Punkte der Objektebene werden in Punkte der Gaußschen Bildebene abgebildet. Für eine brechende Rotationsfläche beträgt die Entfernung der Gaußschen Bildebene vom Flächenscheitel nach der Abbeschen Invarianten

$$s' = \frac{n'}{\dfrac{n}{s} + \dfrac{n' - n}{r}}.$$

Nur in Sonderfällen wird mit quasimonochromatischem Licht abgebildet; im allgemeinen ist das Licht polychromatisch. Die paraxiale Schnittweite ist dann von der Wellenlänge des Lichtes abhängig, weil durch die Dispersion die Brechzahlen von der Wellenlänge abhängen. Die Gaußschen Bildebenen für die einzelnen Wellenlängen fallen auseinander. Es gilt also:

> Beim Abbilden mit polychromatischem Licht ist die paraxiale Schnittweite brechender Flächen von der Wellenlänge des Lichtes abhängig. Der dadurch entstehende Abbildungsfehler wird als Farblängsfehler bezeichnet.

Zur Darstellung des Farblängsfehlers wird die Schnittweitendifferenz für zwei Wellenlängen verwendet. Die Funktion

$$\Delta_\lambda s' = s'_{\lambda_1} - s'_{\lambda_2} = f(\lambda) \qquad (\lambda_1 < \lambda_2) \tag{4.247}$$

ist in der Abb. 4.127 dargestellt.

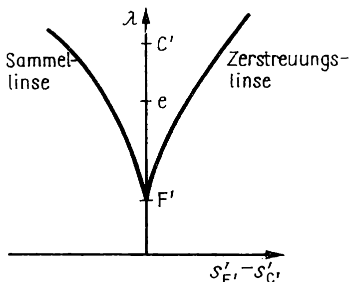


Abb. 4.127
Chromatische Längsabweichung von Linsen

Bei der Sammellinse ist $\Delta_\lambda s' < 0$; man spricht vom unterkorrigierten Farblängsfehler (Abb. 4.128).

Bei der Zerstreuungslinse ist $\Delta_\lambda s' > 0$; man spricht vom überkorrigierten Farblängsfehler (Abb. 4.129).

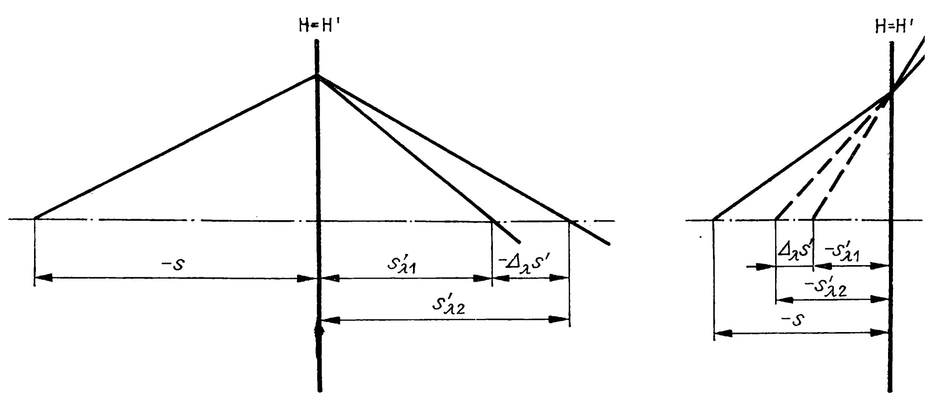


Abb. 4.128
Unterkorrektion bei der Sammellinse

Abb. 4.129
Überkorrektion bei der Zerstreuungslinse

Dichromasiebedingung. Häufig wird die Schnittweitendifferenz auf die Brennweite des optischen Systems normiert. Der negative Kehrwert dieser Größe wird als äquivalente Abbesche Zahl bezeichnet:

$$\frac{1}{\nu} = -\frac{\Delta_\lambda s'}{f'}. \tag{4.248}$$

Für ein optisches System aus n dünnen zusammenfallenden Linsen ($d = 0$) gilt:

$$\frac{F'}{\nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F'_i}{\nu_i}. \tag{4.249}$$

Gl. (4.249) wird als Dichromasiebedingung bezeichnet. (In der Literatur findet man im allgemeinen die Bezeichnung Achromasiebedingung.) Die Berechnung eines

optischen Systems mit einem großen „äquivalenten ν" führt zu einem kleinen Farblängsfehler, weil dadurch die paraxiale Schnittweite für jeweils zwei Farben gleich wird (Abb. 4.130).

> Ein optisches System, bei dem durch die Erfüllung einer Dichromasiebedingung die paraxiale Schnittweite für jeweils zwei Farben gleich ist, bezeichnen wir als Dichromat.

Die beim Dichromaten noch vorhandenen Schnittweitenabweichungen äußern sich in farbigen Rändern der Bilder. Diese Restfehler des Dichromaten werden sekundäres Spektrum genannt.

Bei zwei dünnen zusammenfallenden Linsen mit $\nu = \infty$ geht Gl. (4.249) über in

$$0 = \frac{F_1'}{\nu_1} + \frac{F_2'}{\nu_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_2'}{F_1'} = -\frac{\nu_2}{\nu_1}. \tag{4.250}$$

Daraus folgt, daß ein zweilinsiger Dichromat aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse bestehen muß. Bei vorgegebener positiver Gesamtbrechkraft ist die Sammellinse diejenige aus dem Glas höherer Abbescher Zahl.

Trichromasie. Das sekundäre Spektrum wird vermieden, wenn die paraxialen Schnittweiten für drei Farben zusammengelegt werden. Ein optisches System mit dieser Eigenschaft nennen wir einen Trichromaten. Abbildung 4.131 enthält die

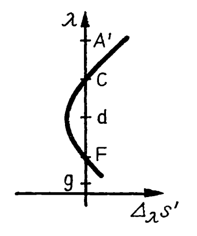


Abb. 4.130 Chromatische Längsabweichung eines Dichromaten

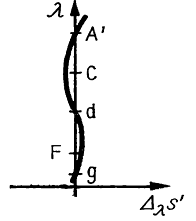


Abb. 4.131 Chromatische Längsabweichung eines Trichromaten

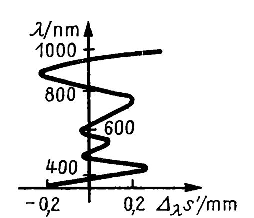


Abb. 4.132 Chromatische Längsabweichung eines Polychromaten

Korrektionsdarstellung, aus der zu erkennen ist, daß beim Trichromaten zwei Dichromasiebedingungen für aneinander angrenzende Wellenlängenbereiche zu erfüllen sind.

> Ein optisches System, bei dem durch die Erfüllung zweier Dichromasiebedingungen die paraxiale Schnittweite für jeweils drei Farben gleich ist, bezeichnen wir als Trichromat.

Der Aufbau eines Trichromaten aus zwei Linsen ist ungünstig. Im allgemeinen stellen Trichromate dreilinsige Systeme dar.

Polychromasie. Es könnte der Eindruck entstehen, daß das sekundäre Spektrum durch schrittweises Hinzunehmen weiterer Dichromasiebedingungen stetig zu ver-

mindern ist. Es läßt sich jedoch zeigen, daß durch die Erfüllung dreier Dichromasiebedingungen die paraxiale Schnittweite für eine größere Anzahl von Farben gleich ist. Wir sprechen deshalb von einem Polychromaten. Die Korrektionsdarstellung für ein Beispiel zeigt Abb. 4.132.

Farbfehler des Hauptstrahls. Der Farblängsfehler äußert sich in einer Abhängigkeit der paraxialen Schnittweite von der Wellenlänge. Dadurch liegt die Gaußsche Bildebene für die einzelnen Farben an verschiedenen Stellen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß wir einen idealen Polychromaten berechnet haben, bei dem die Gaußschen Bildebenen für alle Farben zusammenfallen. Die paraxialen Bilder der Öffnungsblende liegen dann trotzdem im allgemeinen an Stellen, die von der Wellenlänge abhängen. Bei einer Mittelblende liegen die Achsenpunkte der Eintritts- und der Austrittspupille an verschiedenen Orten. Dadurch ist auch der Verlauf des Hauptstrahls im paraxialen Gebiet für die einzelnen Farben unterschiedlich (Abb. 4.133).

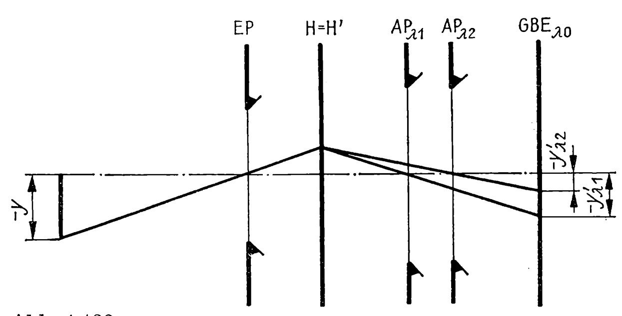


Abb. 4.133
Farbfehler des Hauptstrahls

Da wir ohne Randabschattung den Durchstoßpunkt des Hauptstrahls in der Gaußschen Bildebene als Bildpunkt ansehen können, ist die Bildgröße wellenlängenabhängig. Diese auf Grund des Farbfehlers des Hauptstrahls vorhandene Abweichung von der idealen Abbildung wird deshalb auch als Farbvergrößerungsfehler bezeichnet.

Der Farbfehler des Hauptstrahls entsteht, weil die paraxiale Abbildung der Öffnungsblende mit Farblängsfehler behaftet ist. Die Pupillenlage und damit der Hauptstrahlenverlauf hängen von der Wellenlänge ab. Dadurch ist bei vorgegebener Objektgröße die paraxiale Bildgröße von der Farbe des Lichtes abhängig.

Beim gleichzeitigen Vorliegen von Farblängsfehler muß die Bildgröße in der Gaußschen Bildebene der Bezugswellenlänge gemessen werden. Folgende Hinweise sind noch wesentlich:

— Die Einzellinse ohne zusätzliche Öffnungsblende ist frei vom Farbfehler des Hauptstrahls. Dasselbe gilt praktisch für dünne Systeme, bei denen ein Linsenrand als Öffnungsblende wirkt.

— Die Einzellinse mit zusätzlicher Öffnungsblende führt stets Farbfehler des Hauptstrahls ein.
— Ein symmetrisch zur Öffnungsblende aufgebautes System hat für den Abbildungsmaßstab $\beta' = -1$ keinen Farbfehler des Hauptstrahls (Abb. 4.134).

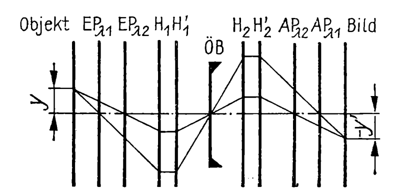


Abb. 4.134
Verschwinden des Hauptstrahlfarbfehlers im symmetrischen optischen System

4.3.3. Öffnungsfehler

Definition. Bei der Abbildung von Punkten der optischen Achse mit monochromatischen Licht tritt nur der Öffnungsfehler auf. Für die Abbildung von Achsenpunkten stellt jede Ebene, die die optische Achse enthält, eine Meridionalebene dar. Zur rechnerischen Bestimmung des Öffnungsfehlers sind deshalb nur Meridionalstrahlen durchzurechnen.

Wir betrachten den Strahlenverlauf an einer sphärischen brechenden Fläche (Abb. 4.135 und Abb. 4.136). Die bildseitige Schnittweite $\hat{s}'$ der Strahlen hängt

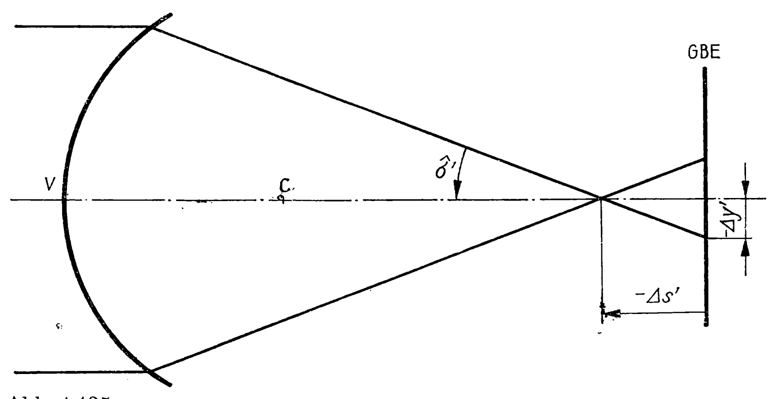


Abb. 4.135
Öffnungsfehler bei unendlicher Objektweite

in der Abb. 4.135 von der Einfallshöhe, in der Abb. 4.136 vom objektseitigen Schnittwinkel $\hat{\sigma}$ und damit ebenfalls von der Einfallshöhe ab.

Die Strahlen eines von einem Objektpunkt ausgehenden Bündels endlicher Öffnung werden nicht in einem Punkt vereinigt. In jeder achssenkrechten Auffangebene, speziell auch in der Gaußschen Bildebene, entsteht wegen der Rotationssymmetrie um die optische Achse ein Zerstreuungskreis.

Die Abweichung von der Punktförmigkeit des Bildes, die bei der Abbildung von Achsenpunkten durch die Abhängigkeit der bildseitigen Schnittweite von der Einfallshöhe hervorgerufen wird, ist der Öffnungsfehler, auch sphärische Aberration genannt.

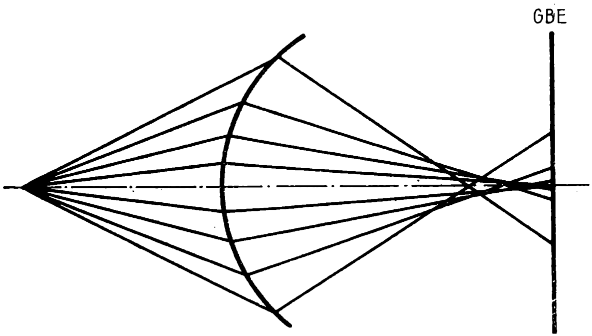


Abb. 4.136
Öffnungsfehler bei endlicher Objektweite

Das Lichtbündel schnürt sich beim Vorliegen von Öffnungsfehler bildseitig nur ein, es ist nicht homozentrisch. Die Einhüllende des bildseitigen Strahlenbündels, das aus den Strahlen bis zu ihrem Schnittpunkt mit der optischen Achse besteht, wäre beim öffnungsfehlerfreien System ein Kegel, dessen Spitze im Gaußschen Bildpunkt läge. Allgemein gilt:

Die Einhüllende des bildseitig einer brechenden Fläche verlaufenden Strahlenbündels heißt Kaustik. Die Spitze der Kaustik liegt bei der Abbildung von Achsenpunkten im Gaußschen Bildpunkt (Abb. 4.137).

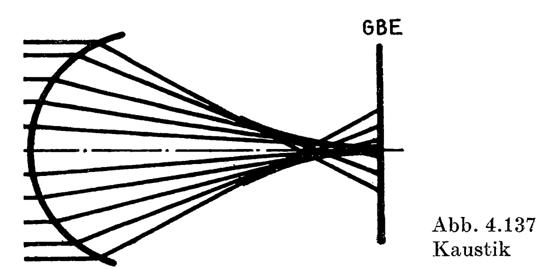


Abb. 4.137
Kaustik

Darstellung. Quantitativ wird der Öffnungsfehler durch die sphärische Längsabweichung $\Delta s' = \hat{s}' - s'$ oder die meridionale Querabweichung in der Gaußschen Bildebene erfaßt (Abb. 4.135). Nach Abb. 4.135 besteht der Zusammenhang

$$\Delta y' = \Delta s' \tan \hat{\sigma}' .$$

Bei negativer Längsabweichung spricht man von Unterkorrektion, bei positiver Längsabweichung von Überkorrektion. Eine einzelne sphärische Sammellinse ist im allgemeinen unterkorrigiert, eine Zerstreuungslinse überkorrigiert.

In den Korrektionsdarstellungen des Öffnungsfehlers wird die sphärische Längsabweichung auf der Abszisse abgetragen. Als Ordinate dient bei $s = -\infty$ die Einfallshöhe, bei $s \neq -\infty$ der Schnittwinkel $\hat{\sigma}$ oder die numerische Apertur $A = n \sin \hat{\sigma}$. Abbildung 4.138 enthält die Darstellung der sphärischen Längsabweichung für die brechende Fläche aus der Abb. 4.135. Abbildung 4.139 zeigt das Schnittbild eines hinsichtlich Öffnungsfehler korrigierten optischen Systems, Abb. 4.140 die dazugehörige typische Korrektionsdarstellung.

In einem bezüglich Öffnungsfehler korrigierten optischen System gibt es im allgemeinen eine Einfallshöhe $h_0 = 0$, für die die Schnittweite $\hat{s}'$ gleich der paraxialen Schnittweite ist, so daß die sphärische Längsabweichung $\Delta s'(h_0)$ verschwindet.
Die maximale sphärische Längsabweichung $\Delta s_z'(h_z)$ wird als Zonenfehler bezeichnet (Abb. 4.140).

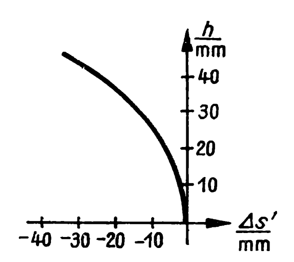
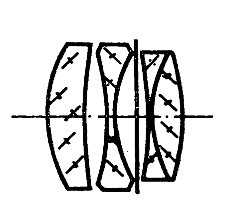


Abb. 4.138
Sphärische Längsabweichung einer sphärischen Fläche


Abb. 4.139
Tessar

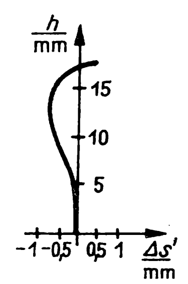


Abb. 4.140
Korrektionsdarstellung des Öffnungsfehlers für ein Tessar

Die sphärische Querabweichung in der Gaußschen Bildebene $\Delta y'$ wird auf der Ordinate abgetragen. Es ist vorteilhaft, als unabhängige Variable $\tan \hat{\sigma}'$ zu verwenden.

Die den Abb. 4.135 und 4.138 zugeordnete Korrektionsdarstellung der Querabweichung ist in der Abb. 4.141, die den Abb. 4.139 und 4.140 zugeordnete Korrektionsdarstellung der Querabweichung in der Abb. 4.142 enthalten.

In einer zur Gaußschen Bildebene parallelen Auffangebene, die den Abstand b' von der Gaußschen Bildebene hat, beträgt die sphärische Querabweichung $(\Delta y')_{b'}$ eines Lichtstrahls nach Abb. 4.143

$$(\Delta y')_{b'} = \Delta y' - b' \tan \hat{\sigma}' . \tag{4.251}$$

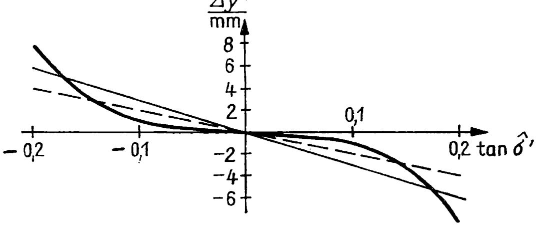


Abb. 4.141
Sphärische Querabweichung für eine brechende Fläche

In der Korrektionsdarstellung beschreibt die Kurve $\Delta y'$ (tan σ') den Verlauf der sphärischen Querabweichung in der Gaußschen Bildebene. Der Subtrahend b' tan σ' hängt linear von tan σ' ab und ergibt deshalb in der Korrektionsdarstellung eine Gerade. Es gilt also:

> Der Zerstreuungskreis in der Auffangebene, die die Entfernung b' von der Gaußschen Bildebene hat, ergibt sich aus der maximalen Ordinatendifferenz zwischen der Kurve $\Delta y'$ (tan σ') und der Geraden b' tan σ' (Abb. 4.141).

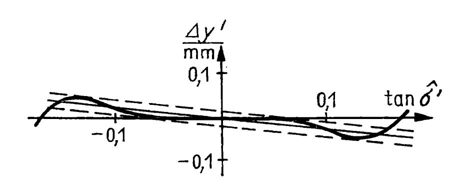


Abb. 4.142
Sphärische Querabweichung für ein korrigiertes System

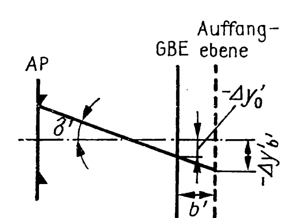


Abb. 4.143
Querabweichung in einer Auffangebene

Bestimmung von „besten Auffangebenen“. Zwei Auffangebenen sind besonders ausgezeichnet,

— die Auffangebene, in der der kleinste Zerstreuungskreis entsteht und

— die Auffangebene mit dem hellsten Bildkern.

Den kleinsten Zerstreuungskreis erhalten wir in einer Auffangebene, deren Abstand b' von der Gaußschen Bildebene folgendermaßen bestimmt wird:

In die Darstellung $\Delta y'$ (tan σ') zeichnen wir von allen Geraden, die durch den Ursprung gehen, diejenige ein, für die die maximale Ordinatendifferenz zwischen der Kurve $\Delta y'$ (tan σ') und der Geraden b' tan σ' betragsmäßig den kleinsten Wert hat. In der Abb. 4.141 ist das Verfahren für eine Einzelfläche dargestellt. Es ist $b' = -30$ mm und $|\Delta y'|_{\text{Max}} = 2$ mm. Der Lichtstrom verteilt sich nahezu gleichmäßig über den gesamten Zerstreuungskreis, so daß die schematische Lichtverteilung nach Abb. 4.144 entsteht.

Ein kleiner heller Bildkern mit schwacher Umstrahlung, wie es in Abb. 4.145 schematisch dargestellt ist, entsteht in einer Auffangebene, in der der Hauptanteil an Strahlen in einem kleinen Bereich des gesamten Zerstreuungskreises liegt. In einem unkorrigierten optischen System kann die Lage der Geraden b' tan σ', deren Steigung den Abstand der Ebene mit dem hellsten Bildkern von der Gaußschen Bildebene angibt, nur abgeschätzt werden. Das Ergebnis nach Abb. 4.141 lautet $b' = -20$ mm, $|\Delta y'|_{\text{Max}} = 4$ mm. Für ein korrigiertes optisches System legt man die Gerade b' tan σ' parallel zu der Geraden, die die Kurve $\Delta y'$(tan σ') zweimal tangiert. In der Abb. 4.142 lesen wir $b' = -0{,}2$ mm ab.

In der Ebene des kleinsten Zerstreuungskreises sind die Gebiete wesentlicher Inten-

sität im Bild eines Punktes größer als in der Ebene des hellsten Bildkerns, aber das Streulicht ist schwächer. Deshalb ist in der Ebene des kleinsten Zerstreuungskreises das Auflösungsvermögen geringer, der Kontrast für grobe Strukturen größer als in der Ebene des hellsten Bildkerns.

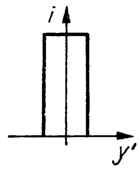


Abb. 4.144
Intensität bei kleinstem Zerstreuungskreis (schematisch)

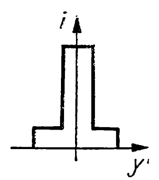


Abb. 4.145
Intensität bei hellstem Bildkern (schematisch)

Hohlspiegel. Entsprechend der Ausführungen im Abschnitt 4.1.9. wird der unendlich ferne Achsenpunkt durch einen Parabolspiegel öffnungsfehlerfrei abgebildet. Ein im Endlichen liegender Objektpunkt wird durch einen elliptischen Spiegel in einen reellen Bildpunkt, durch einen hyperbolischen Spiegel in einen virtuellen Bildpunkt ohne Öffnungsfehler abgebildet.

Von einem Kugelspiegel wird nur der Scheitel in sich selbst (Abbildungsmaßstab $\beta' = 1$) und der Krümmungsmittelpunkt in sich selbst (Abbildungsmaßstab $\beta' = -1$) öffnungsfehlerfrei abgebildet.

Brechende Fläche. Eine einzelne asphärische Rotationsfläche läßt sich stets so bestimmen, daß sie öffnungsfehlerfrei ist. (Ein Beispiel wurde im Abschnitt 4.1.9. angegeben.) Die sphärische Fläche bildet den unendlich fernen Achsenpunkt mit Öffnungsfehler ab.

Im Endlichen gibt es drei Punktepaare, die sich ohne Öffnungsfehler aufeinander abbilden.

— Es ist trivial, daß der Flächenscheitel fehlerfrei in sich selbst abgebildet wird.
— Strahlen, die vom Krümmungsmittelpunkt ausgehen oder auf ihn hinzielen, werden nicht gebrochen. Deshalb wird der Krümmungsmittelpunkt ohne Öffnungsfehler in sich abgebildet.
— Das dritte öffnungsfehlerfreie Punktepaar finden wir, wenn wir untersuchen, für welche objektseitige Schnittweite die bildseitige Schnittweite

$$s' = r - r\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \hat{\sigma}'}$$

unabhängig vom Winkel $\hat{\sigma}'$ ist. Es muß also

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \hat{\sigma}'} = m$$

sein (m = konstant). Das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{n}{n'}$$

zeigt, daß für

$$m = -\frac{n}{n'} \quad \text{und} \quad -\sin \hat{\sigma}' = \sin \varepsilon$$

die gestellte Forderung zu erfüllen ist.

Der Punkt, für den $\hat{\sigma}' = -\varepsilon$ ist, wird also ohne Öffnungsfehler in den Punkt mit der Schnittweite

$$\hat{s}' = s' = r + \frac{n}{n'} r \tag{4.252}$$

bzw.

$$s' = r \frac{n + n'}{n'}$$

abgebildet. Aus der Abbildungsgleichung folgt die konjugierte objektseitige Schnittweite

$$s = r \frac{n + n'}{n}. \tag{4.253}$$

Bei $r = 50$ mm, $n = 1$ und $n' = 1{,}5182$ ergeben sich die Schnittweiten $s = 125{,}91$ mm und $s' = 82{,}93$ mm. Es handelt sich um die Abbildung eines virtuellen Objektpunktes in einen reellen Bildpunkt.

Einzelne Sammellinse. Bei der Abbildung des unendlich fernen Achsenpunktes führt eine dünne sphärische Einzellinse stets Öffnungsfehler ein.

Die Sammellinse ist unterkorrigiert ($\Delta s' < 0$); die Zerstreuungslinse ist überkorrigiert ($\Delta s' > 0$). Die Korrektion des Öffnungsfehlers ist deshalb mit einer geeigneten Kombination aus Sammel- und Zerstreuungslinsen möglich. Für dünne Linsen gilt allgemein die Regel:

> Wenn der Öffnungsfehler klein bleiben soll, dann ist die Linse so in den Strahlengang zu stellen, daß die stärker gekrümmte Seite der größeren Schnittweite zugekehrt ist.

Aus der Theorie der Abbildungsfehler 3. Ordnung folgt, daß der Öffnungsfehler im Seidelschen Gebiet ein Minimum hat, wenn die Durchbiegung der Linse

$$Q = \frac{n}{n + 2} \left(\frac{2}{s} + F' \right) \tag{4.254}$$

beträgt. Für $s = -\infty$ folgt daraus für die dünne Linse mit dem Öffnungsfehler-Minimum das Radienverhältnis

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2n^2 - n - 4}{n(2n + 1)}. \tag{4.255}$$

Bei $n = 1{,}5$ ist $r_1/r_2 = -1/6$.

Von Bedeutung ist die Möglichkeit, den Öffnungsfehler durch Aufspalten einer Linse in zwei Linsen zu verringern.

Gauß-Fehler. Die Abweichungen durch Öffnungsfehler sind bei brechenden Flächen auch von der Wellenlänge des Lichtes abhängig.

Die farbige Variation des Öffnungsfehlers wird als Gauß-Fehler bezeichnet.

(Der Name erklärt sich daraus, daß GAUSS ein Fernrohrobjektiv mit einem kleinen solchen Fehler berechnet hatte.)

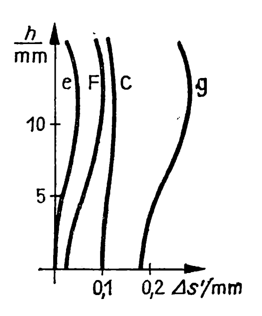


Abb. 4.146
Korrektionsdarstellung für ein System mit Gauß-Fehler

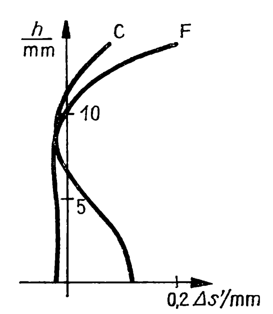


Abb. 4.147
Korrektionsdarstellung für ein System mit vermindertem Gauß-Fehler

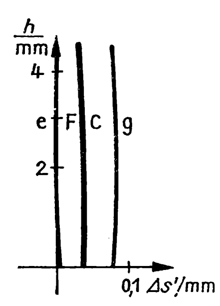


Abb. 4.148
Korrektionsdarstellung für einen Apochromaten

Abbildung 4.146 enthält die Korrektionsdarstellung des Öffnungsfehlers für ein Fernrohrobjektiv mit Gauß-Fehler. Die Verringerung des Gauß-Fehlers eines Dichromaten läßt sich erreichen, wenn der Farblängsfehler unterkorrigiert wird. Die Öffnungsfehlerkurven für zwei Farben schneiden sich dann bei einer mittleren Einfallshöhe (Abb. 4.147).

Bei einem Trichromaten wird im allgemeinen der Gauß-Fehler für zwei Farben behoben. Es ergibt sich ein Apochromat. In der Abb. 4.148 ist die Korrektionsdarstellung für ein apochromatisches Fernrohrobjektiv angegeben.

4.3.4. Koma. Bildfeldwölbung. Astigmatismus

Öffnungsfehler im schrägen Bündel. Wir betrachten zunächst eine brechende Fläche, bei der die Öffnungsblende in der Ebene des Krümmungsmittelpunktes steht.

Der Objektpunkt befinde sich im Unendlichen (Abb. 4.149). Bezugsstrahl sei der Hauptstrahl. Dieser geht ungebrochen durch die Fläche hindurch. Die Folge davon ist, daß der Hauptstrahl der optischen Achse gleichwertig ist. Das Strahlenbündel verläuft bildseitig rotationssymmetrisch zum Hauptstrahl. Die Strahlen verschie-

dener Durchstoßhöhe in der Eintrittspupille schneiden den Hauptstrahl in verschiedenen Punkten. Es liegt Öffnungsfehler des schrägen Bündels vor.

> Auch im schrägen Bündel kann Öffnungsfehler im weiteren Sinne vorhanden sein. Das Strahlenbündel ist dann rotationssymmetrisch zum Hauptstrahl.

Meridionale Koma. Wir rücken die Öffnungsblende aus der Ebene des Krümmungsmittelpunktes heraus. Dadurch wird ein anderer als der durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Strahl zum Bezugsstrahl (Abb. 4.150). Der Schnitt der Kaustik

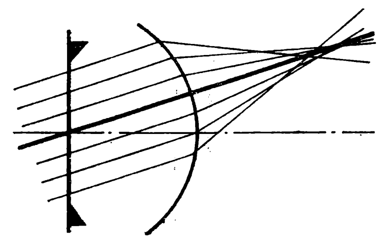


Abb. 4.149
Öffnungsfehler im schrägen Bündel

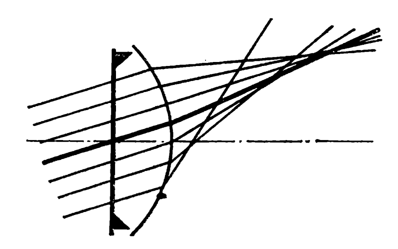


Abb. 4.150
Meridionale Koma einer brechenden Fläche

mit der Meridionalebene zeigt nun keine Symmetrie mehr zum Hauptstrahl. Diese unsymmetrische Strahlenvereinigung im Meridionalschnitt heißt meridionale Koma oder Asymmetriefehler. Die meridionale Koma wird oft schlechthin als Koma bezeichnet. Für sie gilt also:

> Die meridionale Koma ist die Abweichung von der Punktförmigkeit, die bei der Abbildung außeraxialer Punkte mit einem weitgeöffneten Meridionalbüschel auftritt und die sich in einer unsymmetrisch zum Bezugsstrahl liegenden Strahlenvereinigung äußert.

Zur quantitativen Behandlung der meridionalen Koma sind Meridionalstrahlen verschiedener Schnittweite durchzurechnen.

Darstellung als Querkoma. In der Gaußschen Bildebene fallen die Durchstoßpunkte der Meridionalstrahlen nicht mit dem Gaußschen Bildpunkt zusammen. Es entsteht eine Querabweichung $\Delta y'$, die ebenfalls zur Darstellung der meridionalen Koma verwendet wird. Es ist günstig, die Querabweichung als Funktion von $\tan \sigma' - \tan \hat{\sigma}_p'$ darzustellen, weil dann die beste Auffangebene so ermittelt werden kann, wie es für den Öffnungsfehler im Abschnitt 4.3.3. beschrieben wurde (Abb. 4.151).

Sagittale Koma. Die meridionale Koma gibt noch keinen vollständigen Eindruck von der Strahlenvereinigung schräger Bündel. Wir müssen auch den Verlauf der windschiefen Strahlen beachten.

> Die Abweichung von der Punktförmigkeit, die bei der Abbildung außeraxialer Punkte mit windschiefen Strahlen entsteht, wird als sagittale Koma bezeichnet.

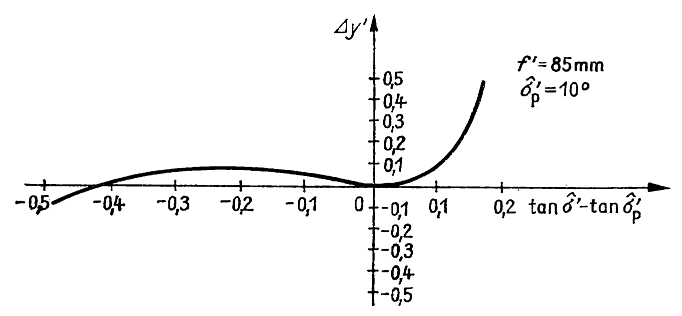


Abb. 4.151
Meridionale Querabweichung für ein schräges Büschel

Wir betrachten zunächst nur Strahlen, die objektseitig im Sagittalschnitt verlaufen. Zwei Strahlen, die objektseitig symmetrisch zum Meridionalschnitt liegen, bleiben auch bildseitig symmetrisch zum Meridionalschnitt. Die Ebene, die beide Strahlen bildseitig aufspannen, enthält jedoch nicht den Hauptstrahl. Die Ebenen, die Strahlenpaare mit verschiedener Entfernung vom Hauptstrahl aufspannen, fallen nicht zusammen. Sie fächern sich also im Bildraum so auf, daß sie unterschiedliche Neigung zur bildseitigen Sagittalebene haben (Abb. 4.152).

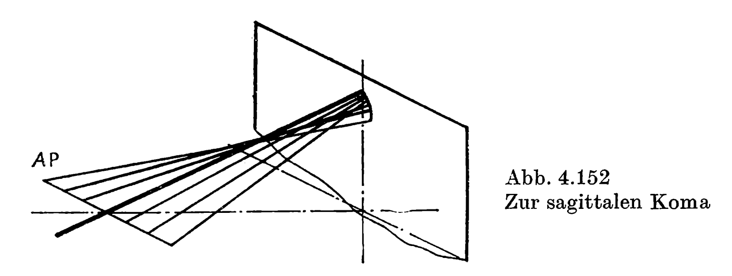


Abb. 4.152
Zur sagittalen Koma

Die objektseitig im Sagittalschnitt verlaufenden Strahlen haben in der Gaußschen Bildebene sowohl eine meridionale wie auch eine sagittale Querabweichung (Abb. 4.152). Die Durchstoßpunkte sämtlicher Sagittalstrahlen bilden eine „Rinne“. (Die sagittale Koma der reinen Sagittalstrahlen wird deshalb auch Rinnenfehler genannt.) Die Zerstreuungsfigur, die von sämtlichen windschiefen Strahlen erzeugt wird, hat ein schweifförmiges, also ein „komaförmiges“ Aussehen (Abb. 4.153).

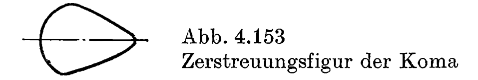


Abb. 4.153
Zerstreuungsfigur der Koma

Diese Unsymmetrie der Zerstreuungsfigur bewirkt, daß die Koma besonders störend wirkt. Wir weisen noch darauf hin, daß die von uns dargestellte Auswirkung der Koma strenggenommen durch das Zusammenwirken von Öffnungsfehler im schrägen

Bündel und Koma entsteht. Im Seidelschen Gebiet sind diese Fehler additiv, wobei die sagittale Querabweichung der reinen Sagittalstrahlen durch den Öffnungsfehler entsteht.

Die Sinusbedingung. Wir gehen von einer brechenden Fläche aus, die öffnungsfehlerfrei abbildet. Es könnte sich also um eine asphärische Fläche oder um eine sphärische Fläche mit einer der im Abschnitt 4.3.3. abgeleiteten speziellen Objektlage handeln. Sämtliche Strahlen, die vom Achsenpunkt des Objektes ausgehen, sollen also durch den Achsenpunkt des Bildes gehen.

Wir wollen angeben, welche Bedingung erfüllt sein muß, damit ein kleines achssenkrechtes Flächenelement, durch dessen Mitte die optische Achse geht, mit weit geöffneten Bündeln in ein kleines achssenkrechtes Flächenelement abgebildet wird. Bei der Abbildung von Punkten, die in der Nähe der optischen Achse liegen, tritt in erster Näherung nur Koma auf. Die gestellte Forderung läuft also darauf hinaus, daß die öffnungsfehlerfreie Fläche ein kleines achssenkrechtes Flächenelement komafrei abbilden soll.

Die Ableitung mit den Sätzen von FERMAT und MALUS, die hier nicht angegeben werden soll, führt auf die Abbesche Sinusbedingung (4.228), die wir im Abschnitt 4.2.5. aus lichttechnischen Betrachtungen abgeleitet haben:

$$ny \sin \hat{\sigma} = n'y' \sin \hat{\sigma}'. \tag{4.256a}$$

Die Abbesche Sinusbedingung ist auch auf ein Flächensystem anwendbar. Ein optisches System, bei dem die Sinusbedingung erfüllt ist, wird aplanatisch genannt.

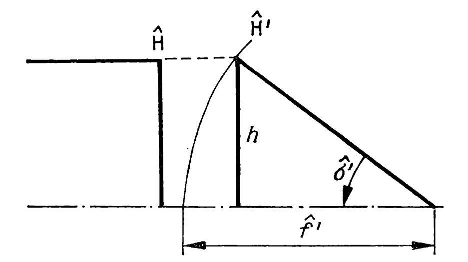


Abb. 4.154
Zur Sinusbedingung bei unendlicher Objektweite

Bei der Abbildung eines unendlich fernen Flächenelementes ist $\hat{\sigma} = 0$. Die Sinusbedingung geht in die Forderung

$$\hat{f}' = f' \tag{4.256b}$$

über. Die für achsferne Strahlen verallgemeinerte Brennweite eines aplanatischen Systems ist aus

$$\hat{f}' = \frac{h}{\sin \hat{\sigma}'} \tag{4.256c}$$

zu berechnen. Die objektseitige Hauptfläche ist eben (Abb. 4.154).

Aplanatische Punkte. Die im Abschnitt 4.3.3. angegebenen Punktepaare, die sich öffnungsfehlerfrei aufeinander abbilden, werden aplanatische Punkte genannt. Kleine Flächenelemente am Ort dieser Punkte werden zusätzlich komafrei abgebildet, weil die Sinusbedingung erfüllt ist.

Die Kombination zweier Flächen, die aplanatische Objektpunkte abbilden, ergibt aplanatische Linsen. Von diesen hat der sammelnde aplanatische Meniskus besondere praktische Bedeutung (Abb. 4.155). Die erste Fläche liegt konzentrisch zum Objektpunkt. Für sie gilt

$$s_1 = r_1, \qquad s_1' = r_1. \tag{4.257}$$

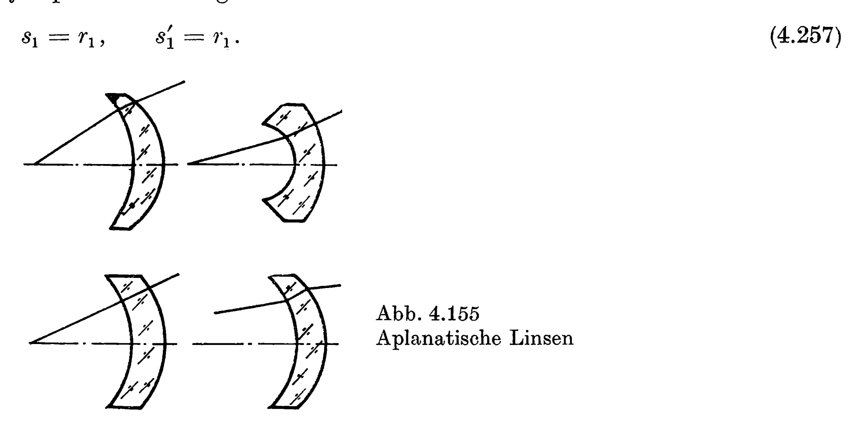


Abb. 4.155
Aplanatische Linsen

Die Übergangsbedingung zur zweiten Fläche lautet

$$s_2 = s_1' - d \quad \text{bzw.} \quad s_2 = r_1 - d. \tag{4.258}$$

Der Radius der zweiten Fläche folgt nach Gl. (4.253):

$$r_2 = \frac{n_2 s_2}{n_2' + n_2}. \tag{4.259}$$

Mit $n_2 = n$, $n_2' = 1$ und (4.258) erhalten wir

$$r_2 = \frac{n(r_1 - d)}{n + 1}. \tag{4.260}$$

Aus Gl. (4.252) ergibt sich mit Gl. (4.259)

$$s_2' = n(s_1 - d). \tag{4.261}$$

Ein reeller Objektpunkt ($s_1 < 0$) wird also stets in einen virtuellen Bildpunkt ($s_2' < 0$) abgebildet. Positive Brechkraft hat der Meniskus, wenn die Bedingung $d < -nr_1$ ($r_1 < 0$!) erfüllt ist.

Der *sphärische Hohlspiegel* ist unabhängig von der Objektlage komafrei, wenn sich die Öffnungsblende in der Ebene des Krümmungsmittelpunktes befindet. Der Hauptstrahl ist dann auch im Bildraum Symmetriestrahl des abbildenden Bündels. Bei dieser speziellen Lage wird die Öffnungsblende als „natürliche“ Blende bezeichnet.

Der Hohlspiegel mit natürlicher Blende bildet zwar komafrei, aber nicht öffnungsfehlerfrei ab. In diesem Fall spricht man von einer isoplanatischen Abbildung.

Ein *optisches System*, das symmetrisch zur Öffnungsblende aufgebaut ist, bildet für den Abbildungsmaßstab $\beta' = -1$ isoplanatisch ab (Objekt- und Bildweite gleich).

Bildfeldwölbung. Wir gehen von einem Hohlspiegel mit natürlicher Blende aus Die Objektweite sei unendlich. Der Hohlspiegel hat dann Öffnungsfehler des schrägen Bündels (Abb. 4.156).

Wir verringern den Durchmesser der Öffnungsblende, so daß schließlich nur noch das hauptstrahlnahe Bündel übrigbleibt. Der Zerstreuungskreis in der senkrecht zum Hauptstrahl stehenden Ebene, die vom Spiegel um die Brennweite entfernt ist, wird dabei stetig verkleinert. Der Hauptstrahl ist beim Hohlspiegel mit natürlicher Blende der optischen Achse völlig gleichwertig, so daß sich die hauptstrahlnahen Bündel so verhalten wie die Paraxialstrahlen. Die Bildpunkte, die durch die hauptstrahlnahen Bündel von Punkten einer im Unendlichen liegenden Objektebene zugeordnet werden, haben sämtlich die Entfernung f' vom Spiegel. Die Bildfläche stellt eine Kugel mit dem Radius $f' = r/2$ dar, das Bildfeld ist gewölbt.

> Bleibt bei der Abbildung außeraxialer Punkte mit hauptstrahlnahen Bündeln die Rotationssymmetrie um den Hauptstrahl im Bildraum erhalten, dann liegt im allgemeinen Bildfeldwölbung vor. Die Bildpunkte, die einer objektseitig achssenkrechten Ebene zugeordnet sind, bilden eine gekrümmte Fläche, die als Petzval-Schale bezeichnet wird.

Petzval-Bedingung. Bei einer sphärischen brechenden Fläche hat die Petzval-Schale für die Abbildung einer unendlich fernen Ebene die Krümmung

$$\frac{1}{r_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{r - f'}.$$

Setzt man

$$f' = \frac{n'r}{n' - n}, \quad \delta\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n'} - \frac{1}{n},$$

dann gilt

$$\frac{1}{r_{\mathrm{p}}} = \frac{n'}{r}\,\delta\left(\frac{1}{n}\right).$$

Im Rahmen der Theorie der Abbildungsfehler dritter Ordnung läßt sich zeigen, daß die Krümmung der Petzval-Schale bei einem optischen System aus n Flächen

$$\frac{1}{r_{\mathrm{p}}} = -n_n' \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{1}{r_k}\,\delta\left(\frac{1}{n_k}\right)\right] \tag{4.262}$$

beträgt. Die Summe wird als Petzval-Summe bezeichnet. Der Ansatz eines optischen Systems mit einer kleinen Petzval-Summe schafft günstige Voraussetzungen für ein ebenes Bildfeld.

Astigmatismus. Wir rücken die Öffnungsblende des Hohlspiegels aus der Ebene heraus, die durch den Krümmungsmittelpunkt geht. Sie bleibt dabei die Eintrittspupille, aber sie ist nicht die Austrittspupille (Abb. 4.157). Durch die Reflexion der Hauptstrahlen in eine andere als die Lichteinfallsrichtung geht die Rotationssymmetrie um die Hauptstrahlen verloren. Es besteht nur noch Symmetrie in der Meridional- und in der Sagittalebene für das hauptstrahlnahe Gebiet. Zwei hauptstrahlnahe Meridionalstrahlen, die objektseitig symmetrisch zum Hauptstrahl verlaufen, bleiben bildseitig symmetrisch zum Hauptstrahl. Die entsprechende Aussage gilt für hauptstrahlnahe Sagittalstrahlen.

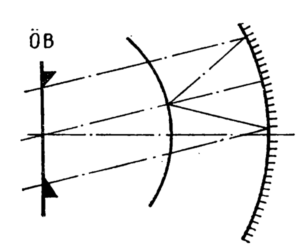


Abb. 4.156
Bildfeldwölbung des Hohlspiegels mit natürlicher Blende

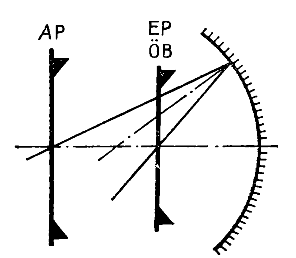


Abb. 4.157
Abbildung der Öffnungsblende am Hohlspiegel

Der bildseitige Schnittpunkt der Strahlen des hauptstrahlnahen $\frac{\text{meridionalen}}{\text{sagittalen}}$ Büschels mit dem Hauptstrahl ist der $\frac{\text{meridionale}}{\text{sagittale}}$ Bildpunkt (Abb. 4.119).

Ist bei der Abbildung außeraxialer Punkte mit hauptstrahlnahen Bündeln im Bildraum keine Symmetrie um den Hauptstrahl vorhanden, dann treten Astigmatismus und Bildfeldwölbung auf. Eine achssenkrechte Ebene wird auf zwei gekrümmte Bildschalen abgebildet. Das Auseinanderfallen von sagittaler und meridionaler Bildschale wird als Astigmatismus bezeichnet.

Sagittaler Bildort. In der Abb. 4.158 ist für die brechende Kugelfläche der zum Objektpunkt $\hat{A}$ gehörige Hauptstrahl eingezeichnet. Die Gerade durch den Objektpunkt $\hat{A}$ und den Krümmungsmittelpunkt C ist der optischen Achse gleichwertig. Deshalb müssen sich bildseitig sämtliche Strahlen, die den gleichen Winkel η wie der Hauptstrahl mit der Geraden $\hat{A}C$ einschließen, in ein und demselben Punkt schneiden. Mit anderen Worten: Strahlen, die objektseitig auf einem Kreiskegel liegen, dessen Spitze der Objektpunkt ist, liegen bildseitig auf einem Kreiskegel, in dessen Spitze sie sich schneiden. Die dem Hauptstrahl infinitesimal benachbarten Sagittalstrahlen können als Bestandteil des betrachteten Strahlenkegels angesehen werden, weil sie innerhalb eines infinitesimalen Ausschnitts einer Tangentialebene an den Kegel liegen.

Der sagittale Bildort $\hat{A}'_s$ fällt mit dem Punkt zusammen, in dem sich der Hauptstrahl und der Strahl, der durch den Krümmungsmittelpunkt geht, schneiden.

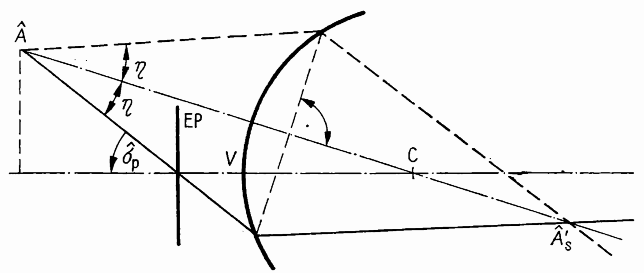


Abb. 4.158
Zur Bestimmung des sagittalen Bildortes

Meridionaler Bildort. Die hauptstrahlnahen Strahlen des meridionalen Büschels haben andere Einfallswinkel als der Hauptstrahl. Die oberhalb des Hauptstrahls verlaufenden Strahlen werden schwächer abgelenkt als dieser. Die Folge davon ist, daß der meridionale Bildort näher an der brechenden Fläche liegt als der sagittale Bildort.

Der meridionale Bildort $\hat{A}'_m$ ist der Schnittpunkt der Strahlen mit dem Hauptstrahl, die die Einfallswinkel $\varepsilon_p \pm d\varepsilon_p$ haben (Abb. 4.159).

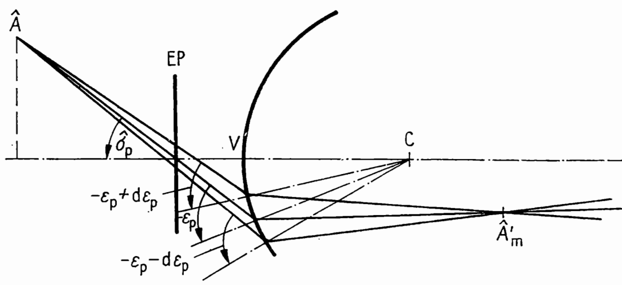


Abb. 4.159
Zur Bestimmung des meridionalen Bildortes

Darstellung. Zur Darstellung von Astigmatismus und Bildfeldwölbung tragen wir auf der Abszisse die achsparallelen Abstände der sagittalen und meridionalen Bildpunkte von der Gaußschen Bildebene ab. Als unabhängige Variable verwenden wir den objektseitigen Schnittwinkel $\hat{\sigma}_p$ des Hauptstrahls mit der Achse oder die paraxiale Bildgröße y'. Abbildung 4.160 zeigt die Korrektionsdarstellung für eine Sammellinse, Abb. 4.161 für ein korrigiertes optisches System.

Ein optisches System, bei dem die meridionale Bildschale links der sagittalen

Bildschale liegt, heißt unterkorrigiert. Eine dünne sammelnde Einzellinse ohne zusätzliche Öffnungsblende ist stets unterkorrigiert. Ein Anastigmat ist ein optisches System, das hinsichtlich Astigmatismus und Bildfeldwölbung korrigiert ist.

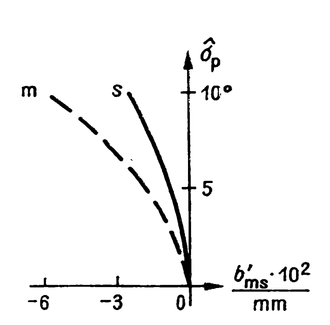


Abb. 4.160
Korrektionsdarstellung des Astigmatismus für eine Sammellinse

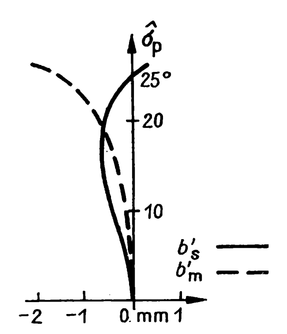


Abb. 4.161
Korrektionsdarstellung des Astigmatismus für ein Tessar

4.3.5. Verzeichnung

Definition. Wir bilden eine Objektstruktur ab, die in einer achssenkrechten Ebene liegt. Zur Erzeugung einer Bildstruktur, die der Objektstruktur geometrisch ähnlich ist, muß der Abbildungsmaßstab innerhalb der Auffangebene konstant sein. Er darf also nicht von den Objektkoordinaten x und y abhängen. Diese Forderung war neben der Punktförmigkeit Voraussetzung für die ideale geometrisch-optische Abbildung. Weil die konkreten optischen Funktionselemente nicht ideal abbilden, ist das Bild im allgemeinen nicht dem Objekt ähnlich.

> Der Abbildungsfehler, der die Abweichung von der Ähnlichkeit zwischen Objekt und Bild erfaßt, wird Verzeichnung genannt.
> Die Verzeichnung äußert sich bei zentrierten optischen Systemen mit endlicher Objektweite darin, daß der Abbildungsmaßstab eine Funktion der Objektgröße ist. Bei unendlicher Objektweite ist die Bildgröße nicht der scheinbaren Objektgröße proportional. (Der Proportionalitätsfaktor ist im paraxialen Gebiet die objektseitige Brennweite.)

Das Strahlenbündel, das einen außeraxialen Objektpunkt abbildet, hat bei einem abschattungsfreien optischen System den Hauptstrahl als Schwerstrahl. Deshalb bestimmt der Durchstoßpunkt des Hauptstrahls in der Auffangebene den Bildort und damit die Bildgröße. Es genügt also zur Untersuchung der Verzeichnung, den Verlauf der Hauptstrahlen zu berechnen. Die Verzeichnung ist ohne Beimischung anderer Abbildungsfehler zu beobachten, wenn die Objektebene punktförmig in die Bildebene abgebildet wird. Die Verzeichnung ist ein Abbildungsfehler, der keine Zerstreuungsfigur, sondern eine radiale Verschiebung des Bildpunktes innerhalb der Auffangebene hervorruft.

Darstellung. Als Maß für die Verzeichnung kann die Differenz aus der Durchstoßhöhe des Hauptstrahls $\hat{y}'$ und der paraxial berechneten Bildgröße y' in der Gaußschen Bildebene dienen. Im allgemeinen gibt man die relative Verzeichnung

$$\frac{\Delta y'}{y'} = \frac{\hat{y}' - y'}{y'} = f(\hat{\sigma}_p) \tag{4.263}$$

an. Für eine endliche Objektweite kann nach Division von Zähler und Nenner durch y in Gl. (4.263)

$$\frac{\Delta \beta'}{\beta'} = \frac{\hat{\beta}' - \beta'}{\beta'} = f(\hat{\sigma}_p) \tag{4.264}$$

geschrieben werden.

Für $\Delta y'/y' < 0$ ist die Bildgröße zu klein; das optische System hat tonnenförmige Verzeichnung (Abb. 4.162 und 4.163). Für $\Delta y'/y' > 0$ ist die Bildgröße zu groß; das optische System hat kissenförmige Verzeichnung (Abb. 4.164 und Abb. 4.165).

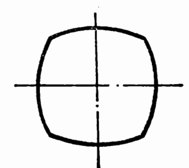


Abb. 4.162
Bild eines Quadrates bei tonnenförmiger Verzeichnung

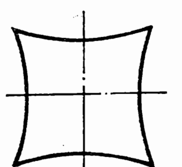


Abb. 4.164
Bild eines Quadrates bei kissenförmiger Verzeichnung

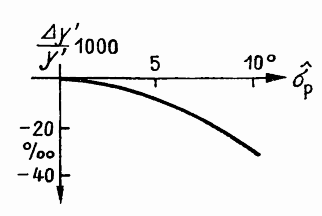


Abb. 4.163
Korrektionsdarstellung für tonnenförmige Verzeichnung

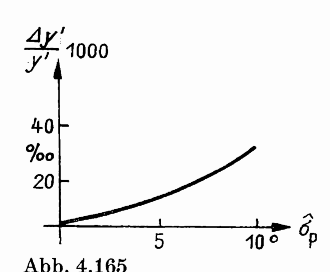


Abb. 4.165
Korrektionsdarstellung für kissenförmige Verzeichnung

Bei Fotoobjektiven liegt die relative Querabweichung normalerweise unter 5‰, bei Luftbildobjektiven unter 1‰.

Tangensbedingung. Wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen ein optisches System verzeichnungsfrei ist. Die Abb. 4.166 zeigt ein optisches System, bei dem die Abbildung der Öffnungsblende mit Öffnungsfehler behaftet ist. Die Orte der Eintritts- und der Austrittspupille sind dadurch von der Hauptstrahlneigung im

Achsenpunkt der Öffnungsblende abhängig. Das ist im allgemeinen auch im hinsichtlich Öffnungsfehler korrigierten System so, weil die Korrektion für die Objektebene, aber nicht für die Abbildung der Öffnungsblende durchgeführt wird. Dieser Öffnungsfehler der Pupillen, auch Pupillenaberration genannt, ist die Hauptursache der Verzeichnung. Nach Abb. 4.166 ist

$$\tan \hat{\sigma}_{p1} = -\frac{\hat{y}_1}{\hat{p}_1}, \quad \tan \hat{\sigma}_{p2} = -\frac{\hat{y}_2}{\hat{p}_2}, \tag{4.265}$$

$$\tan \hat{\sigma}'_{p1} = -\frac{\hat{y}'_1}{\hat{p}'_1}, \quad \tan \hat{\sigma}'_{p2} = -\frac{\hat{y}'_2}{\hat{p}'_2}. \tag{4.266}$$

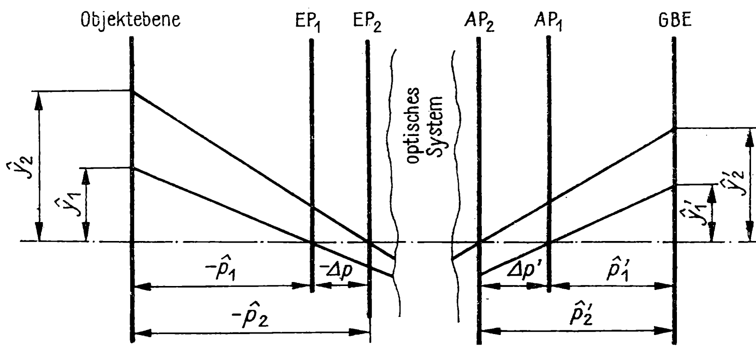


Abb. 4.166
Zur Ableitung der Tangensbedingung

Daraus folgt für die Abbildungsmaßstäbe

$$\hat{\beta}'_1 = \frac{\hat{y}'_1}{\hat{y}_1} = \frac{\hat{p}'_1 \tan \hat{\sigma}'_{p1}}{\hat{p}_1 \tan \hat{\sigma}_{p1}} \quad \text{und} \quad \hat{\beta}'_2 = \frac{\hat{y}'_2}{\hat{y}_2} = \frac{\hat{p}'_2 \tan \hat{\sigma}'_{p2}}{\hat{p}_2 \tan \hat{\sigma}_{p2}}. \tag{4.267}$$

Die Verzeichnung verschwindet, wenn der Abbildungsmaßstab unabhängig von der Objektgröße ist. Wir fordern also

$$\hat{\beta}'_1 = \hat{\beta}'_2. \tag{4.268}$$

Wir setzen Gl. (4.267) in Gl. (4.268) ein und erhalten

$$\frac{\tan \hat{\sigma}'_{p1}}{\tan \hat{\sigma}_{p1}} = \frac{\hat{p}_1 \hat{p}'_2 \tan \hat{\sigma}'_{p2}}{\hat{p}_2 \hat{p}'_1 \tan \hat{\sigma}_{p2}}. \tag{4.269}$$

Gleichung (4.269) ist die Bedingung, deren Einhaltung garantiert, daß ein optisches System verzeichnungsfrei ist. Wenn

$$\frac{\hat{p}_1 \hat{p}'_2}{\hat{p}'_1 \hat{p}_2} = 1 \tag{4.270}$$

gilt, dann geht Gl. (4.269) in

$$\frac{\tan \hat{\sigma}'_{p1}}{\tan \hat{\sigma}_{p1}} = \frac{\tan \hat{\sigma}'_{p2}}{\tan \hat{\sigma}_{p2}} \tag{4.271}$$

über. Gleichung (4.271) ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\tan \hat{\sigma}'_{p}}{\tan \hat{\sigma}_{p}} = \text{const.} \tag{4.272}$$

Gleichung (4.272) wird als Tangensbedingung bezeichnet. Sie ist z. B. erfüllt, wenn unabhängig von y

$$\hat{\sigma}'_p = \pm \hat{\sigma}_p \tag{4.273}$$

ist. Die Tangensbedingung ist ein Kriterium für die Verzeichnungsfreiheit eines optischen Systems. Sie ist jedoch kein hinreichendes Kriterium, weil außerdem Gl. (4.270) gelten muß.

Wir können die in Gl. (4.270) enthaltene Forderung für praktische Zwecke in zwei Einzelforderungen aufteilen.

— Gl. (4.270) wird eingehalten, wenn

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 \quad \text{und} \quad \hat{p}'_1 = \hat{p}'_2 \tag{4.274}$$

ist. Ein optisches System ist also verzeichnungsfrei, wenn die Eintritts- und die Austrittspupille öffnungsfehlerfrei sind und die Tangensbedingung erfüllt ist.

— Gl. (4.270) wird ebenfalls eingehalten, wenn

$$\hat{p}_1 = \pm \hat{p}'_1 \quad \text{und} \quad \hat{p}_2 = \pm \hat{p}'_2 \tag{4.275}$$

ist. Ein optisches System ist also verzeichnungsfrei, wenn für jeden Objektpunkt der Betrag der sphärischen Längsabweichung der Pupillenabbildung im Objekt- und Bildraum gleich und die Tangensbedingung erfüllt ist.

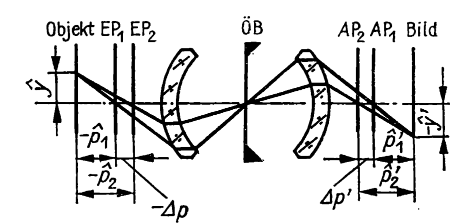


Abb. 4.167
Verzeichnungsfreies symmetrisches optisches System

Ein optisches System, das symmetrisch zur Öffnungsblende aufgebaut ist, ist für den Abbildungsmaßstab $\beta' = -1$ verzeichnungsfrei (Abb. 4.167). Durch den symmetrischen Aufbau ist Gl. (4.275) erfüllt. Wegen $\beta' = -1$ ist außerdem $\hat{\sigma}'_p = \hat{\sigma}_p$, so daß auch die Tangensbedingung erfüllt ist.

Einzellinse. Die dünne Einzellinse ohne zusätzliche Öffnungsblende führt keine Verzeichnung ein. Die Pupillen sind öffnungsfehlerfrei, und der Hauptstrahl geht unabgelenkt durch die Mitte der Linse. Auch optische Systeme aus eng beieinander stehenden dünnen Linsen, bei denen eine Linsenfassung als Öffnungsblende wirkt, sind praktisch verzeichnungsfrei.

Die dünne Einzellinse mit zusätzlicher Blende bildet stets mit Verzeichnung ab. Dabei gilt:

> Die dünne Einzellinse mit Vorderblende hat tonnenförmige Verzeichnung; die dünne Einzellinse mit Hinterblende hat kissenförmige Verzeichnung.

Zwei Beispiele enthalten die Abb. 4.168a und b.

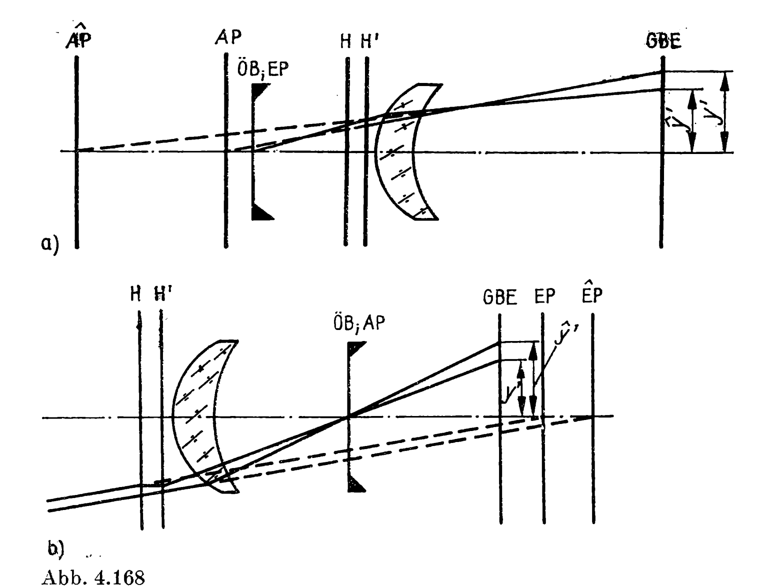


Abb. 4.168
a) Tonnenförmige Verzeichnung bei einer Vorderblende,
b) Kissenförmige Verzeichnung bei einer Hinterblende

4.4. Wellenoptisch abbildende Funktionselemente

4.4.1. Intensität in der Bildebene

Begriff „wellenoptisch abbildend“. Im Abschnitt 4.1. wurde die optische Abbildung mit dem Strahlenmodell behandelt. Mit diesem erfassen wir jedoch nur diejenigen geometrischen Eigenschaften des Bildes, die mit der durch Brechungen und Reflexionen möglichen Konzentration von Lichtstrahlen in begrenzten Gebieten des Bildraumes zusammenhängen. Die bei der Ausbreitung wesentliche Seite des Lichtes ist sein Wellencharakter. Es ist demnach zu erwarten, daß die optische Abbildung mit dem Wellenmodell zu behandeln ist und sich dabei gegenüber der geometrisch-

optischen Abbildung weitere Gesichtspunkte ergeben. Zwei Problemkreise müssen wellenoptisch behandelt werden,

— der Einfluß der Beugung des Lichtes und
— die Berechnung der Intensitätsverteilung im Bildraum.

Es gibt auch spezielle abbildende Funktionselemente, bei denen das Bild durch Beugung entsteht ohne eine wesentliche Mitwirkung von Reflexionen und Brechungen.

> Ein wellenoptisch abbildendes Funktionselement erzeugt ein optisches Bild, dessen Eigenschaften und Entstehung nur mit dem Wellenmodell des Lichtes beschrieben werden können.

Intensität in der Gaußschen Bildebene. Wir gehen von der konkreten Abbildung eines Objektpunktes aus. Eine asphärische Linse, wie sie im Abschnitt 4.1.9. (Abb. 4.61 und Abb. 4.62) berechnet wurde, bildet den unendlich fernen Achsenpunkt geometrisch-optisch in den Brennpunkt ab. Wir setzen vor die Linse eine Vorderblende, die Öffnungsblende und Eintrittspupille sein soll (Abb. 4.169). Objektseitig

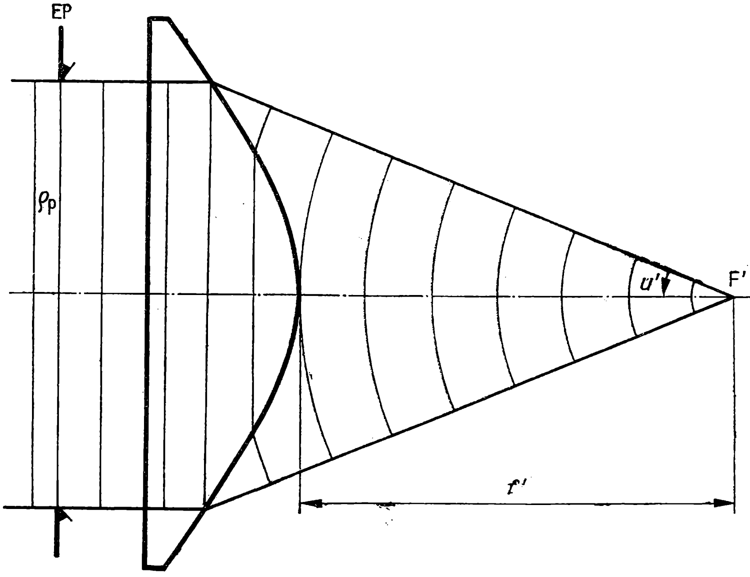


Abb. 4.169
Asphärische Linse mit Vorderblende

geht vom unendlich fernen Achsenpunkt eine ebene Welle aus. Ohne Beugung würde die Linse die ebene Welle in eine Kugelwelle umwandeln, die im Brennpunkt konvergiert. Es ist aber ausgeschlossen, daß die Energie der Welle in einem Punkt konzentriert wird. Die geometrisch-optische Behandlung kann in unserem Beispiel keine ausreichende Näherung darstellen.

In Wirklichkeit wird das Licht an der Öffnungsblende gebeugt, und die Linse

bildet das Beugungsbild ab, indem die gebeugten Bündel zusätzlich gebrochen werden. Das direkte Licht hat die größte Intensität, so daß die maximale Intensität im Brennpunkt vorhanden ist. In der Gaußschen Bildebene besteht das Bild aus hellen und dunklen Ringen, für die nach Gl. (2.300)

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 \tag{4.276}$$

gilt. Nach Gl. (2.297) ist

$$v = \frac{2\pi\varrho_P r'}{\lambda f'}. \tag{4.277}$$

Der erste dunkle Ring hat den Radius (Tab. 2.21, S.147)

$$r' = 0{,}61\,\frac{\lambda f'}{\varrho_P}. \tag{4.278}$$

Als nächstes nehmen wir an, daß die Öffnungsblende der asphärischen Linse eine Hinterblende ist (Abb. 4.170). Die vom Objektpunkt ausgehende ebene Welle wird durch die Linse in eine konvergente Welle umgewandelt, und außerdem tritt zunächst

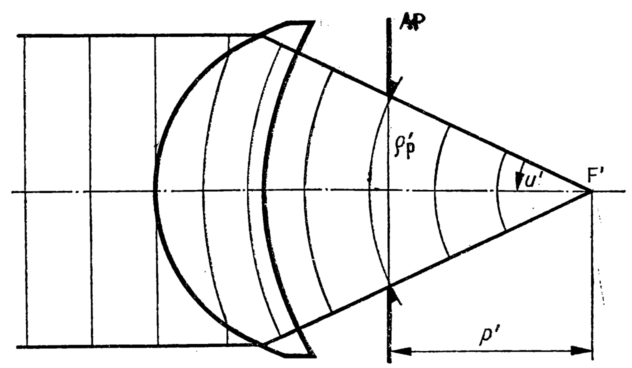


Abb. 4.170
Asphärische Linse mit Hinterblende

die Beugung an der Linsenfassung auf. Das an der Linsenfassung gebeugte Licht wird an der Öffnungsblende, die zugleich Austrittspupille ist, nochmals gebeugt. Diese zweite Beugungserscheinung ist wegen des konvergenten Lichtes vom Fresnelschen Typ.

Die genaue Untersuchung der Intensitätsverteilung für die Linse mit Hinterblende ist kompliziert. Bei den meisten praktisch bedeutenden Aufgaben erhalten wir eine ausreichende Näherung für die Lichtverteilung im Bildraum, wenn wir folgende Annahmen treffen:

— Als beugende Öffnung wird die Austrittspupille angenommen.
— Die Lichtamplitude in der Austrittspupille wird nicht durch vorangehende beugende Öffnungen beeinflußt.

Für große Objektweiten, kleine Öffnungsverhältnisse bzw. Öffnungswinkel, für kleine Felder und für Aufpunkte in der Umgebung des Gaußschen Bildpunktes läßt sich die Intensität mit der Annahme berechnen, daß an der Austrittspupille Fraunhofersche Beugung auftritt. Diese überlagert sich der geometrisch-optischen Abbildung. Das heißt, die Lichtintensität ist wie bei der Linse mit Vorderblende zu berechnen, aber statt f' ist p', und statt ϱ_p ist ϱ_p' in die Gl. (4.277) einzusetzen.

Wir erhalten

$$v = \frac{2\pi\varrho_p' r'}{\lambda p'} \tag{4.279}$$

und für den Radius der ersten Nullstelle der Intensität

$$r' = 0{,}61\,\frac{\lambda p'}{\varrho_p'}. \tag{4.280}$$

Auflösung zweier inkohärent strahlender Punkte. Bei einer Linse mit zwei asphärischen Flächen lassen sich diese so berechnen, daß zwei Punkte, die in der Umgebung der optischen Achse liegen, geometrisch-optisch punktförmig abgebildet werden können. Durch die Beugung entstehen aber in der Gaußschen Bildebene zwei ringförmige Intensitätsverteilungen, die sich bei inkohärent strahlenden Objektpunkten addieren (Abb. 4.171).

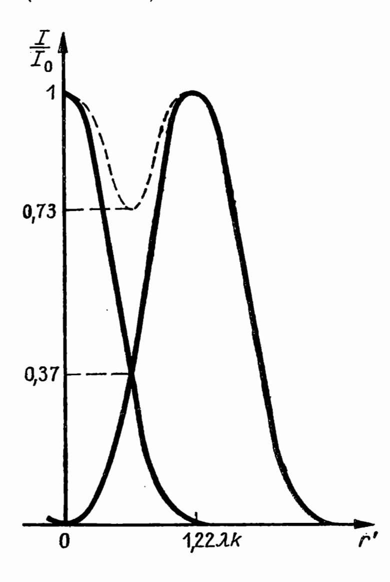


Abb. 4.171
Addition der Beugungsintensitäten (zwei inkohärent strahlende Punkte)

Die beiden Hauptmaxima und das dazwischenliegende Minimum müssen einen vom Empfänger abhängigen Mindestabstand haben, wenn die Intensitätsverteilung als zu zwei Objektpunkten gehörend registriert werden soll. Unterhalb eines bestimmten Abstandes werden die Objektpunkte also nur wie ein Objektpunkt wahrgenommen, d. h., sie werden nicht aufgelöst. Im allgemeinen nimmt man an, daß

zwei inkohärent strahlende Objektpunkte bei einer geometrisch-optisch punktförmigen Abbildung aufgelöst werden, wenn die erste Nullstelle des Beugungsbildes des einen Punktes mit dem Hauptmaximum des anderen Punktes höchstens zusammenfällt. Daraus ergibt sich für den bildseitig auflösbaren Punktabstand

$$r' = 0{,}61\,\frac{\lambda p'}{\varrho_p'}. \tag{4.281}$$

Die abgeleiteten Beziehungen sind auch auf die Abbildung mit optischen Systemen anwendbar. Bei Fotoobjektiven ist oft mit ausreichender Genauigkeit $p' \approx f'$, $\varrho_p' \approx \varrho_p$ und damit

$$\frac{p'}{\varrho_p'} = 2k$$

zu setzen (k = Blendenzahl). Gleichung (4.281) geht über in

$$r' = 1{,}22\lambda k. \tag{4.282}$$

Für $\lambda = 500$ nm ist in der Abb. (4.172) r' als Funktion von k dargestellt. Als Faustregel gilt $r'/\mu\text{m} = 0{,}61k$. Es sei nochmals hervorgehoben, daß die Anwendbarkeit von Gl. (4.282) neben der Gültigkeit der eingangs angegebenen Näherungen ein geometrisch-optisch punktförmig abbildendes optisches System voraussetzt. Das ist bei Fotoobjektiven im allgemeinen nur der Fall, wenn sie stark abgeblendet werden.

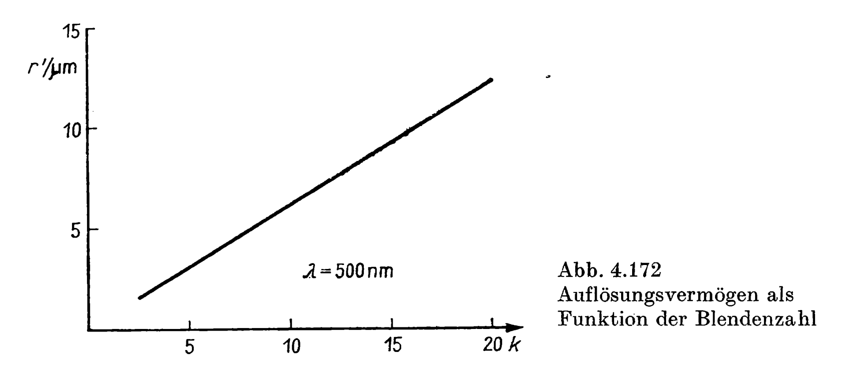


Abb. 4.172
Auflösungsvermögen als Funktion der Blendenzahl

Das reale Auflösungsvermögen geht also mit wachsender Blendenzahl in das nach Gl. (4.282) berechnete über. Als Kriterium für die Auflösung könnte die Forderung nach den Überschneiden der beiden Intensitätskurven bei $I/I_0 = 0{,}37$ verwendet werden.

4.4.2. Intensität in Achsenpunkten

Durch die Beugung an der Öffnungsblende wird das Licht so abgelenkt, daß es theoretisch den gesamten Bildraum ausfüllt. Praktisch ist jedoch die Lichtenergie vorwiegend in einem gewissen Gebiet um den Gaußschen Bildpunkt konzentriert. In Auffangebenen, die parallel zur Gaußschen Bildebene stehen, ergibt sich bei der

Abbildung von Achsenpunkten eine zur Achse konzentrische Lichtverteilung, die aber von derjenigen in der Gaußschen Bildebene verschieden ist. Abbildung 4.173 gibt einen Eindruck von der Lichtverteilung im Bildraum eines aberrationsfreien optischen Systems. (Optische Systeme, die geometrisch-optisch punktförmig abbilden, werden auch als beugungsbegrenzte optische Systeme bezeichnet.) Von besonderem Interesse ist neben der Intensitätsverteilung in achssenkrechten Ebenen die Intensität in deren Achsenpunkten, also die Lichtverteilung längs der optischen Achse. Wir berechnen diese unter Berücksichtigung der im Abschnitt 4.4.1. angegebenen Näherungen.

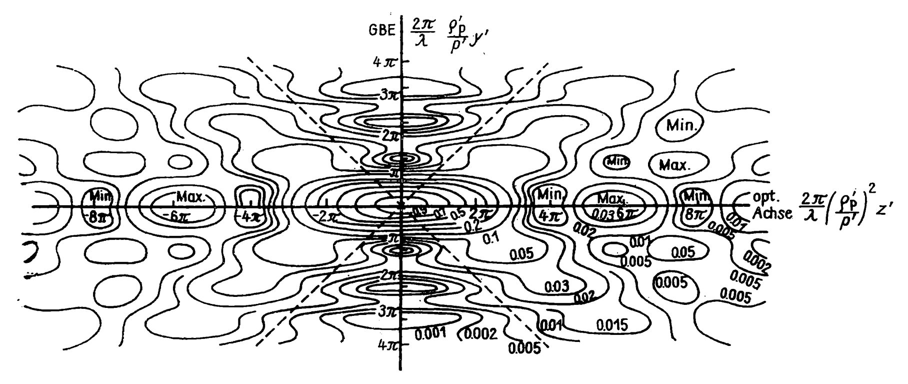


Abb. 4.173
Intensität im Bildraum eines beugungsbegrenzten Systems

Berechnung der Phasendifferenzen. Für die Interferenz des Lichts im Bildraum sind die Phasendifferenzen bestimmend, die die Elementarwellen haben, die von den Punkten einer Wellenfläche ausgehen und sich im Aufpunkt überlagern. In der Austrittspupille liegt eine Kugelwelle vor. Wir verwenden die Wellenfläche als Bezugsfläche, die von der Austrittspupille tangiert wird (Abb. 4.174). Die Phasendifferenzen werden gegenüber der Phase des Lichts gemessen, das sich längs der optischen Achse ausbreitet. Um den Aufpunkt schlagen wir eine Kugel, die ebenfalls von der Austrittspupille tangiert werden soll.

Von P_0' bis zum Kreisbogen $\widehat{A_0'B}$ hat die von P_0' ausgehende Elementarwelle denselben Lichtweg wie die von Q ausgehende Welle bis zum Gaußschen Bildpunkt A_0'. Die optische Wegdifferenz im Punkt A′ zwischen der längs der optischen Achse und der längs $P_0'A'$ laufenden Welle beträgt demnach

$$\Delta L = \overline{BA'} - \overline{A_0'A'}.$$

Bei kleinem b' sind

— der Kreisbogen $\widehat{A_0'B}$ durch seine Tangente in B,

— der Winkel $\hat{\sigma}$ durch $\hat{\sigma}_0'$ und

— der Achsenabschnitt der Tangente durch b' ersetzbar.

Die Strecke $\overline{\mathrm{BA}'}$ kann näherungsweise aus

$$\overline{\mathrm{BA}'} = b' \cos \hat{\sigma}_0'$$

berechnet werden. Damit gilt

$$\Delta L = b'(\cos \hat{\sigma}_0' - 1). \qquad (4.283)$$

Wir leiten zwei Hilfsformeln ab. Nach Abb. 4.174 gilt

$$g = p'(1 - \cos \hat{\sigma}_0'). \qquad (4.284)$$

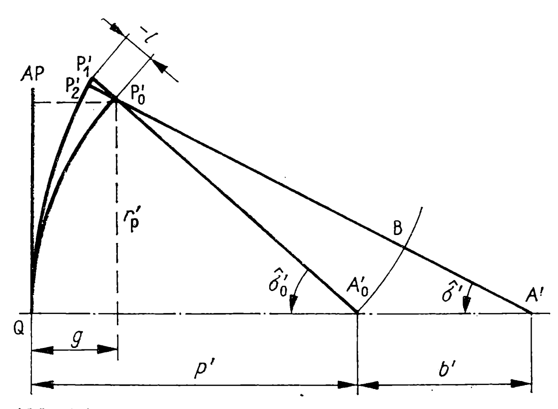


Abb. 4.174
Zur Berechnung der Phasendifferenzen für einen Punkt der optischen Achse

Weiter ist

$$p'^2 = (p' - g)^2 + r_\mathrm{p}'^2.$$

Diese quadratische Gleichung für g ergibt die Lösung

$$g = p' - p' \sqrt{1 - \frac{r_\mathrm{p}'^2}{p'^2}}.$$

Für nicht zu große Öffnungswinkel ist $r_\mathrm{p}'^2 \ll p'^2$. Die Wurzel entwickeln wir in eine binomische Reihe, so daß wir

$$g = \frac{r_\mathrm{p}'^2}{2p'} \qquad (4.285)$$

erhalten.

Mit Gl. (4.284) folgt aus Gl. (4.283)

$$\Delta L = -\frac{gb'}{p'} \qquad (4.286)$$

oder mit Gl. (4.285)

$$\Delta L = -\frac{b' r_p'^2}{2p'^2}. \tag{4.287}$$

Die Phasendifferenz beträgt im Punkt A′

$$\delta = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{b' r_p'^2}{p'^2}. \tag{4.288}$$

Berechnung der normierten Intensität. Die Phasendifferenz nach Gl. (4.288) führen wir in die mathematische Fassung des Huygensschen Prinzips (2.264) ein.

Dabei ist zu beachten, daß im Bildpunkt eine Kugelwelle konvergiert. Die komplexe Amplitude ist dann

$$a = \frac{A_0}{r} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta}$$

zu schreiben ($r = \overline{P_0' A_0'}$), weil ihr Betrag bei der Kugelwelle wie $1/r$ abnimmt. Wegen der geringen Unterschiede von r über die Austrittspupille hinweg setzen wir jedoch den Faktor $A_0/r = A$ als konstant an. Nur unter dieser Voraussetzung ist die Gl. (2.264), die für die Beugung von ebenen Wellen abgeleitet ist, auch auf das vorliegende Problem anwendbar.

Die Lichterregung folgt aus

$$a = A \int_0^{\varrho_p'} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\pi b' r_p'^2}{\lambda p'^2}} r_p' \, \mathrm{d}r_p' \, \mathrm{d}\varphi. \tag{4.289}$$

Das Integral über $\mathrm{d}\varphi$ ergibt 2π. Mit der neuen Variablen

$$\frac{\pi b' r_p'^2}{\lambda p'^2} = x, \qquad \frac{2\pi b' r_p' \, \mathrm{d}r_p'}{\lambda p'^2} = \mathrm{d}x, \qquad \frac{\pi b' \varrho_p'^2}{\lambda p'^2} = x_m$$

geht Gl. (4.289) über in

$$a = \frac{\mathrm{j} A \lambda p'^2}{b'} \int_0^{x_m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} \, \mathrm{d}x. \tag{4.290}$$

Integration und Einsetzen der Grenzen führt auf

$$a = \frac{\mathrm{j} A \lambda p'^2}{b'} \left[\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\pi b' \varrho_p'^2}{\lambda p'^2}} - 1 \right]. \tag{4.291}$$

Im Gaußschen Bildpunkt ist $b' = 0$, und Gl. (4.289) ergibt unmittelbar

$$a_0 = A \pi \varrho_p'^2. \tag{4.292}$$

In einem Achsenpunkt beträgt die normierte Intensität

$$i = \frac{aa^*}{a_0 a_0^*} = \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 \tag{4.293}$$

mit

$$v = \frac{\pi b' \varrho_p'^2}{2\lambda p'^2}. \tag{4.294}$$

Die Funktion nach Gl. (4.293) haben wir bereits diskutiert (Abb. 2.96). Für $v = \pm\pi$, d. h. für

$$b' = \pm \frac{2\lambda p'^2}{\varrho_p'^2},$$

liegt die erste Nullstelle vor. Bei $\lambda = 500$ nm, $p' = 100$ mm und $\varrho_p' = 12{,}5$ mm wird beispielsweise $b' = \pm 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ mm.

Wellenoptische Abbildungstiefe. Vom geometrisch-optischen Bildpunkt aus nimmt die Intensität längs der Achse nach Gl. (4.293) ab. Es ist üblich, einen 20%igen Lichtabfall als tragbar anzusehen. Die Auffangebene kann also nur mit einer daraus resultierenden Unsicherheit in die Gaußsche Bildebene gebracht werden. Der achsparallele Bereich, in dem die normierte Intensität auf 0,8 abnimmt, ist die wellenoptische Abbildungstiefe.

Bei der Anwendung auf Fotoobjektive führen wir die Blendenzahl $k = p'/(2\varrho_p')$ ein.

Damit geht Gl. (4.294) in

$$v = \frac{\pi b'}{8\lambda k^2} \tag{4.295}$$

über. Wir fordern nun

$$\left(\frac{\sin v}{v}\right)^2 \geqq 0{,}8. \tag{4.296}$$

Die numerische Lösung von Gl. (4.296) ergibt mit ausreichender Genauigkeit

$$-0{,}8 \leqq v \leqq 0{,}8. \tag{4.297}$$

Für die Abbildungstiefe gelten die Gleichheitszeichen, und es ist nach Gl. (4.295)

$$b' = \pm \frac{6{,}4\lambda k^2}{\pi} = \pm 2{,}038\lambda k^2. \tag{4.298}$$

Wir setzen angenähert

$$b' = \pm 2\lambda k^2. \tag{4.299}$$

Gl. (4.299) gibt die Grenzen der wellenoptischen Abbildungstiefe eines Fotoobjektivs an, wenn ein 20%iger Lichtabfall zugelassen wird. Die Abb. 4.175 enthält b' als Funktion von k für $\lambda = 500$ nm.

Für ein Fotoobjektiv zeigt Abb. 4.176 die Intensitätsverteilung längs der optischen Achse.

Bei der Anwendung von Gl. (4.296) auf Mikroobjektive ist b' von der Zwischenbildebene des Mikroskops aus zu messen. Wegen der Voraussetzung $\varrho_p' \ll p'$ dürfen wir

$$\sin u' = \frac{\varrho_p'}{p'} \tag{4.300}$$

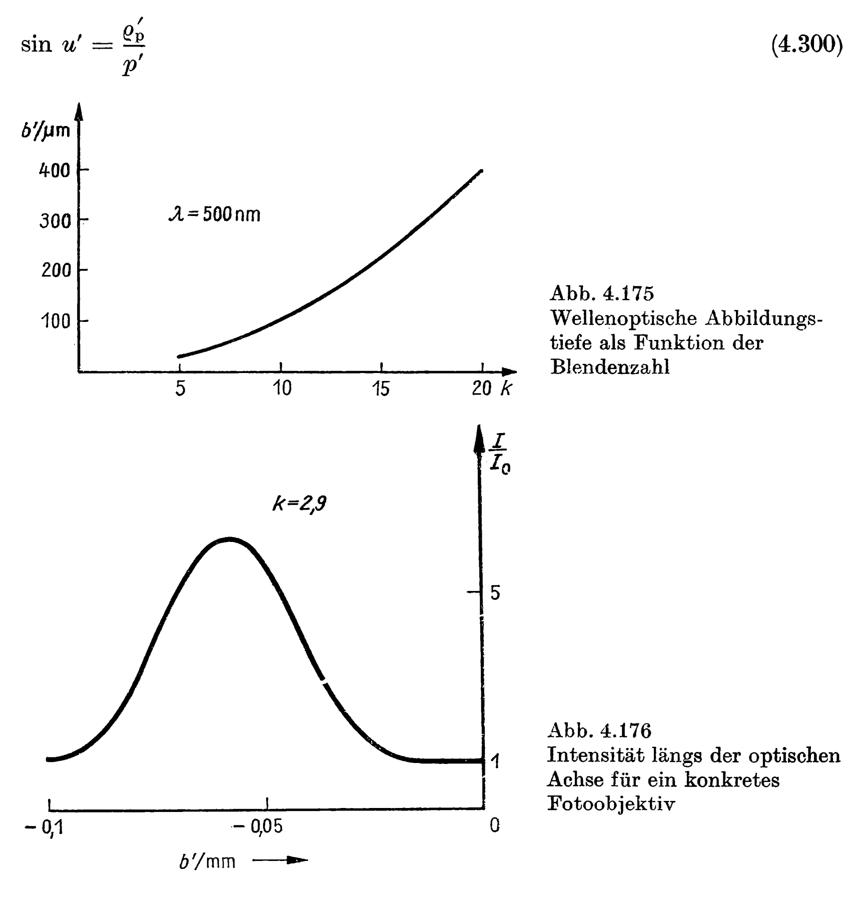


Abb. 4.175
Wellenoptische Abbildungstiefe als Funktion der Blendenzahl

Abb. 4.176
Intensität längs der optischen Achse für ein konkretes Fotoobjektiv

setzen und erhalten mit $\pi \approx 3{,}2$ für die wellenoptische Abbildungstiefe

$$b' = \pm \frac{\lambda}{2 \sin^2 u'}. \tag{4.301}$$

Nach der Sinusbedingung ist

$$\beta' \sin u' = n \sin u = A \tag{4.302}$$

(A = numerische Apertur des Mikroobjektivs). Für den Tiefenmaßstab gilt bei

einem Flächensystem analog zu Gl. (4.25) mit $f'/f = -n'/n$

$$\alpha' = \frac{n'}{n}\,\beta'^2 \approx \frac{b'}{b}.$$

Die wellenoptische Schärfentiefe beträgt mit $n' = 1$

$$b = \pm\frac{n\lambda}{2A^2}. \tag{4.303}$$

4.4.3. Wellenaberrationen

Definition. Die Lichtwegunterschiede, die zwischen einer Bezugskugel und einer Wellenfläche vorhanden sind, werden als Wellenaberrationen bezeichnet. Wellenaberrationen setzen im allgemeinen infolge der kontinuierlich über die Austrittspupille verteilten Phasendifferenzen die Intensität im Gaußschen Bildpunkt herab. Außerdem ist die maximale Intensität nicht im Gaußschen Bildpunkt vorhanden.

Die exakte Definition der Wellenaberration lautet:

> Die längs der Normalen zur Bezugskugel um den Gaußschen Bildpunkt gemessene Entfernung einer Wellenfläche von der Bezugskugel um den Aufpunkt wird als Wellenaberration l bezeichnet.

Im Falle der geometrisch-optisch punktförmigen Abbildung ist die Wellenfläche eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt im Gaußschen Bildpunkt, so daß sie mit der Bezugskugel um den Gaußschen Bildpunkt zusammenfällt. In der Abb. 4.174 ist deshalb die Wellenaberration durch die Strecke $\overline{\mathrm{P}_0'\mathrm{P}_1'}$ gegeben. Wegen der vorausgesetzten Näherungen darf

$$\overline{\mathrm{P}_0'\mathrm{P}_1'} \approx \overline{\mathrm{P}_0'\mathrm{P}_2'} \tag{4.304}$$

gesetzt werden. Nach Abb. 4.174 gilt

$$\overline{\mathrm{P}_2'\mathrm{P}_0'} = \overline{\mathrm{P}_2'\mathrm{A}'} - \overline{\mathrm{P}_0'\mathrm{A}'}$$

mit

$$\overline{\mathrm{P}_2'\mathrm{A}'} = \overline{\mathrm{QA}'} \quad \text{und}$$

$$\overline{\mathrm{P}_0'\mathrm{A}'} = \overline{\mathrm{QA}_0'} + \overline{\mathrm{BA}'}.$$

Damit ist

$$\overline{\mathrm{P}_2'\mathrm{P}_0'} = \overline{\mathrm{QA}'} - \overline{\mathrm{QA}_0'} - \overline{\mathrm{BA}'},$$

also wegen

$$\overline{\mathrm{QA}'} = p' + b', \quad \overline{\mathrm{QA}_0'} = p' \quad \text{und} \quad \overline{\mathrm{BA}'} = b'\cos\delta_0' = b' - \frac{b'g}{p'}$$

schließlich

$$\overline{\mathrm{P}_2'\mathrm{P}_0'} = \frac{gb'}{p'}.$$

Die Wellenaberration $l = \overline{P_0' P_2'}$ beträgt

$$l = -\frac{gb'}{p'}. \tag{4.305}$$

Damit ist für die geometrisch-optisch punktförmige Abbildung bestätigt, daß die Wellenaberrationen unmittelbar die zu den Phasendifferenzen führenden Lichtwegdifferenzen darstellen.

Wirkung der Abbildungsfehler. Bisher setzten wir geometrisch-optisch punktförmige Abbildungen voraus. Sie werden von optischen Systemen realisiert, die frei von Abbildungsfehlern sind. Aber auch optische Systeme, die nur Bildfeldwölbung und Verzeichnung einführen, bilden geometrisch-optisch punktförmig ab.

Durch die Bildfeldwölbung rückt der Bildpunkt aus der Gaußschen Bildebene heraus, in ihm konvergiert eine Kugelwelle. Die Maxima der Intensität liegen auf der gewölbten Bildschale.

Durch die Verzeichnung verschiebt sich der Bildpunkt innerhalb der Gaußschen Bildebene. Im verschobenen Bildpunkt konvergiert eine Kugelwelle, so daß die Intensitätsmaxima nur verschoben sind.

Der Öffnungsfehler, die Koma und der Astigmatismus erzeugen in der Gaußschen Bildebene Zerstreuungsfiguren. Die Wellenflächen, die aus einem optischen System mit diesen Abbildungsfehlern austreten, sind keine Kugelflächen. Das wirkt sich auf die Lichtwege zu den einzelnen Punkten des Bildraums und damit auf die Phasendifferenzen in diesen aus.

Wir erläutern die Verhältnisse am Beispiel des Öffnungsfehlers genauer. Im Gaußschen Bildpunkt würde eine Kugelwelle die normierte Intensität Eins ergeben. Durch die asphärische Form der Wellenfläche haben die von den einzelnen Punkten der Austrittspupille ausgehenden Elementarwellen zusätzliche Lichtwege zurückzulegen, wodurch Phasendifferenzen entstehen. Da diese Phasendifferenz eine stetige Funktion der Durchstoßkoordinaten in der Austrittspupille ist, muß die Intensität im Gaußschen Bildpunkt herabgesetzt werden. Das Maximum der Intensität liegt außerhalb des Gaußschen Bildpunktes.

Die zu den Phasendifferenzen führenden Lichtwegunterschiede sind auch in diesem Fall die Wellenaberrationen. In der Abb. 4.177 ist nochmals die exakte Definition beim Vorliegen von Öffnungsfehler veranschaulicht.

Berechnung der Wellenaberrationen des Öffnungsfehlers. Die Wellenaberrationen, die durch Öffnungsfehler eingeführt werden, können aus der sphärischen Längsabweichung berechnet werden. Nach Abb. 4.177 hat die Tangente an die Wellenfläche im Punkt P_0' die Steigung

$$\tan(90° - \sigma') = \cot \sigma' = \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{p}'}{\mathrm{d}g}. \tag{4.306}$$

Weiter gilt

$$\cot \sigma' = \frac{\Delta s' + p' - g}{r_\mathrm{p}'}. \tag{4.307}$$

Aus den Gleichungen (4.306) und (4.307) folgt

$$\Delta s' = r'_\mathrm{p} \frac{\mathrm{d}r'_\mathrm{p}}{\mathrm{d}g} - (p' - g).$$

Diesen Ausdruck schreiben wir

$$\Delta s' = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} [r'^2_\mathrm{p} + (p' - g)^2]. \tag{4.308}$$

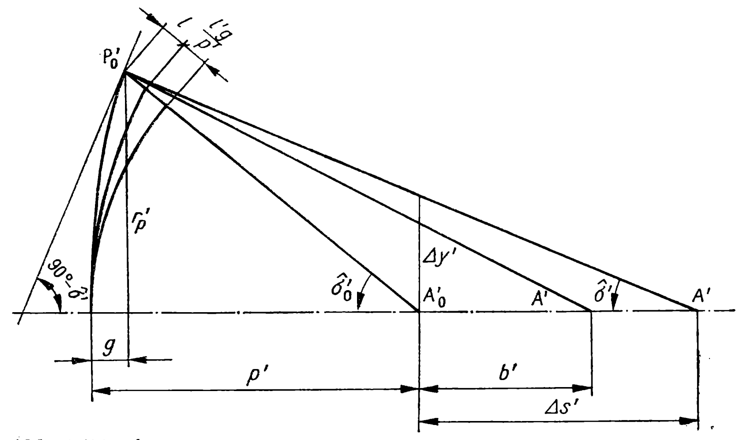


Abb. 4.177
Wellenaberrationen beim Vorliegen von Öffnungsfehler

Der Abb. 4.177 ist zu entnehmen, daß

$$(p' - g)^2 + r'^2_\mathrm{p} = \left(p' + l + \frac{b'g}{p'}\right)^2 \tag{4.309}$$

ist. Einsetzen von Gl. (4.309) in Gl. (4.308) ergibt

$$\Delta s' = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g} \left(p' + l + \frac{b'g}{p'}\right)^2. \tag{4.310}$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$\Delta s' = \left(p' + l + \frac{b'g}{p'}\right) \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}g} + \frac{b'}{p'}\right).$$

Es gilt

$$\left|l + \frac{b'g}{p'}\right| \ll |p'|,$$

also

$$\Delta s' = p' \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}g} + b'. \tag{4.311}$$

Integration über dg führt auf

$$\int_0^g \Delta s' \,\mathrm{d}g = p' \int_0^l \mathrm{d}l + b' \int_0^g \mathrm{d}g$$

bzw.

$$l = \frac{1}{p'} \int_0^g \Delta s' \,\mathrm{d}g - \frac{b'g}{p'}. \tag{4.312}$$

Statt der sphärischen Längsabweichung kann auch die sphärische Querabweichung eingesetzt werden. Mit

$$\Delta s' = \Delta y' \cdot \cot \sigma',$$

Gl. (4.285) und Gl. (4.306) folgt aus Gl. (4.312)

$$l = \frac{1}{p'} \int_0^{r_p'} \Delta y' \,\mathrm{d}r_p' - \frac{b' r_p'^2}{2p'^2}. \tag{4.313}$$

Übergang zur reduzierten Koordinate $\bar{r}_p' = r_p'/\varrho_p'$ und Anwenden der Näherung

$$A' = \sin u' \approx \frac{\varrho_p'}{p'}$$

ergibt

$$l = A' \int_0^{\bar{r}_p'} \Delta y' \,\mathrm{d}\bar{r}_p' - \frac{1}{2} A'^2 b' \bar{r}_p'^2. \tag{4.314}$$

Diese Gleichung läßt sich umkehren in

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\bar{r}_p'} = A' \,\Delta y' - A'^2 b' \bar{r}_p'.$$

Allgemein gilt bei beliebiger Lage des Bildpunktes für den Anteil der Wellenaberrationen, der von der Defokussierung unabhängig ist,

$$\sin \varphi_p' \frac{\partial l}{\partial \bar{r}_p'} + \frac{\cos \varphi_p'}{\bar{r}_p'} \frac{\partial l}{\partial \varphi_p'} = A' \,\Delta x', \tag{4.315a}$$

$$\cos \varphi_p' \frac{\partial l}{\partial \bar{r}_p'} - \frac{\sin \varphi_p'}{\bar{r}_p'} \frac{\partial l}{\partial \varphi_p'} = A' \,\Delta y'. \tag{4.315b}$$

Die Größe φ_p' ist der Zentriwinkel in der Austrittspupillenebene.

Die Berechnung der Wellenaberrationen für ein konkretes optisches System setzt die Strahldurchrechnung voraus. Die Wellenaberrationen ergeben sich nach einem der folgenden Verfahren:

1. Die Wellenflächen, die einem Objektpunkt zugeordnet sind, stellen Flächen konstanter Phase dar. Der Lichtweg vom Objektpunkt bis zu jedem Punkt einer

Wellenfläche ist also konstant. Daraus ergibt sich, daß die Wellenfläche punktweise ermittelt werden kann. Dazu ist die Differenz zu bilden aus

der optischen Weglänge der konkreten Lichtstrahlen bis zur Bezugskugel und
der optischen Weglänge des Bezugsstrahls bis zur Bezugskugel.

Als Bezugsstrahl dient bei der Abbildung von Achsenpunkten die optische Achse; bei der Abbildung außeraxialer Punkte z. B. der Hauptstrahl.

2. Aus der Strahldurchrechnung werden die Längs- oder Querabweichungen bestimmt. Die Wellenaberrationen folgen aus Gl. (4.312), Gl. (4.313) oder Gl. (4.315). Die Integrale sind numerisch entweder mit Digital- oder mit Analogrechnern auszuwerten. Es ist zweckmäßig, die Querabweichungen in Reihen zu entwickeln, die Entwicklungskoeffizienten numerisch zu berechnen und damit auch die Wellenaberrationen als Reihenentwicklung darzustellen. Günstig sind Polynome, die in der Austrittspupille orthogonal sind (z. B. Zernike-Polynome), worauf hier nicht eingegangen werden kann.

3. Für die Abbildung von Achsenpunkten ist die Polynomdarstellung der Längsabweichung

$$\Delta s' = \sum_{k=1}^{n} c_k g^k \tag{4.316}$$

möglich. Die Koeffizienten ergeben sich entweder aus der analytischen Bildfehlertheorie oder aus der Strahldurchrechnung mittels Auflösen des Gleichungssystems

$$(\Delta s')_\nu = \sum_{k=1}^{n} c_k g_\nu^k, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{4.317}$$

($\Delta s'$ kann z. B. auch als Ausgleichspolynom dargestellt werden.)

Aus Gl. (4.312) ergibt sich die Wellenaberration zu

$$l = \frac{1}{p'} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k+1} g^{k+1} - \frac{b'g}{p'}. \tag{4.318}$$

4.4.4. Definitionshelligkeit. Relative Gipfelhöhe

Punktbildfunktion. In den Abschnitten 4.4.1. bis 4.4.3. wurde die Abbildung eines Objektpunktes durch ein optisches System mit dem Wellenmodell des Lichtes untersucht. Die Beugung des Lichtes bewirkt, daß auch außerhalb des geometrisch-optischen Strahlenbündels Licht vorhanden ist.

Die normierte Intensitätsverteilung im Bildraum wird durch die Punktbildfunktion beschrieben. Es gilt:

> Die Punktbildfunktion ist die auf die Intensität im Gaußschen Bildpunkt normierte Intensität im Bildraum eines optischen Systems.

Im allgemeinen interessiert die Intensitätsverteilung in einer achssenkrechten Ebene. Deshalb wird manchmal unter der Punktbildfunktion die Intensitätsverteilung in der Auffangebene verstanden.

Ein aberrationsfreies optisches System, für das die im Abschnitt 4.1.1. formulierten Näherungen gelten, erzeugt bei der Abbildung eines Achsenpunktes in der Gaußschen Bildebene die Punktbildfunktion

$$G(r') = \left[\frac{2J_1\left(\dfrac{2\pi\varrho_p' r'}{\lambda p'}\right)}{\dfrac{2\pi\varrho_p' r'}{\lambda p'}}\right]^2. \tag{4.319}$$

In kartesischen Koordinaten gilt

$$G(x',y') = \left[\frac{2J_1\left(\dfrac{2\pi\varrho_p'}{\lambda p'}\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)}{\dfrac{2\pi\varrho_p'}{\lambda p'}\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right]^2. \tag{4.320}$$

Etwas allgemeiner läßt sich die Punktbildfunktion mit der mathematischen Fassung des Huygensschen Prinzips, wie sie im Abschnitt 2.6.4. für die ebene Struktur angegeben wurde, berechnen. Die Austrittspupille wird dabei als eine beugende Struktur betrachtet, in der im allgemeinen der Betrag und die Phase der Lichtwelle verändert werden. Die Phasenänderung kann durch Wellenaberrationen hervorgerufen sein.

Nach Gl. (2.308) gilt für die komplexe Amplitude bei der Beugung an einer ebenen Struktur

$$a = \iint\limits_{\text{Struktur}} Af(\xi, \eta) \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}[\xi(\alpha_0 - \alpha) + \eta(\beta_0 - \beta)]} \, d\xi \, d\eta. \tag{4.321}$$

Die Richtungskosinus rechnen wir in die Koordinaten der Bildebene um (siehe Abschnitt 2.6.2.):

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{x_0' - x'}{p'}, \quad \beta_0 - \beta = \frac{y_0' - y'}{p'}.$$

Die Koordinaten ξ, η in der Austrittspupille ersetzen wir durch x_p' und y_p'. Weiter führen wir reduzierte Koordinaten mittels

$$\frac{(x' - x_0')\,\varrho_p'}{\lambda p'} = \overline{x}', \quad \frac{(y' - y_0')\,\varrho_p'}{\lambda p'} = \overline{y}', \quad \frac{x_p'}{\varrho_p'} = \overline{x}_p', \quad \frac{y_p'}{\varrho_p'} = \overline{y}_p' \tag{4.322a, b; 4.323a, b}$$

ein. Die Strukturfunktion $Af(\xi, \eta)$ bezeichnen wir hier als Pupillenfunktion $P(\overline{x}_p', \overline{y}_p')$. Für diese gilt

$$P(\overline{x}_p', \overline{y}_p') = \begin{cases} A(\overline{x}_p', \overline{y}_p') \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda} l(\overline{x}_p', \overline{y}_p')} & \text{innerhalb der Pupille} \\ 0 & \text{außerhalb der Pupille.} \end{cases} \tag{4.324}$$

Insgesamt läßt sich Gl. (4.321) umschreiben in (formal kann über die gesamte Aus-

trittspupillenebene integriert werden, weil außerhalb der Öffnung $P \equiv 0$ ist)

$$a = C \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p) \cdot e^{-2\pi j(\bar{x}'_p\bar{x}' + \bar{y}'_p\bar{y}')} d\bar{x}'_p \, d\bar{y}'_p. \tag{4.325}$$

(Die Konstante C brauchen wir nicht explizit aufzuschreiben.) Die Punktbildfunktion, die als

$$G(\bar{x}', \bar{y}') = \frac{aa^*}{a_0 a_0^*}$$

definiert ist, ergibt sich zu

$$G(\bar{x}', \bar{y}') = \frac{\left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p) \cdot e^{-2\pi j(\bar{x}'_p\bar{x}' + \bar{y}'_p\bar{y}')} d\bar{x}'_p \, d\bar{y}'_p \right|^2}{\left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p) \, d\bar{x}'_p \, d\bar{y}'_p \right|^2}. \tag{4.326}$$

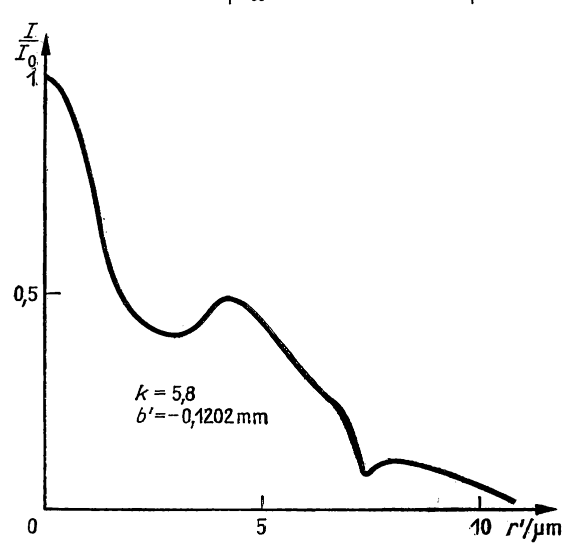


Abb. 4.178
Punktbildfunktion eines Fotoobjektivs

Daraus folgt:

> Die Punktbildfunktion ist das Absolutquadrat der normierten Fourier-Transformierten der Pupillenfunktion.

Die Berechnung der Punktbildfunktion setzt die Kenntnis der Pupillenfunktion nach Gl. (4.324) voraus. Es müssen also die Amplitudenverteilung und die Wellenaberrationen in der Austrittspupille vorgegeben sein. Die Abb. 4.178 enthält eine Punktbildfunktion für ein Fotoobjektiv.

Definitionshelligkeit. Wir beschränken uns auf die Abbildung von Achsenpunkten. Die Punktbildfunktion ist rotationssymmetrisch zur optischen Achse und hat ihr Maximum in jeder achssenkrechten Ebene im Achsenpunkt. Dieses Maximum ist als Gütekriterium geeignet. Wir führen die Definitionshelligkeit durch folgenden Satz ein:

Das Verhältnis aus dem Maximalwert der Punktbildfunktion $G(0, 0)$ für eine konkrete Welle und dem Wert der Punktbildfunktion $G_0(0, 0)$, die eine im gleichen Punkt konvergierende Kugelwelle erzeugt, ist die Definitionshelligkeit V. (Die Kugelwelle muß in der Austrittspupille den gleichen Betrag der Amplitude haben wie die konkrete Welle. G_0 ist auf die Intensität der konkreten Welle im Gaußschen Bildpunkt zu beziehen.)

Es gilt demnach

$$V = \frac{G(0, 0)}{G_0(0, 0)}. \tag{4.327}$$

Nach Gl. (4.326) ist (hier müssen wir wieder über die Austrittspupille integrieren, weil A konstant sein kann)

$$G(0, 0) = \frac{\left|\iint\limits_{AP} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p\right|^2_{b'}}{\left|\iint\limits_{AP} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p\right|^2_{b'=0}}. \tag{4.328}$$

und

$$G_0(0, 0) = \frac{\left|\iint\limits_{AP} A(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p\right|^2_{b'}}{\left|\iint\limits_{AP} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p\right|^2_{b'=0}}. \tag{4.329}$$

Aus Gl. (4.327) folgt

$$V = \frac{\left|\iint\limits_{AP} P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p\right|^2}{\left|\iint\limits_{AP} A(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p\right|^2}. \tag{4.330}$$

Es ist demnach auch folgende Definition möglich:

Das Verhältnis aus der normierten Intensität der konkreten Welle und der normierten Intensität, die eine im gleichen Punkt konvergierende Kugelwelle erzeugt, ist die Definitionshelligkeit.

Für die Abbildung von Achsenpunkten kann wegen der Rotationssymmetrie

$$d\bar{x}'_p\, d\bar{y}'_p = \frac{r'_p}{\varrho'^2_p}\, dr'_p\, d\varphi'_p \tag{4.331}$$

gesetzt werden. Durch Differenzieren von $g = r_p'^2/2p'$ ergibt sich

$$\frac{r_p'}{p'}\,\mathrm{d}r_p' = \mathrm{d}g. \tag{4.332}$$

Setzen wir noch $A(\bar{x}_p', \bar{y}_p') = \text{const}$ und beachten, daß die Integrationsgrenzen aus $0 \leqq g \leqq g_m$ folgen, dann erhalten wir aus Gl. (4.330) mit Gl. (4.324)

$$V = \left|\frac{1}{g_m}\int_0^{g_m} e^{\frac{2\pi j}{\lambda}l}\,\mathrm{d}g\right|^2. \tag{4.333}$$

Das läßt sich umformen in

$$V = \left[\frac{1}{g_m}\int_0^{g_m}\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)\mathrm{d}g\right]^2 + \left[\frac{1}{g_m}\int_0^{g_m}\sin\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)\mathrm{d}g\right]^2. \tag{4.334}$$

Die in Gl. (4.334) enthaltenen Integrale müssen im allgemeinen numerisch berechnet werden. Die Abb. 4.179 enthält die Definitionshelligkeit längs der optischen Achse eines Fotoobjektivs.

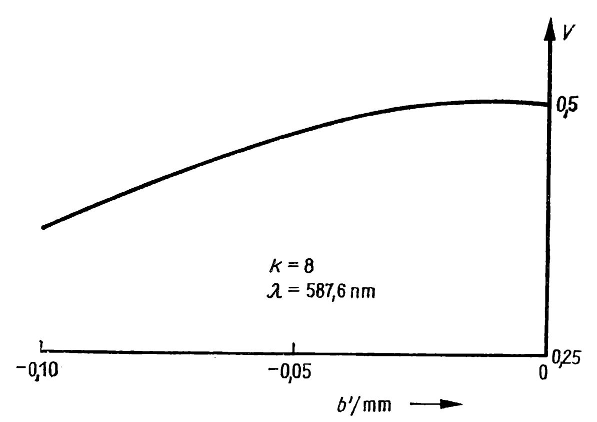


Abb. 4.179
Definitionshelligkeit auf der optischen Achse eines Fotoobjektivs

Die Definitionshelligkeit stellt ein Gütekriterium dar, mit dem aus der Gütefunktion Punktbildfunktion Gütezahlen abgeleitet werden können. Außerdem ist in bestimmten Anwendungen die Ebene maximaler Definitionshelligkeit als „beste Auffangebene" anzusehen. Das Gütekriterium Definitionshelligkeit stellt auch die Grundlage für die Bewertung optischer Systeme bei einigen Verfahren zur Synthese optischer Systeme dar („automatische Korrektionsverfahren" bzw. Optimierungsverfahren).

Entwicklung der Wellenaberrationen. Für kleine Wellenaberrationen kann die Reihenentwicklung

$$e^{\frac{2\pi j l}{\lambda}} = 1 + \frac{2\pi j}{\lambda} l - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 l^2 + \cdots$$

mit dem quadratischen Glied abgebrochen werden. Aus Gl. (4.333) folgt dann

$$V = \left| 1 + \frac{2\pi j}{\lambda} \frac{1}{g_m} \int_0^{g_m} l \, dg - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{g_m} \int_0^{g_m} l^2 \, dg \right|^2 . \tag{4.335}$$

Darin sind die Mittelwerte von l bzw. l^2 über die Pupille enthalten:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{g_m} \int_0^{g_m} l \, dg \quad \text{bzw.} \quad \langle l^2 \rangle = \frac{1}{g_m} \int_0^{g_m} l^2 \, dg . \tag{4.336a, b}$$

Ausrechnen von Gl. (4.335) ergibt

$$V = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2). \tag{4.337}$$

Die Größe

$$\langle \Delta^2 \rangle = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2 = \left\langle (l - \langle l \rangle)^2 \right\rangle$$

stellt die mittlere quadratische Deformation der Wellenfläche gegenüber der Kugel dar. Es ist

$$V = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \langle \Delta^2 \rangle . \tag{4.338}$$

Es gilt also:

> Bei kleinen Wellenaberrationen hängt die Definitionshelligkeit nur von der mittleren quadratischen Deformation der Wellenfläche ab.

Den oben erwähnten Korrektionsverfahren wird aus rechentechnischen Gründen die mittlere quadratische Deformation der Wellenfläche als Gütekriterium zugrunde gelegt.

Linienbildfunktion. Wir bilden eine Linie ab, für die folgende Voraussetzungen erfüllt sein sollen:

— Die Linie liegt in einer achssenkrechten Objektebene.

— Die einzelnen Punkte der Linie strahlen inkohärent zueinander.

— Die Punktbildfunktion ist für alle Punkte der Linie gleich. (Die Bereiche der Objektebene, für die diese Forderung mit ausreichender Genauigkeit gilt, werden Isoplanasiegebiete genannt.)

— Die Leuchtdichten in zueinander konjugierten Flächenelementen sind proportional.

Für eine parallel zum Meridionalschnitt bei x'_0 liegende Linie berechnet sich die unnormierte Linienbildfunktion L_u aus der Punktbildfunktion mittels (Abb. 4.180):

$$L_\mathrm{u}(x' - x'_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x' - x'_0, y' - y'_0)\,\mathrm{d}y'. \tag{4.339}$$

Wir führen die reduzierten Koordinaten ein und erhalten

$$L_\mathrm{u}(\bar{x}') = \frac{\lambda p'}{\varrho'_\mathrm{p}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}', \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{y}'. \tag{4.340}$$

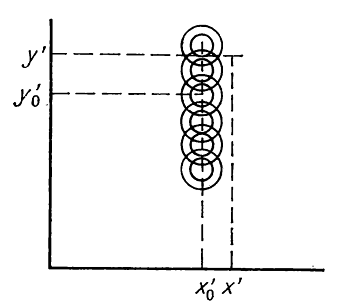


Abb. 4.180
Zur Berechnung der Linienbildfunktion

Die Linienbildfunktion normieren wir so, daß

$$L(0) = 1 \tag{4.341}$$

wird. Wegen

$$L_\mathrm{u}(0) = \frac{\lambda p'}{\varrho'_\mathrm{p}} \int_{-\infty}^{\infty} G(0, \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{y}' \tag{4.342}$$

ergibt sich für

$$L(\bar{x}') = \frac{L_\mathrm{u}(\bar{x}')}{L_\mathrm{u}(0)} \tag{4.343}$$

der Ausdruck

$$L(\bar{x}') = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}', \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{y}'}{\int_{-\infty}^{\infty} G(0, \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{y}'}. \tag{4.344}$$

Die normierte Intensität im Bild einer inkohärent strahlenden Linie wird als Linienbildfunktion bezeichnet.

Wir können die Koordinaten im Bild so mit dem Abbildungsmaßstab normieren, daß $x' = x$ und $y' = y$ wird. Die Bildleuchtdichte im Luftbild des paraxialen Bild-

ortes $B'(x_0')$ ist dann gleich der Objektleuchtdichte $B(x_0)$. Die Linienbildfunktion kann auch als

$$L(\bar{x}') = \frac{B'(x')}{B(x_0')} \quad \text{mit} \quad L(0) = \frac{B'(x_0')}{B(x_0')} = 1 \tag{4.345, 4.346}$$

definiert werden.

Für ein beugungsbegrenztes optisches System, für das die im Abschnitt 4.4.1. formulierten Näherungen gelten, folgt die Linienbildfunktion einer in der Umgebung der optischen Achse liegenden Linie aus

$$L(\bar{x}') = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2J_1\left(2\pi\sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}\right)}{2\pi\sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}}\right]^2 \mathrm{d}\bar{y}'}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2J_1(2\pi\bar{y}')}{2\pi\bar{y}'}\right]^2 \mathrm{d}\bar{y}'}. \tag{4.347}$$

Diese Funktion ist in der Abb. 4.181 grafisch dargestellt. Die Abb. 4.182 enthält Linienbildfunktionen für ein Fotoobjektiv.

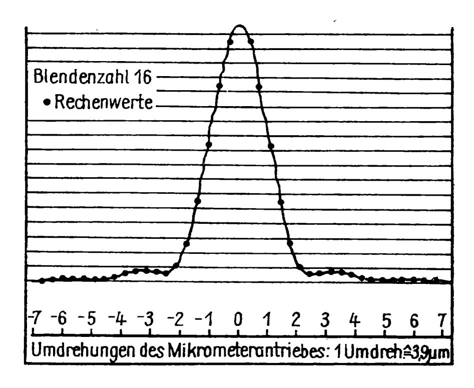


Abb. 4.181
Linienbildfunktion für ein beugungsbegrenztes optisches System

Die Leuchtdichte im Bild einer eindimensionalen Struktur, die innerhalb des isoplanatischen Gebietes liegt, läßt sich als Überlagerung von parallel zueinander verschobenen Linienbildfunktionen auffassen.

Eine Objektlinie der Breite $\mathrm{d}x_0 = \mathrm{d}x_0'$ erzeugt am Ort x' der Bildebene die Leuchtdichte im Luftbild (Abb. 4.183)

$$\mathrm{d}B'(x') = C \cdot L(\bar{x}')\, B(x_0')\, \mathrm{d}x_0'. \tag{4.348}$$

Der Faktor C hat den Betrag Eins und die Dimension (Länge)$^{-1}$. Die gesamte Leuchtdichteverteilung folgt daraus zu

$$B'(x') = C \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}')\, B(x_0')\, \mathrm{d}x_0'. \tag{4.349}$$

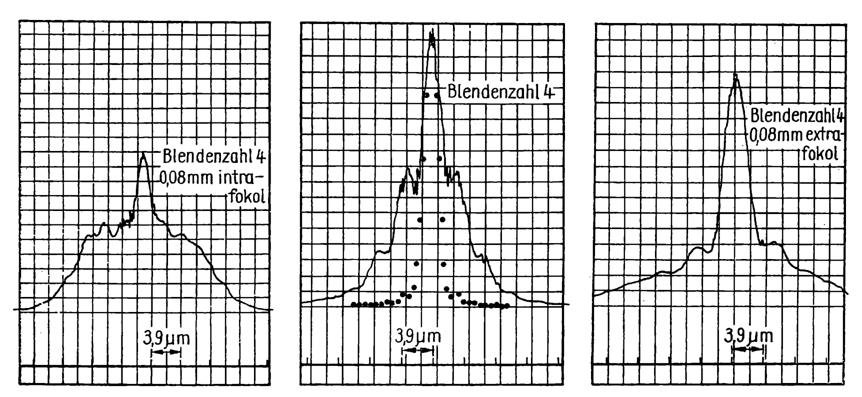


Abb. 4.182
Linienbildfunktion für ein konkretes Fotoobjektiv (*statt* „-fokol" *lies* „-fokal")

Die Integrationsgrenzen sind zulässig, wenn $L(\bar{x}')$ innerhalb eines Isoplanasiegebietes schnell genug abnimmt. Wegen Gl. (4.322a) ist

$$B'(x') = C \int_{-\infty}^{\infty} B(x_0')\, L(x' - x_0')\, \mathrm{d}x_0'. \tag{4.350}$$

Die Beleuchtungsstärke in der Bildebene beträgt

$$E'(x') = C_0 \Omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} B(x_0')\, L(x' - x_0')\, \mathrm{d}x_0'. \tag{4.351}$$

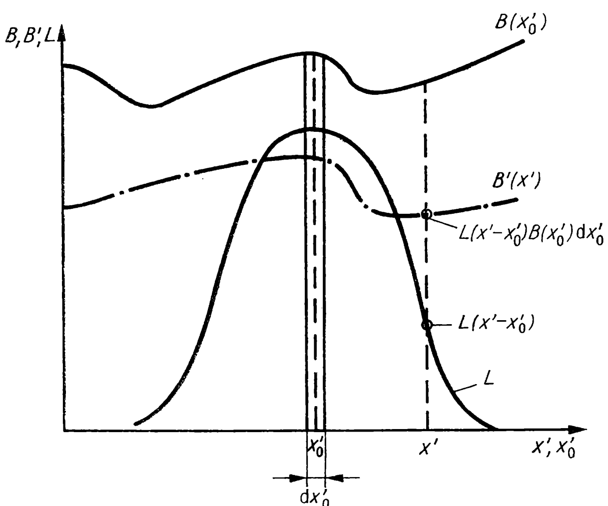


Abb. 4.183
Zur Leuchtdichte im Bild eines eindimensionalen Objektes

Die Konstante C_0 hängt im wesentlichen von der Geometrie des optischen Systems ab. Daraus folgt:

> Die Beleuchtungsstärke ergibt sich bis auf einen konstanten Faktor durch die Faltung der Objektleuchtdichte mit der Linienbildfunktion.

Relative Gipfelhöhe. Analog zur Ableitung der Definitionshelligkeit aus dem Maximalwert der Punktbildfunktion läßt sich aus der Linienbildfunktion die relative Gipfelhöhe gewinnen.

> Die relative Gipfelhöhe W ist der normierte Maximalwert der Linienbildfunktion.

Es gilt also

$$W = \frac{[L(\bar{x}')]_{\text{Max}}}{L(0)}.$$

Beachten wir die Normierungsbedingung Gl. (4.341), dann ist die relative Gipfelhöhe der Maximalwert der normierten Linienbildfunktion.

Die relative Gipfelhöhe ist ein Gütekriterium für optische Systeme. Die damit aus der Gütefunktion Linienbildfunktion berechneten Zahlenwerte stellen Kennzahlen für die Bildgüte, also Gütezahlen dar. Die Abb. 4.184 zeigt die relative Gipfelhöhe für ein Fotoobjektiv.

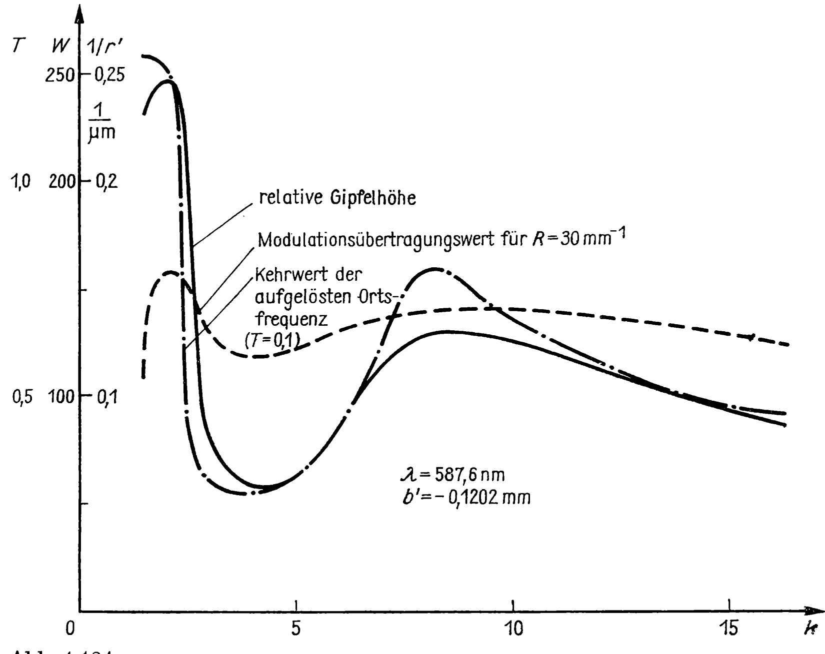


Abb. 4.184
Relative Gipfelhöhe für ein konkretes Fotoobjektiv als Funktion der Blendenzahl. (Die Bedeutung der weiteren Kurven wird in 4.4.5. erläutert.)

4.4.5. Modulationsübertragungsfunktion

Wir beschränken unsere Überlegungen auf eindimensionale Objektstrukturen, weil dafür die Gleichungen kürzer werden. Die optische Abbildung soll dieselben Forderungen erfüllen, die für die Definition der Linienbildfunktion notwendig sind.

Die Leuchtdichte im Objekt läßt sich als Überlagerung von sinusförmigen Leuchtdichteverteilungen eines bestimmten Ortsfrequenzintervalls darstellen.

Die Ortsfrequenz R ist der Kehrwert der Periodenlänge einer räumlichen Sinusverteilung, also die Anzahl der Perioden pro Längeneinheit (Abb. 4.185).

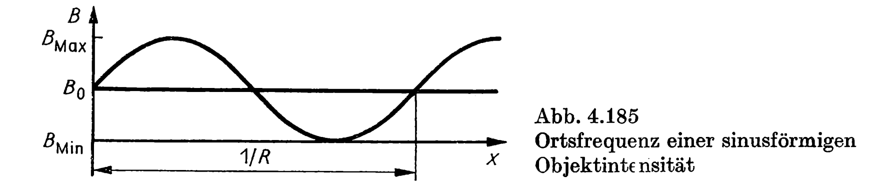


Abb. 4.185
Ortsfrequenz einer sinusförmigen Objektintensität

Da die Leuchtdichte im allgemeinen eine nichtperiodische Funktion des Ortes ist, muß sie als Fourier-Integral dargestellt werden:

$$\tilde{B}(R) = C \int_{-\infty}^{\infty} B(x_0) \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} R x_0} \, \mathrm{d}x_0. \tag{4.352}$$

$B(x_0)$ ist nur im isoplanatischen Gebiet ungleich Null anzunehmen. Wegen der Normierung der Koordinaten, wie sie für Gl. (4.345) und Gl. (4.346) vorausgesetzt wurde, ist $x_0 = x_0'$ zu setzen.

Die Leuchtdichteverteilung in der Gaußschen Bildebene ist ebenfalls als Fourier-Integral darstellbar:

$$\tilde{B}'(R) = C \int_{-\infty}^{\infty} B'(x') \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} R x'} \, \mathrm{d}x'. \tag{4.353}$$

Die Umkehrungen von Gl. (4.352) und Gl. (4.353) mittels der Fourier-Transformation lauten:

$$B(x_0') = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(R) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} R x_0'} \, \mathrm{d}R, \quad B'(x') = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}'(R) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} R x'} \, \mathrm{d}R. \qquad (4.354) \; (4.355)$$

Die Leuchtdichten nach Gl. (4.354) und Gl. (4.355) setzen wir in Gl. (4.349) ein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}'(R) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} R x'} \, \mathrm{d}R = C \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(R) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} R x_0'} L(\overline{x}') \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}x_0'. \tag{4.356}$$

Wir formen die Exponentialfunktion im Integranden des rechts stehenden Integrals um:

$$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} R x_0'} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}(x' - x_0')} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} x' R}. \tag{4.357}$$

Wir erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}'(R) \cdot e^{2\pi j R x'} \, dR = C \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(R) \cdot e^{2\pi j R x'} \cdot L(\bar{x}') \, e^{-2\pi j (x' - x_0') R} \, dR \, dx_0'.$$

Das Integral

$$C \int_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}') \cdot e^{-2\pi j (x' - x_0') R} \, dx_0' \tag{4.358}$$

ist wegen $\bar{x}' = (x' - x_0') \, \varrho_p' / \lambda p'$ die Fourier-Transformierte $\tilde{L}(R)$ der Linienbildfunktion. Gleichung (4.357) geht damit über in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}'(R) \cdot e^{2\pi j R x'} \, dR = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{B}(R) \, \tilde{L}(R) \cdot e^{2\pi j R x'} \, dR. \tag{4.359}$$

In beiden Integralen wird über den gleichen Integrationsbereich integriert, so daß die Integranden gleich sein müssen. Es ist also

$$\tilde{B}'(R) = \tilde{B}(R) \, \tilde{L}(R). \tag{4.360}$$

Das heißt:

> Die Fourier-Transformierte der Bildleuchtdichte ergibt sich als Produkt aus den Fourier-Transformierten der Objektleuchtdichte und der Linienbildfunktion.

Wir führen wieder reduzierte Koordinaten ein und erhalten aus Gl. (4.358)

$$\tilde{L}(R) = -\frac{\lambda p'}{\varrho_p'} C \int_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}') \cdot e^{-\frac{2\pi j \lambda p'}{\varrho_p'} \bar{x}' R} \, d\bar{x}'. \tag{4.361}$$

Es ist demnach zweckmäßig, auch reduzierte Ortsfrequenzen zu verwenden, indem

$$\bar{R} = \frac{\lambda p'}{\varrho_p'} R \tag{4.362}$$

gesetzt wird. Mit den Näherungen $\varrho_p'/p' \approx \sin u'$ und $p'/\varrho_p' \approx f'/\varrho_p = 2k$ (k = Blendenzahl) kann dafür auch

$$\bar{R} = \frac{\lambda}{\sin u'} R \quad \text{bzw.} \quad \bar{R} = 2\lambda k R \tag{4.363a, b}$$

geschrieben werden. Damit ergibt sich

$$\tilde{L}(\bar{R}) = -\frac{\lambda p'}{\varrho_p'} C \int_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}') \cdot e^{-2\pi j \bar{x}' \bar{R}} \, d\bar{x}'. \tag{4.364}$$

Für $\bar{R} = 0$ ist

$$\tilde{L}(0) = -\frac{\lambda p'}{\varrho'_{\mathrm{p}}} C \int_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}')\,\mathrm{d}\bar{x}'. \tag{4.365}$$

Wir definieren die normierte optische Übertragungsfunktion durch

$$D(\bar{R}) = \frac{\tilde{L}(\bar{R})}{\tilde{L}(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}') \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\bar{x}'\bar{R}}\,\mathrm{d}\bar{x}'}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\bar{x}')\,\mathrm{d}\bar{x}'}. \tag{4.366}$$

Es ist also $D(0) = 1$. Wegen dieser Normierung wird in der Literatur teilweise die Linienbildfunktion über

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}(\bar{x}')\,\mathrm{d}\bar{x}' = 1 \quad \text{mit} \quad \bar{L}(\bar{x}') = \frac{L_{\mathrm{u}}(\bar{x}')}{\int_{-\infty}^{\infty} L_{\mathrm{u}}(\bar{x}')\,\mathrm{d}\bar{x}'} \tag{4.367a, b}$$

normiert. Zwischen den unterschiedlich normierten Linienbildfunktionen besteht wegen Gl. (4.343) der Zusammenhang

$$\bar{L}(\bar{x}') = \frac{L_{\mathrm{u}}(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} L_{\mathrm{u}}(\bar{x}')\,\mathrm{d}\bar{x}'} L(\bar{x}'). \tag{4.368}$$

Damit analog zu Gl. (4.339)

$$\bar{L}(\bar{x}') = \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}', \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{y}'$$

gesetzt werden kann, muß die Punktbildfunktion $\bar{G}$ eingeführt werden, die durch

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\bar{x}', \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{x}'\,\mathrm{d}\bar{y}' = 1 \tag{4.369a}$$

normiert ist. Zwischen den unterschiedlich normierten Punktbildfunktionen besteht der Zusammenhang

$$G(\bar{x}', \bar{y}') = \bar{G}(\bar{x}', \bar{y}') \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} G(\bar{x}', \bar{y}')\,\mathrm{d}\bar{x}'\,\mathrm{d}\bar{y}'. \tag{4.369b}$$

(Bei der Definition von G wurde die Intensität in einem Punkt auf die Intensität im Gaußschen Bildpunkt normiert; bei der Definition von $\bar{G}$ wird auf die Gesamtenergie normiert.)

Für den Zusammenhang zwischen der optischen Übertragungsfunktion und der Linienbildfunktion wollen wir die Normierung nach Gl. (4.367a) übernehmen.

Es ist dann

$$D(\bar{R}) = \tilde{\bar{L}}(\bar{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}(\bar{x}') \cdot e^{-2\pi j \bar{x}' \bar{R}} \, d\bar{x}' \tag{4.370}$$

und

$$\tilde{B}'(\bar{R}) = \tilde{B}(\bar{R}) \, D(\bar{R}) . \tag{4.371}$$

Die optische Übertragungsfunktion ist die Fourier-Transformierte der normierten Linienbildfunktion.
Bei inkohärenter Beleuchtung wird die Leuchtdichte linear übertragen.

Die optische Übertragungsfunktion ist im allgemeinen komplex. Deshalb kann sie in die Form

$$D(\bar{R}) = T(\bar{R}) \cdot e^{j\Theta(\bar{R})} \tag{4.372}$$

gebracht werden.

Die reelle Funktion $T(\bar{R})$ heißt Modulationsübertragungsfunktion (MÜF); die reelle Funktion $\Theta(\bar{R})$ heißt Phasenübertragungsfunktion (PÜF).

Abbildung periodischer Objektstrukturen. Periodische Objektstrukturen werden beschrieben, indem die Leuchtdichten als Fourier-Reihen dargestellt werden. Dieselbe Aussage gilt für die Bildleuchtdichten, so daß

$$B(x_0') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \, e^{2\pi j n R x_0'}, \quad B'(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n' \, e^{2\pi j n R x'} \tag{4.373a, b}$$

gilt. Einsetzen von Gl. (4.373) in Gl. (4.349) ergibt (Faltung der Objektleuchtdichte mit der Linienbildfunktion)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n' \, e^{2\pi j n R x'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n C \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n R x_0'} \, L(\bar{x}') \, dx_0' \tag{4.374}$$

oder

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n' \, e^{2\pi j n R x'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \, e^{2\pi j n R x'} \int_{-\infty}^{\infty} C L(\bar{x}') \cdot e^{2\pi j n R (x_0' - x')} \, dx_0' . \tag{4.375}$$

Das Integral stellt nach Gl. (4.358) die optische Übertragungsfunktion dar. Es ist also

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n' \, e^{2\pi j n R x'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \, e^{2\pi j n R x'} \, D(nR) . \tag{4.376}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$B_n' = B_n D(nR) , \tag{4.377}$$

also

$$B'(x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n D(nR) \cdot e^{2\pi j n R x'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n T(nR) \cdot e^{j[2\pi n R x' + \Theta(nR)]} . \tag{4.378}$$

Sinusgitter. Ein Sinusgitter beschreiben wir durch (Abb. 4.186)

$$B(x_0') = A_0 + A_1 \cos(2\pi R x_0') \tag{4.379}$$

bzw.

$$B(x_0') = A_0 + \frac{1}{2} A_1 \left(e^{2\pi j R x_0'} + e^{-2\pi j R x_0'}\right). \tag{4.380}$$

Daraus folgt durch Vergleich mit Gl. (4.373a)

$$A_0 = B_0, \quad B_1 = \frac{1}{2} A_1, \quad B_{-1} = \frac{1}{2} A_1.$$

Für die Bildleuchtdichte gilt nach Gl. (4.378) mit $\Theta(0) = 0$

$$B'(x') = B_0 T(0) + B_1 T(R)\, e^{j[2\pi R x' + \Theta(R)]} + B_{-1} T(-R)\, e^{-j[2\pi R x' - \Theta(-R)]}. \tag{4.381}$$

Es ist

$$T(0) = 1, \quad T(-R) = T(R), \quad \Theta(-R) = -\Theta(R),$$

also

$$B'(x') = B_0 + A_1 T(R) \cdot \cos[2\pi R x' + \Theta(R)]. \tag{4.382}$$

Das im Objekt bei $x_0' = 0$ liegende Maximum ist im Bild um

$$x_\Theta' = \frac{\Theta(R)}{2\pi R} \tag{4.383}$$

örtlich phasenverschoben (Abb. 4.186).

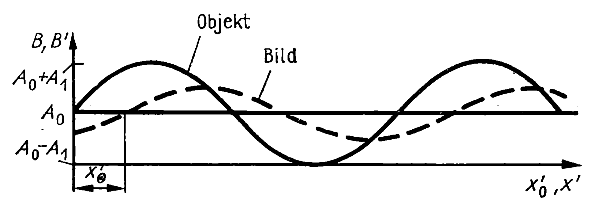


Abb. 4.186
Objekt- und Bildleuchtdichte für ein Sinusgitter

Der Objektkontrast beträgt wegen

$$B_{\text{Max}} = A_0 + A_1 \quad \text{und} \quad B_{\text{Min}} = A_0 - A_1$$

$$K = \frac{A_1}{A_0}. \tag{4.384}$$

Der Bildkontrast beträgt wegen ($A_0 = B_0$ beachten)

$$B'_{\text{Max}} = A_0 + A_1 T(R) \quad \text{und} \quad B'_{\text{Min}} = A_0 - A_1 T(R) \tag{4.385}$$

$$K' = \frac{A_1}{A_0} T(R). \tag{4.386}$$

Es gilt also

$$T(R) = \frac{K'}{K}. \tag{4.387}$$

Damit ist eine anschauliche Deutung der optischen Übertragungsfunktion gefunden worden.

> Die Modulationsübertragungsfunktion gibt bei der Abbildung eines Sinusgitters das Verhältnis aus Bild- und Objektkontrast als Funktion der Ortsfrequenz an.
> Die Phasenübertragungsfunktion beschreibt die örtliche Phasenverschiebung zwischen Bild- und Objektgitter als Funktion der Ortsfrequenz.

Die optische Übertragungsfunktion ist eine Gütefunktion, mit der die Abbildungsleistung optischer Systeme bewertet werden kann. So ist z. B. daraus mit dem Gütekriterium „Fläche unter der Modulationsübertragungsfunktion" eine Gütezahl abzuleiten. Auch das im Abschnitt 4.4.4. behandelte Gütekriterium „relative Gipfelhöhe" läßt sich durch die optische Übertragungsfunktion ausdrücken. Ohne Beweis sei angegeben, daß die relative Gipfelhöhe für die Abbildung von Achsenpunkten statt von der aus Gl. (4.352) auch aus

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} D(R)\,\mathrm{d}R \tag{4.388}$$

berechnet werden kann.

Die Abb. 4.187 enthält Modulationsübertragungsfunktionen für ein konkretes Fotoobjektiv; Abb. 4.184 (S. 346) zeigt den Verlauf des Kontrastes in Abhängigkeit von der Blendenzahl für die Ortsfrequenz $30\ \mathrm{mm}^{-1}$.

Duffieux-Integral. Nach einem Satz über Faltungsintegrale gilt für zwei Funktionen $g(\overline{x}')$ und $f(\overline{x}'_\mathrm{p})$, die durch die Fourier-Transformation verknüpft sind,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\overline{x}')|^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \overline{x}' \overline{R}_x}\,\mathrm{d}\overline{x}' = \int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{x}'_\mathrm{p})\, f^*(\overline{x}'_\mathrm{p} - \overline{R}_x)\,\mathrm{d}\overline{x}'_\mathrm{p}. \tag{4.389}$$

Die entsprechende Beziehung ist auch bei Funktionen, die von zwei Variablen abhängen, anwendbar.

Nach Gl. (4.325) sind die komplexe Amplitude $a(\overline{x}', \overline{y}')$ und die Pupillenfunktion $P(\overline{x}'_\mathrm{p}, \overline{y}'_\mathrm{p})$ Fourier-Transformierte. Es ist also

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |a(\overline{x}', \overline{y}')|^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}(\overline{x}'\overline{R}_x + \overline{y}'\overline{R}_y)}\,\mathrm{d}\overline{x}'\,\mathrm{d}\overline{y}' = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\overline{x}'_\mathrm{p}, \overline{y}'_\mathrm{p})\, P^*(\overline{x}'_\mathrm{p} - \overline{R}_x, \overline{y}'_\mathrm{p} - \overline{R}_y)\,\mathrm{d}\overline{x}'_\mathrm{p}\,\mathrm{d}\overline{y}'_\mathrm{p} \tag{4.390}$$

oder wegen Gl. (4.326) unter vorläufiger Vernachlässigung der Normierung

$$\iint_{-\infty}^{\infty} G(\overline{x}', \overline{y}') \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}(\overline{x}'\overline{R}_x + \overline{y}'\overline{R}_y)}\,\mathrm{d}\overline{x}'\,\mathrm{d}\overline{y}' = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\overline{x}'_\mathrm{p}, \overline{y}'_\mathrm{p}) \cdot P^*(\overline{x}'_\mathrm{p} - \overline{R}_x, \overline{y}'_\mathrm{p} - \overline{R}_y)\,\mathrm{d}\overline{x}'_\mathrm{p}\,\mathrm{d}\overline{y}'_\mathrm{p}. \tag{4.391}$$

So, wie im eindimensionalen Fall die optische Übertragungsfunktion als Fourier-Transformierte der Linienbildfunktion auftritt, ist sie im zweidimensionalen Fall durch das Integral der linken Seite von Gl. (4.391) gegeben. Es gilt also

$$D(\overline{R}_x, \overline{R}_y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p)\, P^*(\overline{x}'_p - \overline{R}_x, \overline{y}'_p - \overline{R}_y)\, d\overline{x}'_p, d\overline{y}'_p. \tag{4.392}$$

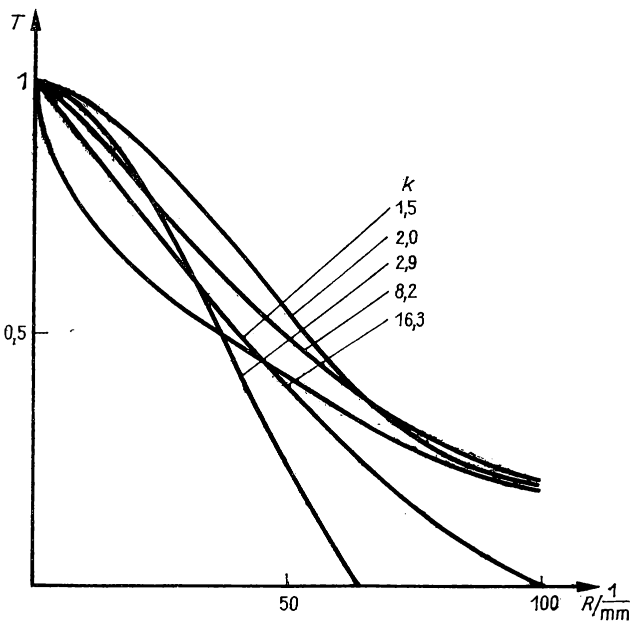


Abb. 4.187
Modulationsübertragungsfunktionen

Der Integrand wird symmetrisch, wenn wir mittels

$$\overline{x}'_p \to \overline{x}'_p + \frac{\overline{R}_x}{2}, \quad \overline{y}'_p \to \overline{y}'_p + \frac{\overline{R}_y}{2}$$

neue Variable einführen. Die Normierung erfordert, daß

$$D(0, 0) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |P(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p)|^2\, d\overline{x}'_p\, d\overline{y}'_p = 1 \tag{4.393}$$

wird. Damit ergibt sich (ÜG = Überdeckungsgebiet)

$$D(\overline{R}_x, \overline{R}_y) = \frac{\iint\limits_{\text{ÜG}} P\left(\overline{x}'_p + \frac{\overline{R}_x}{2}, \overline{y}'_p + \frac{\overline{R}_y}{2}\right) P^*\left(\overline{x}'_p - \frac{\overline{R}_x}{2}, \overline{y}'_p - \frac{\overline{R}_y}{2}\right) d\overline{x}'_p\, d\overline{y}'_p}{\iint\limits_{\text{AP}} |P(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p)|^2\, d\overline{x}'_p\, d\overline{y}'_p}. \tag{4.394}$$

Der Integrand des Zählers ist nur in dem Gebiet von Null verschieden, in dem sich die zueinander um $\bar{R}_x$ bzw. $\bar{R}_y$ verschobenen Pupillen überdecken (Abb. 4.188).

Bezeichnen wir die Wellenaberrationsdifferenzfunktion mit

$$\Delta l = l\left(\bar{x}'_{\mathrm{p}} + \frac{\bar{R}_x}{2}, \bar{y}'_{\mathrm{p}} + \frac{\bar{R}_y}{2}\right) - l\left(\bar{x}'_{\mathrm{p}} - \frac{\bar{R}_x}{2}, \bar{y}'_{\mathrm{p}} - \frac{\bar{R}_y}{2}\right) \tag{4.395}$$

und setzen wir in der Pupillenfunktion (innerhalb der Pupille)

$$P(\bar{x}'_{\mathrm{p}}, \bar{y}'_{\mathrm{p}}) = A(\bar{x}'_{\mathrm{p}}, \bar{y}'_{\mathrm{p}}) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} l(\bar{x}'_{\mathrm{p}}, \bar{y}'_{\mathrm{p}})}$$

den Betrag der Amplitude A als konstant an, dann gilt

$$D(\bar{R}_x, \bar{R}_y) = \frac{\iint\limits_{\text{ÜG}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\Delta l}\, \mathrm{d}\bar{x}'_{\mathrm{p}}\, \mathrm{d}\bar{y}'_{\mathrm{p}}}{\iint\limits_{\text{AP}} \mathrm{d}\bar{x}'_{\mathrm{p}}\, \mathrm{d}\bar{y}'_{\mathrm{p}}}. \tag{4.396}$$

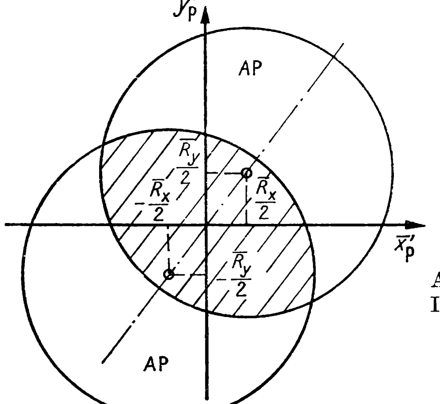


Abb. 4.188
Integrationsgebiet des Duffieux-Integrals

Für ein aberrationsfreies optisches System mit $\Delta l = 0$ folgt also die optische Übertragungsfunktion aus der Fläche des Kreiszweiecks, das das Überdeckungsgebiet der Pupillen bildet.

Betrachten wir die Verschiebung der Pupillen in einer Koordinatenrichtung, dann ergibt sich die maximal übertragbare Ortsfrequenz, die Grenzfrequenz R_{g}, aus der maximal möglichen Verschiebung

$$\bar{R}_{\mathrm{g}} = (2\bar{x}')_{\mathrm{Max}}. \tag{4.397}$$

Mit $\bar{R}_{\mathrm{g}}$ nach Gl. (4.362) bzw. Gl. (4.363) und $\bar{x}'_{\mathrm{p}} = 1$ nach Gl. (4.323a) folgt daraus

$$R_{\mathrm{g}} = \frac{2\varrho'_{\mathrm{p}}}{\lambda p'} \quad \text{bzw.} \quad R_{\mathrm{g}} = \frac{2\sin u'}{\lambda} \quad \text{oder} \quad R_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\lambda k}. \tag{4.398}$$

Bei einem beugungsbegrenzten Fotoobjektiv ist also das Auflösungsvermögen für $T(R) = 0$

$$\frac{1}{R_g} = \lambda k. \tag{4.399}$$

Für $T(R) = 0{,}1$ ist die auflösbare Ortsfrequenz bei einem konkreten Fotoobjektiv als Funktion der Blendenzahl in Abb. 4.184 (S. 346) eingetragen.

4.4.6. Inkohärente Ortsfrequenzfilterung

Wir setzen die inkohärente Abbildung des Objektes und ein optisches System mit einer einstufigen Abbildung voraus. Das optische System erzeugt in der Austrittspupille eine Verteilung der komplexen Amplitude, die durch die Pupillenfunktion Gl. (4.324) beschrieben wird.

Die begrenzte numerische Apertur, die sich im endlichen Durchmesser der Austrittspupille ausdrückt, stellt einen Eingriff in die bildseitige Lichtwelle dar. Bei einem beugungsbegrenzten optischen System mit völlig durchlässiger Austrittspupille ist die Wellenaberration $l \equiv 0$ und der Betrag der Amplitude $A = \text{const}$, so daß der Eingriff nur außerhalb der Austrittspupille vorliegt. Dadurch wird das Auflösungsvermögen festgelegt. In der Sprechweise der Übertragungstheorie können wir das

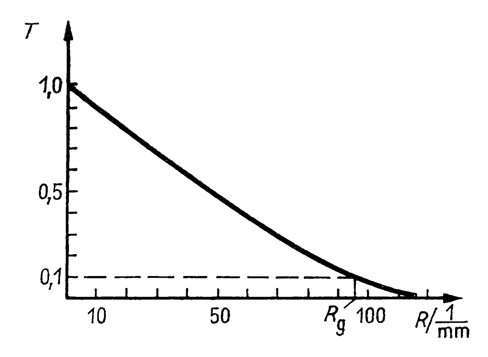


Abb. 4.189
Ortsfrequenzfilterung durch Beugungsbegrenzung

auch so ausdrücken, daß der Eingriff in der Pupillenebene das übertragene Ortsfrequenzspektrum begrenzt. Die oberhalb der Grenzfrequenz R_g liegenden Ortsfrequenzen werden durch den Eingriff herausgefiltert (Abb. 4.189). In der Abb. 4.189 wird angenommen, daß der erforderliche Mindestkontrast $K' = 0{,}1$ beträgt.

Abbildungsfehler können Wellenaberrationen $l(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)$ mit sich bringen, die eine zusätzliche Frequenzfilterung bewirken. Die Wellenaberrationen setzen im allgemeinen die Grenzfrequenz herab und ändern die Übertragungswerte der übertragenen Ortsfrequenzen (Abb. 4.190).

Es muß nun allgemein möglich sein, das übertragene Ortsfrequenzspektrum und damit das Bild mittels eines Eingriffs in der Pupillenebene zu beeinflussen.

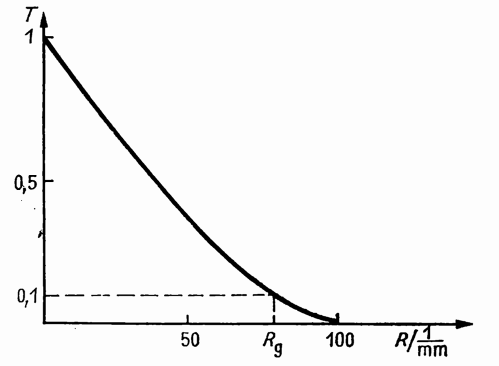


Abb. 4.190
Ortsfrequenzfilterung durch Beugung und Abbildungsfehler

Dafür gilt:

> Ortsfrequenzfilterung stellt einen Eingriff in die Lichtwelle dar, der die Pupillenfunktion so abwandelt, daß das übertragene Ortsfrequenzspektrum verändert wird. Durch die Ortsfrequenzfilterung können Objekteigenschaften im Bild unterdrückt, abgeschwächt oder hervorgehoben werden.

In den Gleichungen, die die Pupillenfunktion enthalten, wird der Einfluß eines Ortsfrequenzfilters erfaßt, wenn der Übergang

$$P(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p) \to P(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p)\, P_F(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p) \tag{4.400}$$

vorgenommen wird. Darin ist $P_F(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p)$ die Filterfunktion. Wir erläutern noch einige konkrete Beispiele.

Ringförmige Pupille. Eine Zentralabschattung in der Austrittspupille, wie sie z. B. bei Spiegelsystemen vorkommen kann, führt auf die Pupillenfunktion (Abb. 4.191)

$$P_F(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p) = \begin{cases} 0 & \text{innerhalb} \\ 1 & \text{außerhalb} \end{cases} \text{ des Abschattungsgebietes.}$$

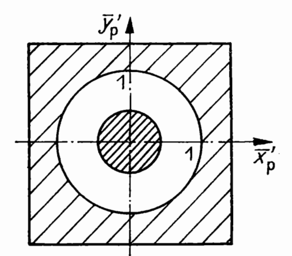


Abb. 4.191
Zentralabschattung

Die gesamte Pupillenfunktion lautet:

$$P(\overline{x}'_p, \overline{y}'_p) = \begin{cases} 0 & \text{innerhalb des Abschattungsgebietes,} \\ 1 & \text{im ringförmigen Durchlässigkeitsgebiet,} \\ 0 & \text{außerhalb der Austrittspupille.} \end{cases}$$

Die Punktbildfunktion eines beugungsbegrenzten optischen Systems nach Gl. (4.320) wird abgewandelt. Sie läßt sich aus Gl. (4.326) berechnen, indem die neue Pupillenfunktion eingesetzt wird. Das Ausrechnen des Integrals (4.326) ergibt

$$G(r') = 4\left[\frac{\varrho_{p_1}\dfrac{J_1(v_1)}{v_1} - \varrho_{p_2}\dfrac{J_1(v_2)}{v_2}}{\varrho_{p_1}^2 - \varrho_{p_2}^2}\right]^2 \tag{4.401}$$

mit

$$v_1 = \frac{2\pi\varrho_{p_1}r'}{\lambda f'} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{2\pi\varrho_{p_2}r'}{\lambda f'}. \tag{4.402}$$

Der Radius der ersten Nullstelle von $G(r')$ ist kleiner als im abschattungsfreien Fall (Abb. 4.192). In der Abbildung wurde $\varrho_{p_1} = 2\varrho_{p_2}$ angenommen, wobei für die erste Nullstelle $r'/f' = \lambda/(2\varrho_{p_1})$ gilt.

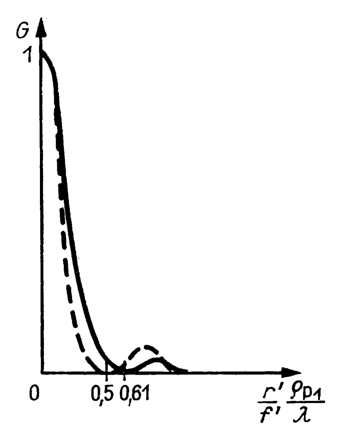


Abb. 4.192
Punktbildfunktion bei Zentralabschattung (gestrichelt)

Der Eingriff „Zentralabschattung" verbessert das Auflösungsvermögen. Dafür wird der Kontrast bei mittleren Ortsfrequenzen herabgesetzt (Abb. 4.193).

Schmidt-Platte. Die Schmidt-Platte wird bei Fernrohren mit sphärischem Hauptspiegel verwendet, um den Öffnungsfehler zu kompensieren. Sie stellt eine Glasplatte mit asphärischer Oberfläche dar (Abb. 4.194). Im geometrisch optischen Modell bricht die Schmidt-Platte das Licht so, daß die Schnittweite der inneren Strahlen verkürzt, die der äußeren Strahlen verlängert wird.

Im wellenoptischen Modell ist die Schmidt-Platte als ein Ortsfrequenzfilter aufzufassen, der die Phase des Lichtes infolge unterschiedlicher optischer Lichtwege als Funktion des Radius in der Austrittspupille ändert. Die Übertragungswerte werden so angehoben, daß nahezu die beugungsbegrenzte Modulationsübertragungsfunktion entsteht.

Apodisation. Mit einem Frequenzfilter, der den Betrag der komplexen Amplitude radial in der Austrittspupille ändert, lassen sich die Nebenmaxima der Punktbild-

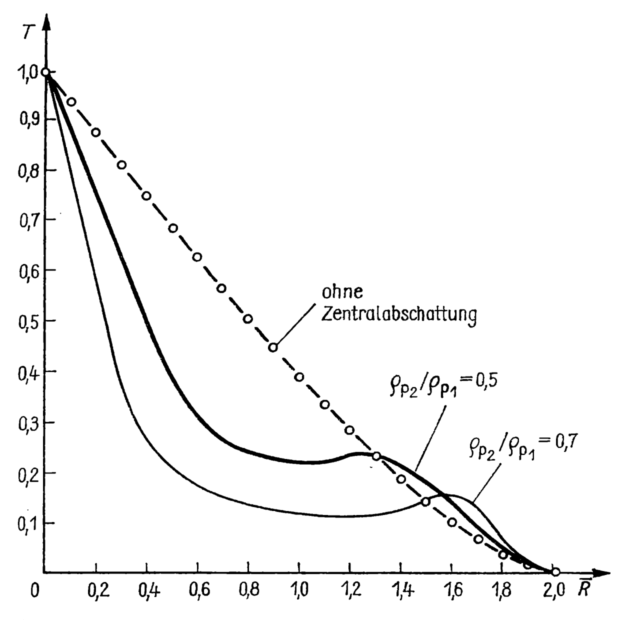


Abb. 4.193
Modulationsübertragungsfunktion bei Zentralabschattung

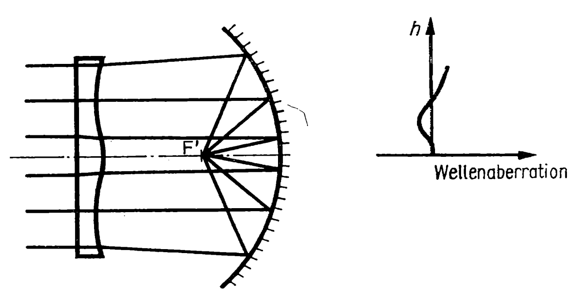


Abb. 4.194
Schmidt-Platte als Phasenfilter

funktion ebenfalls beeinflussen. Ausgezeichnet sind gaußförmige Filterfunktionen (Abb. 4.195)

$$P_F(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p) = A_0 \, e^{-m(\bar{r}'_p u')^2}, \quad 0 \leqq \bar{r}'_p \leqq 1 \tag{4.403}$$

($\bar{r}'_p = r'_p/\varrho'_p$, u' = halber bildseitiger Öffnungswinkel). Für $mu'^2 = 4$ verschwinden die Nebenmaxima der Punktbildfunktion (Abb. 4.196a). Davon kommt der Begriff „Apodisation", der „Fußlosigkeit" bedeutet. Damit kann der Kontrast im Bereich mittlerer Ortsfrequenzen geringfügig angehoben werden (Abb. 4.196b).

Abb. 4.195
Apodisationsfilter mit gaußförmiger Filterfunktion

a)

b)

Abb. 4.196
Punktbildfunktion (a) und Modulationsübertragungsfunktion (b) bei Apodisation

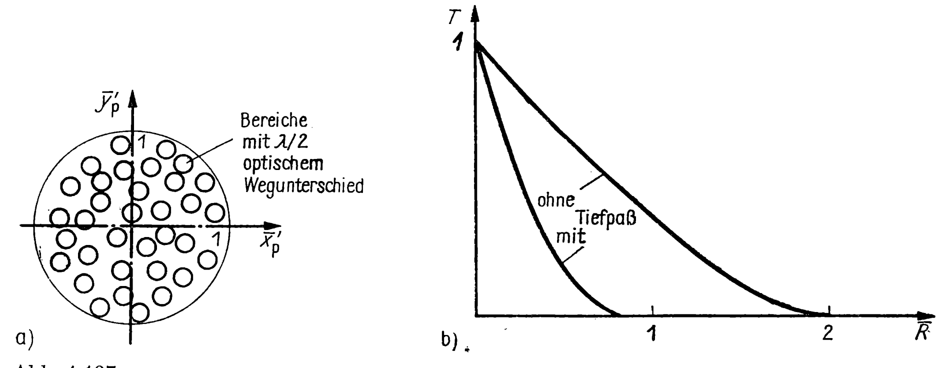


Abb. 4.197
a) Tiefpaß
b) Wirkung des Tiefpasses auf die Modulationsübertragungsfunktion

Anzahl kleiner Bereiche enthält, die
rufen, wirkt als Tiefpaß (Abb. 4.197a)
chgelassen, die hohen Ortsfrequenzen

ei der Reproduktion einer gerasterten
bb. 4.198).



filter

ches Funktionselement dar, das aus
eruht. Wir gehen zunächst von einer
punktförmige Quelle beleuchtet wird
t gebeugt. Das von der Quelle A aus
ng liegenden Achsenpunkt A′ gebeugte
verlaufenden Licht die optische Weg

$$- l_0 + l' - l_0'. \quad (4.404$$

Durch Reihenentwicklung erhalten wir unter der Voraussetzung $\varrho^2 \ll l_0^2$ und $\varrho^2 \ll l_0'^2$

$$l - l_0 = \frac{1}{2}\frac{\varrho^2}{l_0}, \quad l' - l_0' = \frac{1}{2}\frac{\varrho^2}{l_0'}. \tag{4.405}$$

Nach Gl. (4.404) gilt also

$$\Delta L = \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{1}{l_0'} - \frac{1}{l_0}\right) \quad \text{bzw.} \quad \Delta\delta = \frac{\pi\varrho^2}{\lambda}\left(\frac{1}{l_0'} - \frac{1}{l_0}\right).$$

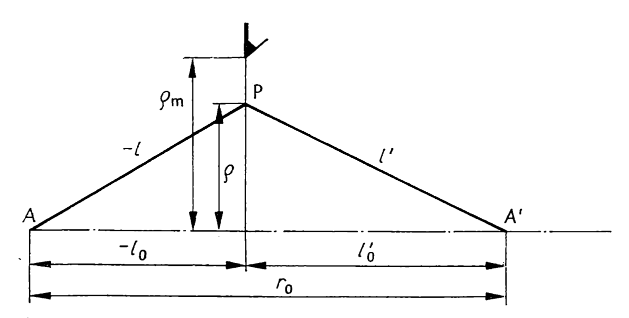


Abb. 4.199
Zur Fresnelschen Beugung an einer kreisförmigen Öffnung

Wir setzen $1/l_0' - 1/l_0 = 1/f'$, so daß

$$\Delta L = \frac{\varrho^2}{2f'} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\delta = \frac{\pi\varrho^2}{\lambda f'} \tag{4.406, 4.407}$$

wird. Die komplexe Amplitude der in A′ interferierenden Teilwellen beträgt bei angenähert konstantem Amplitudenbetrag über die Öffnung hinweg ($-l_0 + l_0' = r_0$ gesetzt)

$$a_\varrho = \frac{A}{r_0} e^{\frac{j\pi\varrho^2}{\lambda f'}}. \tag{4.408}$$

Die gesamte komplexe Amplitude erhalten wir durch Integration über die Öffnung

$$a = \frac{A}{r_0} \int_0^{\varrho_m} \int_0^{2\pi} e^{\frac{j\pi\varrho^2}{\lambda f'}} \varrho \, d\varrho \, d\varphi. \tag{4.409}$$

Die Integration über $d\varphi$ ergibt 2π. Zur Integration über $d\varrho$ führen wir die Variable

$$x = \frac{\pi\varrho^2}{\lambda f'}, \tag{4.410}$$

$$\varrho \, d\varrho = \frac{\lambda f'}{2\pi} dx, \tag{4.411}$$

$$0 \leqq \varrho \leqq \frac{\varrho_m^2}{\lambda f'} \tag{4.412}$$

ein. Die Integration ergibt

$$a = \frac{A\lambda f'}{\mathrm{j} r_0}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\pi\varrho_\mathrm{m}^2}{\lambda f'}} - 1\right). \tag{4.413}$$

Wir nehmen an, daß für den Rand der Öffnung die optische Wegdifferenz gerade ein m-faches von $\lambda/2$ ist. Nach Gl. (4.406) gilt dann $\varrho_\mathrm{m}^2 = m\lambda f'$. Wegen

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\pi} = \begin{cases} 1 & (m \text{ gerade}), \\ -1 & (m \text{ ungerade}) \end{cases} \quad \text{ist } a = \begin{cases} 0 & (m \text{ gerade}) & (4.414) \\ -\dfrac{2A\lambda f'}{\mathrm{j} r_0} & (m \text{ ungerade}). & (4.415) \end{cases}$$

Die Kreisringe, in denen sich jeweils die optische Weglänge radial um $\lambda/2$ ändert, nennen wir Fresnelsche Zonen. Wir erhalten die für zwei feste Punkte A und A′ gültige Aussage:

> Hat die Öffnung eine gerade Anzahl an Fresnelschen Zonen, dann ist die Intensität im Punkt A′ gleich Null. Bei einer ungeraden Anzahl an Fresnelschen Zonen hat die Intensität im Punkt A′ ein Maximum.

Wir verifizieren das Ergebnis, indem wir die Integration über die einzelnen Fresnelschen Zonen erstrecken. Gleichung (4.409) formen wir um in ($\varrho = \sqrt{k\lambda f'}$ bedeutet $x = k\pi$)

$$a = \frac{\lambda f' A}{r_0}\left\{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x\right\}. \tag{4.416}$$

Es ist

$$\int_{(k-1)\pi}^{\pi k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-1)\pi}\right] = \begin{cases} 2 & (k \text{ gerade}) & (4.417) \\ -2 & (k \text{ ungerade}). & (4.418) \end{cases}$$

Daraus folgt

$$a = \frac{2A\lambda f'}{\mathrm{j} r_0}(-1 + 1 - 1 \pm \cdots \pm m) = \frac{2A\lambda f'}{\mathrm{j} r_0}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k, \tag{4.419}$$

woraus sich wieder die Aussage der Gl. (4.415) ergibt.

Zonenplatte. Aus Gl. (4.419) ist ersichtlich, daß sich die Amplitudenanteile benachbarter Zonen gegenseitig aufheben, so daß auch bei einer ungeraden Anzahl an Zonen nur eine kleine Lichtintensität in A′ vorhanden ist. Sie ist gerade so groß, wie sie auch bereits bei einer Öffnung auftreten würde, die den Durchmesser der innersten Zone hätte.

Wir schwärzen nun jede zweite Zone, um deren Wirkung auf die Amplitude im Punkt A′ aufzuheben. Dadurch beträgt die komplexe Amplitude für m ungerade

$$a = -\frac{(m+1)\,\lambda f' A}{\mathrm{j} r_0}. \tag{4.420}$$

Die Intensität ist proportional zu

$$aa^* = \left[\frac{(m+1)\,\lambda f' A}{r_0}\right]^2. \tag{4.421}$$

Gegenüber der Öffnung, die völlig transparent ist, ergibt sich mit 19 Zonen die 100 fache Intensität (4:400).

Die Zonenplatte wirkt wie eine Linse mit der Brennweite f'. Diese folgt aus dem Radius ϱ_m der Zonenplatte, wenn in der Gl. (4.406) $(\Delta L)_{Max} = \varrho_m^2/2f' = m\lambda/2$ gesetzt wird, zu

$$f' = \frac{\varrho_m^2}{m\lambda} \quad (m \text{ ungerade}). \tag{4.422}$$

Damit ist

$$\frac{1}{l_0'} - \frac{1}{l_0} = \frac{1}{f'} \tag{4.423}$$

als Abbildungsgleichung anzusehen. Wegen Gl. (4.422) hat die Zonenplatte mehrere Brennpunkte und damit auch Bildpunkte.

Der Nachteil einer Mehrzahl an Bildpunkten läßt sich vermeiden, wenn die Zonenplatte stetig verlaufendes Durchlässigkeitsprofil hat. So erhält man für

$$a_\varrho = \frac{A}{r_0} \cos \frac{\pi\varrho^2}{\lambda f'} \cdot e^{\frac{j\pi\varrho^2}{\lambda f'}} \tag{4.424}$$

nur zwei Bildpunkte (negative a_ϱ bedeuten einen Phasenfaktor von π). Mit den Integralen

$$\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \cos x \cdot e^{jx}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{4.425}$$

wird die komplexe Amplitude

$$a = \frac{m\pi A\lambda f'}{2r_0}. \tag{4.426}$$

Bei 19 Zonen erhöht sich die Intensität gegenüber der „kastenförmigen" Zonenplatte ungefähr um den Faktor $30^2 : 20^2 = 2{,}25$.

In der Abb. 4.200 sind die Konstruktion der Fresnelschen Zonenplatte und die Transparenz der Zonenplatte nach der Funktion $\cos(\pi\varrho^2/\lambda f')$ grafisch dargestellt.

Zonenplatten eignen sich vor allem zur Abbildung im Ultravioletten und im Bereich der Röntgenstrahlen. Neben den Problemen bei der Herstellung, vor allem für die kurzwelligen Spektralbereiche, sind der Farbfehler, die Schwierigkeiten bei der Abbildung ausgedehnter Felder und die geringe Intensität des gebeugten Lichtes als gegenwärtige Hinderungsgründe für die umfangreichere Anwendung der Zonenplatten anzusehen.

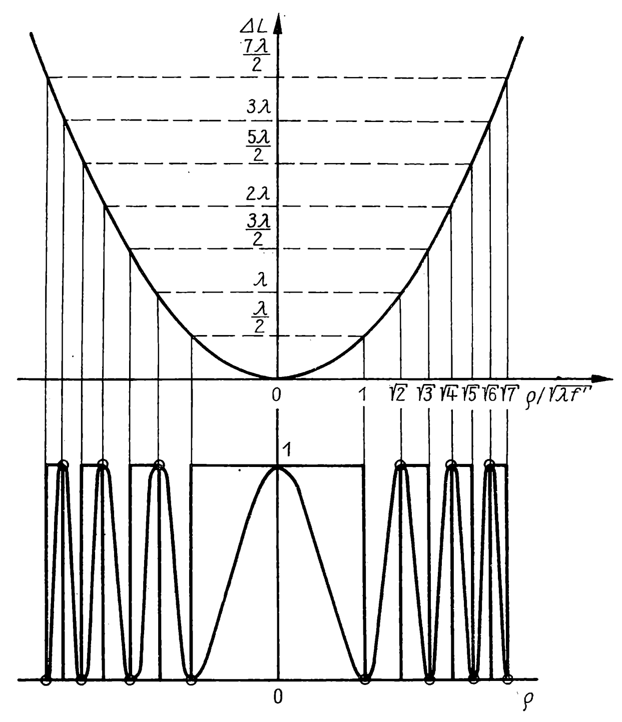


Abb. 4.200
Zur Konstruktion der Zonenplatte mit völlig undurchlässigen Kreisringen bzw. mit der kosinusförmigen Transparenzfunktion

4.4.8. Hologramme

Hologramme sind wellenoptisch abbildende Funktionselemente, die aus beugenden Strukturen bestehen. Der Unterschied zu den bisher behandelten beugenden Strukturen, z. B. den Zonenplatten, besteht lediglich darin, daß die Amplituden- und Phasenverteilung im Hologramm interferenzoptisch erzeugt und gespeichert wird (experimentelle Hologramme). Die Interferenz kann auch mathematisch modelliert werden. Wesentliche Eigenschaften des Wellenfeldes werden im Hologramm aufgezeichnet (synthetische Hologramme).

Den theoretisch einfachsten Fall stellen die holografischen Liniengitter dar, die heute bereits in Geräten verwendet werden. Auf eine ebene lichtempfindliche Schicht treffe eine ebene Welle senkrecht, eine zweite ebene Welle unter dem Winkel $\tilde{\alpha}_0$ auf (Abb. 4.201). Die Phasendifferenz an einer Stelle ξ der Schicht beträgt ($\alpha_0 = \cos \tilde{\alpha}_0$)

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\,\xi\alpha_0. \tag{4.427}$$

Die beiden Wellen interferieren und ergeben die komplexe Amplitude

$$a = A_1 + A_2 \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}\xi\alpha_0}.$$

Die Intensität ist proportional zu

$$aa^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,\xi\alpha_0\right). \tag{4.428}$$

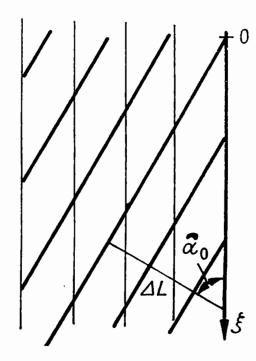


Abb. 4.201
Zur Erzeugung des holografischen Gitters

Es entsteht eine kosinusförmige Intensitätsverteilung mit der Gitterkonstanten $g = \lambda/\alpha_0$. Wir nehmen an, daß die lichtempfindliche Schicht in dem Sinne linear registriert, daß ihre Amplituden-Transparenz aa^* proportional ist.

Nehmen wir noch an, daß $A_1 = A_2 = A$ ist, so gilt für die Strukturfunktion des Gitters

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,\xi\alpha_0\right)\right].$$

Wir können die schräg einfallende Welle als Signalwelle ansehen, deren Richtung die Information darstellt, die registriert werden soll. Die Information drückt sich in der Phasenverteilung auf der registrierenden Schicht aus. Die lichtempfindlichen Schichten sind aber sog. quadratische Empfänger, d. h., die Anzeige ist nur vom Absolutquadrat der komplexen Amplitude abhängig. Deshalb würde ohne die senkrecht auftreffende Welle, die wir als Referenzwelle bezeichnen, eine gleichmäßige Intensitätsverteilung registriert $(a_2a_2^*)$.

Die Hologramme zeichnen sich also dadurch aus, daß Betrag und Phase der komplexen Amplitudenverteilung eines Wellenfeldes registriert werden.

Mit der Variablen $\varkappa$ entsprechend Gl. (2.317) gilt für die Strukturfunktion

$$f(\varkappa) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\pi\varkappa). \tag{4.429}$$

Wir lassen eine ebene Welle mit der Wellenlänge λ' unter dem Winkel α_0' auf das Hologramm auftreffen. Die komplexen Amplituden in der Beugungsordnung er-

geben sich nach Gl. (2.338) und Gl. (2.339) zu

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos 2\pi\varkappa) \, d\varkappa = \frac{1}{2}$$

und mit $\cos 2\pi\varkappa = 0{,}5[\exp(2\pi j\varkappa) + \exp(-2\pi j\varkappa)]$

$$a_m = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2\pi j m \varkappa} \, d\varkappa + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2\pi j (m+1)\varkappa} \, d\varkappa + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{2\pi j (m-1)\varkappa} \, d\varkappa .$$

Daraus folgt

$$a_m a_m^* = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & m = 0 \\ \dfrac{1}{16} & m = \pm 1 \\ \dfrac{1}{4} & |m| > 1 . \end{cases} \tag{4.430}$$

Es entsteht die nullte Ordnung, die in der Richtung $\alpha = \alpha_0'$ liegt. Für die Richtungen der beiden anderen Beugungsordnungen gilt

$$\alpha - \alpha_0' = \pm \frac{\lambda'}{g} = \pm \frac{\lambda'}{\lambda} \alpha_0 . \tag{4.431}$$

Mit einer ebenen Rekonstruktionswelle, bei der $\alpha_0' = 0$ und $\lambda' = \lambda$ ist, erhalten wir

$$\alpha = \pm \alpha_0 .$$

Die Signalwelle ($\alpha = \alpha_0$) und die dazu konjugierte Welle ($\alpha = -\alpha_0$) werden also rekonstruiert (Abb. 4.202a).

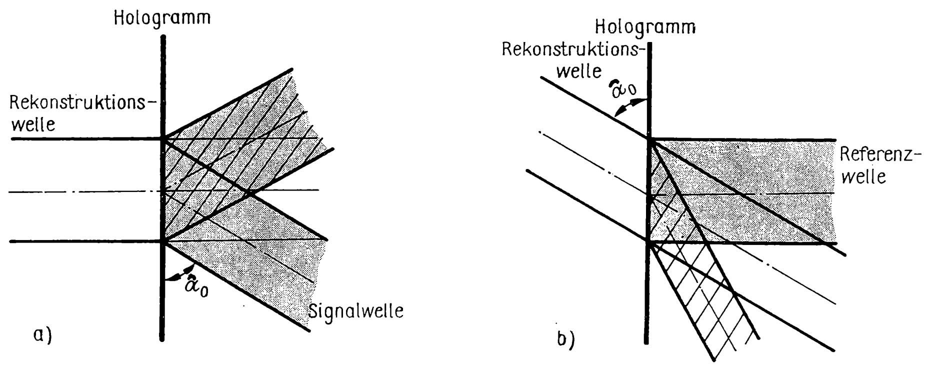


Abb. 4.202
a) Rekonstruktion der Signalwelle mit der Referenzwelle,
b) Rekonstruktion der Referenzwelle mit der Signalwelle

Die Intensität in den Beugungsordnungen ist allerdings 1/16 der einfallenden Intensität. Man spricht davon, daß die Beugungseffektivität 1/16 = 0,0625 ist. Sie kann erhöht werden, wenn statt des Amplitudenhologramms ein Phasenhologramm verwendet wird. Dieses entsteht z. B., indem durch Bleichvorgänge die ursprüngliche Amplitudenstruktur in eine Phasenstruktur umgewandelt wird.

Mit einer ebenen Rekonstruktionswelle, für die $\alpha_0' = \alpha_0$ und $\lambda' = \lambda$ gilt, ist

$$\alpha = \pm\alpha_0 + \alpha_0 = 0,\ 2\alpha_0.$$

Die Referenzwelle und die dazu konjugierte Welle werden rekonstruiert (Abb. 4.202 b). Die Rekonstruktion ist also komplementär, d. h., Einstrahlen der Referenzwelle ergibt die Signalwelle und umgekehrt.

Mit einer stetigen Variation der Rekonstruktionswellenlänge läßt sich die Richtung der gebeugten Welle stetig im Verhältnis λ'/λ variieren.

In analoger Weise wie das Liniengitter läßt sich eine Zonenplatte holografisch erzeugen. Wir bringen zu diesem Zweck eine ebene Referenzwelle und eine Kugelwelle, die von einem Objektpunkt ausgeht, zur Interferenz (Abb. 4.203). Für den optischen Wegunterschied gilt

$$\Delta L = r - r_0 = \sqrt{\varrho^2 + r_0^2} - r_0. \tag{4.432}$$

Für $\varrho \ll |r_0|$ entsteht durch Reihenentwicklung

$$\Delta L = \frac{1}{2}\frac{\varrho^2}{r_0} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\delta = \frac{\pi\varrho^2}{\lambda r_0}. \tag{4.433}$$

Die komplexe Amplitude in der Hologrammebene beträgt

$$a = A_1 + \frac{A_2}{r_0^2} + \frac{2A_1A_2}{r_0}\cos\frac{\pi\varrho^2}{\lambda r_0}. \tag{4.434}$$

Es entsteht die Radialabhängigkeit der Intensität wie in der Abb. 4.200, aber die Maxima betragen $(aa^*)_{\text{Max}} = (A_1 + A_2/r_0)^2$, die Minima betragen $(aa^*)_{\text{Min}} = (A_1 - A_2/r_0)^2$. Der Kontrast der Zonenplatte, den wir auch Modulationsgrad nennen können, beträgt

$$K = \frac{2A_1A_2r_0}{A_1^2r_0^2 + A_2^2}. \tag{4.435}$$

Nur für $A_1 = A_2/r_0$ wird $K = 1$.

Es gelten dieselben Rekonstruktionsbedingungen wie beim Liniengitter. Es entsteht beim Einstrahlen der Referenzwelle ein reelles und ein virtuelles Bild des Objektpunktes. Wegen der Lage der beiden Bildpunkte auf einer Geraden, die senkrecht auf den Wellenflächen der Rekonstruktionswelle steht, spricht man von Geradeausholografie. Reelles und virtuelles Bild lassen sich trennen, wenn bei der Aufzeichnung die Referenzwelle schräg auf das Hologramm trifft (Abb. 4.204).

Bisher sind wir von der Aufzeichnung eines Objektpunktes ausgegangen. Da jedes Objekt als Gesamtheit von Objektpunkten aufgefaßt werden kann, lassen

sich auch ausgedehnte Objekte holografisch abbilden. Bei der Aufzeichnung ist es notwendig, daß die Signal- und die Referenzwelle kohärent zueinander sind. Sie werden deshalb im allgemeinen durch Teilung eines Laserbündels erzeugt, mit dem die große Kohärenzlänge erreichbar ist. Die Information über jedes Element des Objektes ist im gesamten Hologramm gespeichert, so daß auch mit Teilen des Hologramms die Rekonstruktion möglich ist (redundante Speicherung).

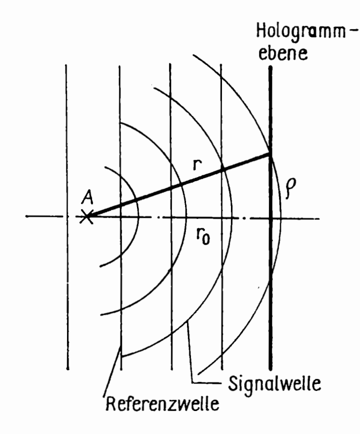


Abb. 4.203
Erzeugung des Hologramms eines Objektpunktes

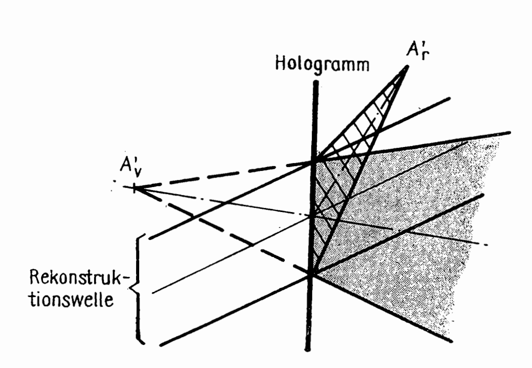


Abb. 4.204
Rekonstruktion eines Hologramms, bei dem mit einer schräg einfallenden Referenzwelle aufgenommen wurde

Das rekonstruierte Bild ist dem Objekt räumlich ähnlich, wodurch die holografische Abbildung in weiten Bereichen ohne die Begrenzung durch die Schärfentiefe arbeitet. Das wird z. B. bei der Kombination von Holografie und Mikroskopie genutzt.

Auch für die Hologramme lassen sich analog wie für Zonenplatten Abbildungsgleichungen ableiten. Es ist auch eine Theorie der Abbildungsfehler ausgearbeitet worden.

Bei den synthetischen Hologrammen wird die komplexe Amplitude für das modellmäßig vorgegebene Objekt im Hologramm berechnet. Betrag und Phase sind in einer geeigneten Kodierung aufzuzeichnen. Es werden meistens binäre Hologramme verwendet. Ein Beispiel stellt die Zonenplatte dar, die die Information nur durch „helle“ und „dunkle“ Ringe geeigneter Breite und Lage gespeichert enthält.

Rotationssymmetrische synthetische Hologramme, die mit der Wellenaberration von optischen Flächen oder optischen Systemen moduliert sind, eignen sich als Korrektionselemente für die Abbildungsfehler (Ortsfrequenzfilter) und als Prüfnormal in Interferometern (z. B. bei der interferometrischen Asphärenprüfung).

5. Nichtabbildende optische Funktionselemente

5.1. Lichtleitende Funktionselemente

5.1.1. Linsenfolgen

Ein lichtleitendes Funktionselement bündelt den Lichtstrom und leitet ihn über merkliche Strecken weiter, ohne daß damit primär eine optische Abbildung angestrebt wird.

Im Grunde genommen überträgt jedes optische System den Lichtstrom, aber zum Zweck der optischen Abbildung. Der Einfluß der geometrischen Verhältnisse des optischen Systems auf den übertragenen Lichtstrom wird durch den Lichtleitwert erfaßt. Dieser folgt für ein Flächenelement $\mathrm{d}q_1$ der Quelle aus

$$\mathrm{d}G = \pi \mathrm{A}^2 \cos^4 w \cdot \mathrm{d}q_1 .$$

Auch optische Folgen, die nur den Lichtstrom leiten sollen, können abbildende Elemente enthalten. Im allgemeinen wird aber die Lichtquelle oder eine ausgeleuchtete Pupille ohne das Ziel der Informationsübertragung abgebildet. Das hat oftmals zur Folge, daß an die Bildgüte nicht so hohe Anforderungen gestellt werden.

So können z. B. die Beleuchtungssysteme in optischen Instrumenten durchweg als lichtleitende Funktionsgruppen betrachtet werden. Sie werden zweckmäßig im Zusammenhang mit dem gesamten optischen Instrument behandelt und in diesem Abschnitt ausgeklammert.

Eine Linsenfolge zur Lichtleitung läßt sich bis auf eventuelle Eingangs- und Ausgangselemente durch periodische Wiederholung einer Elementarzelle aus zwei Linsen bilden. In Matrixschreibweise stellen wir die Abbildung durch die Elementarzelle aus dünnen Linsen durch (Abb. 5.1)

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e_2' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & F_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e_1' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & F_1' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e_0' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ h \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

dar. Ausrechnen der Übertragungsmatrix ergibt mit

$$F_1' + F_2' - e_1' F_1' F_2' = F' \quad \text{und} \quad e_0' + e_1' + e_2' = L_{\mathrm{opt}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e_0' F' - e_1' F_2' & F' \\ -L_{\mathrm{opt}} + e_0' e_2' F' + e_1'(e_0' F_1' + e_2' F_2') & 1 - e_1' F_1' - e_2' F' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ h \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

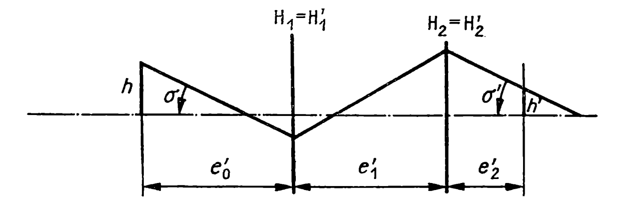


Abb. 5.1
Elementarzelle aus zwei dünnen Linsen

Eine stabile Lichtleitung ohne Lichtstromverluste über mehrere Elementarzellen ist gesichert, wenn sich das Bündel nicht ständig aufweitet und sich die leuchtende Fläche nicht ständig vergrößert (es tritt keine Randabschattung ein). Das ist z. B. gewährleistet, wenn sich die Übertragungsmatrix auf die Form

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

spezialisiert. σ' ist dann nicht von h, h' nicht von σ abhängig und es gilt

$$h' = -h, \qquad \sigma' = -\sigma. \tag{5.4}$$

Der ebenfalls denkbare Fall, daß die Diagonalelemente die Werte $+1$ annehmen, führt bei Linsen zu keinem brauchbaren Ergebnis. Aus Gl. (5.2) und Gl. (5.3) folgt

$$F' = 0, \tag{5.5}$$

$$-L_{\text{opt}} + e_1'(e_0'F_1' + e_2'F_2') = 0, \tag{5.6}$$

$$1 - e_1'F_2' = -1, \tag{5.7}$$

$$1 - e_1'F_1' = -1. \tag{5.8}$$

Es muß also

$$e_1' = 2f_1' = 2f_2' \tag{5.9}$$

sein. Damit die periodische Wiederholung möglich ist, muß $e_2' = 0$ sein. Aus Gl. (5.6) ergibt sich mit Gl. (5.9)

$$e_0' = 2f_1'. \tag{5.10}$$

Zusammengefaßt gilt also

$$e_0' = e_1' = 2f_1', \qquad f_2' = f_1', \qquad e_2' = 0, \qquad F' = 0.$$

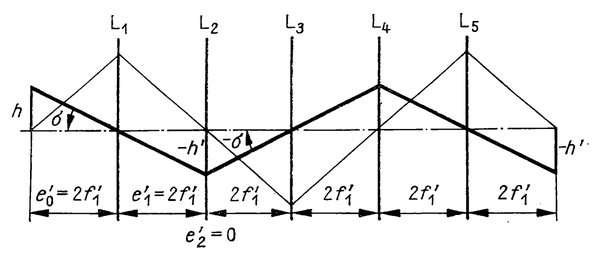


Abb. 5.2 Linsenfolge zur Lichtleitung

Abb. 5.2 zeigt anschaulich, daß die Folge aus Elementarzellen die Eigenschaft hat, sowohl das Lichtbündel ständig zu fokussieren wie auch die Hauptstrahlen in einem Gebiet um die optische Achse zu führen. Die Anordnung entspricht einer Folge von abbildenden Linsen und Feldlinsen.

Ein Parallelbündel ist über eine Linse mit der Brennweite $f_0' = 2f_1'$ einzukoppeln. Entsprechend wäre durch eine Linse mit der Brennweite $f_n' = 2f_1'$ auszukoppeln, falls ein Parallelbündel benötigt wird.

Laserresonatoren. Im Abschn. 2.4.5. sind wir bereits auf den konfokalen Laserresonator eingegangen, der aus zwei Kugelspiegeln mit zusammenfassenden Brennpunkten besteht. Im Grundmodus bildet sich ein Gaußsches Bündel aus. Die im Resonator hin- und herlaufende Welle bildet eine stabile stehende Welle.

Resonatoren aus Kugelspiegeln (Abb. 5.3a) bilden ein Beispiel für die zweckmäßige Anwendung der Matrixdarstellung der optischen Abbildung. Wir denken uns den Resonator aus einer periodischen Folge von Elementarzellen aufgebaut. Jede Elementarzelle besteht aus einem Eingangselement und einem Ausgangselement, die jeweils die halbe Brechkraft des ersten Spiegels haben, und einem Zwischenelement mit der Brechkraft des zweiten Spiegels (Abb. 5.3b).

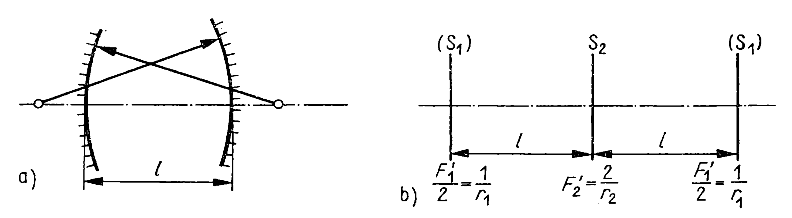


Abb. 5.3 Laserresonator

Für die aufgespaltete Spiegelfläche gilt entsprechend Gl. (4.148) mit $n = n' = 1$

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & F' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ h \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Die Übergangsmatrix lautet nach Gl. (4.150)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e' & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Für die Elementarzelle gemäß Abb. 5.3b ist mit $e' = l$

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{F_1'}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & F_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{F_1'}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ h \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Das Ausrechnen des Matrizenproduktes ergibt

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g_1g_2 - 1 & -\frac{2}{l}(g_1g_2 - 1)\, g_1 \\ -2g_2 l & 2g_1g_2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ h \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

mit

$$g_1 = 1 - \frac{lF_1'}{2}, \quad g_2 = 1 - \frac{lF_2'}{2}$$

bzw.

$$g_1 = 1 - \frac{l}{r_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{l}{r_2}. \tag{5.15a, b}$$

Nach dem Theorem von SYLVESTER ist [6]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sin\Theta} \begin{pmatrix} A\sin n\Theta - \sin[(n-1)\,\Theta] & B\sin\Theta \\ C\sin\Theta & D\sin n\Theta - \sin[(n-1)\,\Theta] \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

wobei

$$\cos\Theta = \frac{A+D}{2} \tag{5.17}$$

gilt. Nach Gl. (5.14) ist

$$\cos\Theta = 2g_1g_2 - 1. \tag{5.18}$$

Wegen $-1 \leqq \cos\Theta \leqq 1$ muß

$$0 \leqq g_1g_2 \leqq 1 \tag{5.19}$$

sein.

Nur für Resonatoren, die die Bedingung (5.19) erfüllen, sind stabile Eigenschwingungen möglich. Deshalb heißt die Beziehung (5.19) Stabilitätsbedingung. In der grafischen Darstellung $g_2 = f(g_1)$ liegen die stabilen Resonatoren in dem Gebiet, das durch die Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ sowie die Hyperbel $g_2 = 1/g_1$ begrenzt ist (Abb. 5.4). Tab. 5.1 enthält für einige spezielle Resonatorkonfigurationen die Größen g_1, g_2, A, B, C, D.

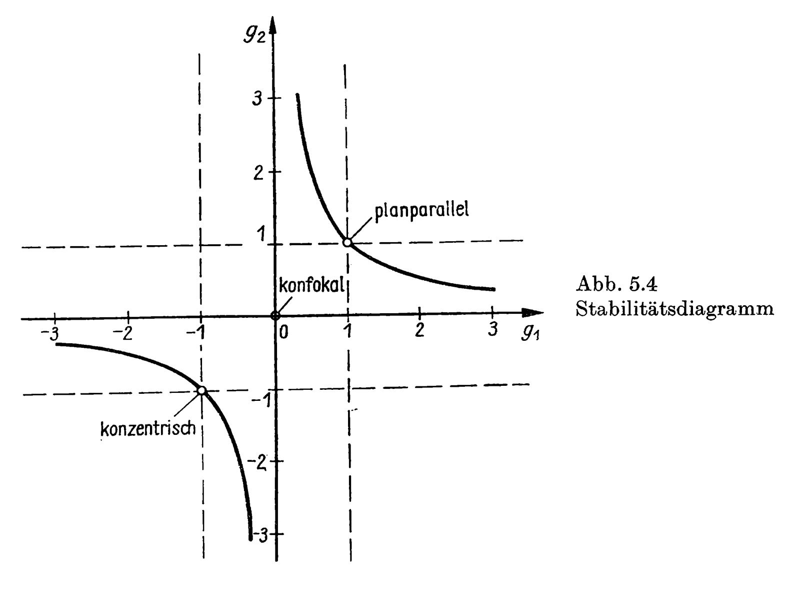


Abb. 5.4
Stabilitätsdiagramm

Erzeugung eines Lichtbündels konstanten Durchmessers. Wir zeigen noch, daß zwischen zwei Blenden B_1 und B_2 auch mit einer klassischen Lichtquelle ein Lichtbündel konstanten Durchmessers erzeugt werden kann. Nach Abb. 5.5 gilt

$$\varrho_B = -y' = -\beta' y, \qquad h' = 2y \tag{5.20a, b}$$

Tabelle 5.1
Matrixelemente von sphärischen Laserresonatoren

		g_1	g_2	$A = D$	B	C
konfokal	$l = r_1 = r_2$	0	0	−1	0	0
konzentrisch	$l = 2r_1 = 2r_2$	−1	−1	1	0	$2l$
plan-sphärisch (Mittelpunkt auf Planfläche)	$r_1 = \infty$	1	0	−1	$\frac{2}{l}$	0
plan-plan	$r_1 = r_2 = \infty$	1	1	1	0	$-2l$

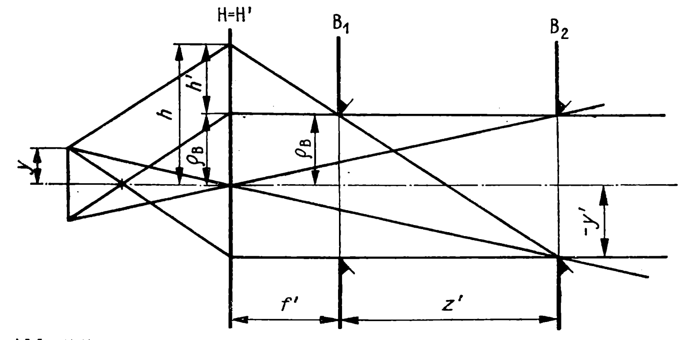


Abb. 5.5
Parallelbündel zwischen zwei Blenden

und

$$h = \varrho_B + h', \tag{5.21}$$

also mit Gl. (5.20a) und Gl. (5.20b)

$$h = -\beta' y + 2y$$

bzw.

$$h = y(2 - \beta'). \tag{5.22}$$

h nach Gl. (5.22) ist der erforderliche Linsendurchmesser, bei dem längs der Strecke $z' = -\beta' f'$ das Lichtbündel konstanten Durchmesser hat.

5.1.2. Licht- und Bildleitkabel

Licht- und Bildleitkabel stellen biegsame optische Funktionselemente dar, die den Lichtstrom von ihrer Eintrittsfläche zu ihrer Austrittsfläche übertragen. Sie bestehen aus Anordnungen dünner Fasern aus hochtransparenten Werkstoffen (Glas, Quarz, Plaste), weshalb man auch von Faseroptik oder Fiberoptik spricht. Der Faserkern mit der Brechzahl n_K ist von einem dünnen Mantel mit der Brechzahl n_M umgeben, wobei stets $n_M < n_K$ gilt.

Bei den Lichtleitkabeln haben die Faserenden an der Eintrittsfläche des Kabels eine völlig andere gegenseitige Anordnung als die Faserenden an der Austrittsfläche

des Kabels (ungeordnete Fasern). Lichtleitkabel dienen deshalb ausschließlich der Übertragung des Lichtstroms.

Bei den Bildleitkabeln besteht zwischen den Faserenden an der Austrittsfläche des Kabels dieselbe räumliche Anordnung wie zwischen den Faserenden an der Eintrittsfläche. Dadurch erscheint ein auf der Eintrittsfläche erzeugtes Bild auf der Austrittsfläche gerastert wieder. Bildleitkabel gehören nur bedingt zu den abbildenden Funktionselementen; sie leiten aber das Bild von einer Fläche zur anderen weiter.

Wir betrachten nur zylindrische Fasern, deren Kerndurchmesser wesentlich größer als die Dicke der umhüllenden Schicht und als die Wellenlänge des Lichtes ist. In diesem Falle sind die grundlegenden Eigenschaften geometrisch-optisch zu verstehen. Die Eindringtiefe des Lichtes in den Mantel ist klein.

Sehr dünne Fasern mit dicker Umhüllung stellen Wellenleiter dar, die nur wellenoptisch behandelt werden können. Bei ihnen verläuft die Welle mit einer merklichen Amplitude auch im Mantel.

Die Lichtleitung durch ein Bündel erfolgt durch fortgesetzte Totalreflexion innerhalb der Glasfasern. Damit die Totalreflexion nicht durch die Berührung der einzelnen Glasfasern gestört wird, wird der Kern mit dem Mantel aus einem Glas mit niedrigerer Brechzahl überzogen. Die Endflächen der Faserbündel sind poliert.

Ein unter dem Einfallswinkel ε auf die Faser treffender Lichtstrahl wird an dieser gebrochen und trifft auf die Grenzschicht Kern—Mantel. An dieser wird er bei Einhaltung des Grenzwinkels der Totalreflexion ε_G, der sich aus

$$\sin \varepsilon_G = \frac{n_M}{n_K} \tag{5.23}$$

ergibt, gerade noch totalreflektiert. Da der Strahl auf die nächste Kern-Mantel-Grenzschicht unter dem gleichen Winkel auftrifft, wird er an dieser ebenfalls totalreflektiert. Das wiederholt sich, bis der Strahl die Faser verläßt.

Es soll die maximale numerische Apertur des Lichtbündels berechnet werden, das durch Totalreflexion im Meridionalschnitt der Glasfaser weitergeleitet wird. Aus dem Brechungsgesetz $\sin \varepsilon' = (\sin \varepsilon)/n_K$ folgt mit dem größten möglichen Brechungswinkel $\varepsilon' = 90° + \varepsilon_G$ die Gleichung (Abb. 5.6)

$$\sin (90° + \varepsilon_G) = \cos \varepsilon_G = \frac{\sin \varepsilon}{n_K}. \tag{5.24}$$

Der Grenzwinkel der Totalreflexion ergibt sich aus Gl. (5.23), so daß

$$\frac{\sin \varepsilon}{n_K} = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon_G} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_M}{n_K}\right)^2} \tag{5.25}$$

und

$$A = \sin \varepsilon = \sqrt{n_K^2 - n_M^2} \tag{5.26}$$

ist. Bei $n_K = 1{,}7$ und $n_M = 1{,}5$ wird $A = 0{,}8$.

Für die Anwendung der Licht- und Bildleitkabel ist die Lichtdurchlässigkeit wichtig. Diese ist im wesentlichen von der Durchlässigkeit der einzelnen Fasern,

von der für den Lichttransport nicht genutzten Fläche des Mantels und vom Packungsfaktor abhängig.

Der Transmissionsgrad einer Faser wird durch die Fresnelschen Reflexionsverluste, durch Verluste infolge der vielfachen Totalreflexion und durch die Absorptionsverluste im Glas bestimmt.

Das Reflexionsvermögen ist bei einer einmaligen Totalreflexion theoretisch gleich Eins. Praktisch führen jedoch Störungen in der Kern-Mantel-Grenzschicht und sehr

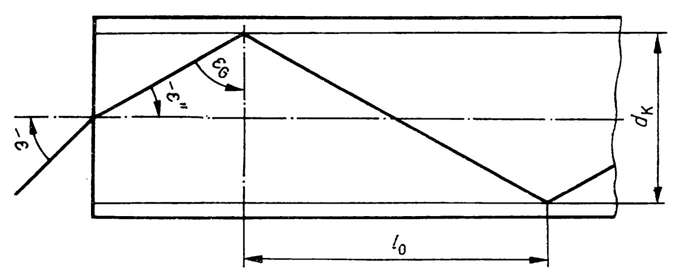


Abb. 5.6
Meridionalschnitt einer Faser

geringe Absorption im Mantel zu geringen Reflexionsverlusten von Bruchteilen eines Promille. Durch den kleinen Faserdurchmesser wird das Licht sehr viele Male reflektiert. Aus der Abb. 5.6 ergibt sich für die Anzahl der Totalreflexionen auf der Länge l

$$N = \frac{l}{l_0} = \frac{l}{d_K} \tan \varepsilon' = \frac{l \cdot \sin \varepsilon}{d_K \sqrt{n_K^2 - \sin^2 \varepsilon}}. \tag{5.27}$$

Bei einem Faserdurchmesser von 30 μm und der Länge 1 m sind bei hoher Apertur einige 10^4 Reflexionen möglich. Infolge dieser großen Anzahl an Totalreflexionen wirken sich auch die geringen Verluste einer Reflexion auf den Transmissionsgrad der Faser merklich aus.

Für die Absorptionsverluste ist der Glasweg

$$l_{\text{Glas}} = \frac{l}{\cos \varepsilon'} = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \varepsilon}{n_K}\right)^2}} \tag{5.28}$$

größer als die Faserlänge anzusetzen.

Die Anordnung von zylindrischen Fasern in einem Bündel kann durch eine Quadratpackung oder die dichteste Dreieckspackung vorgenommen werden. Für die Quadratpackung ist (Abb. 5.7a)

$$\eta = \frac{A_{\text{Kreis}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{\pi r^2}{4 r^2} = 0{,}785.$$

Für die Dreieckspackung ist (Abb. 5.7b)

$$\eta = \frac{A_{\text{Halbkreis}}}{A_{\text{Dreieck}}} = \frac{0{,}5\pi r^2}{r^2 \sqrt{3}} = 0{,}907.$$

Die Größe η ist der Füllfaktor.

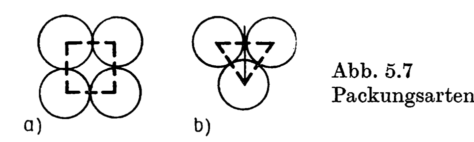


Abb. 5.7
Packungsarten

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Faserkerns mit dem Durchmesser d_K zur Fläche der gesamten Faser mit dem Außendurchmesser d multipliziert mit dem Füllfaktor ergibt den Packungsfaktor $\eta_P = (d_K/d)^2\,\eta$.

Für einen hohen Packungsfaktor und damit geringe Lichtverluste im Lichtleitkabel ist ein geringer Manteldurchmesser der Fasern günstig. Andererseits ist jedoch eine Eindringtiefe von einigen Wellenlängen in den Mantel für die Totalreflexion erforderlich.

Bei handelsüblichen Fasern beträgt z. B. die Brechzahl $n_M = 1{,}52$, die Brechzahl $n_K = 1{,}60$. Nach Gl. (5.26) wird ein Bündel mit der maximalen numerischen Apertur $A = 0{,}5$ übertragen. Die Fasern haben einen Durchmesser von $d = 30\,\mu$m. Es werden Kabel mit Längen bis zu 2 m und Durchmessern bis zu 10 mm angeboten. Der Transmissionsgrad beträgt unter bestimmten Bedingungen (mittlere Apertur, Normlichtart A) $\tau \approx 0{,}5$ bei der Länge 250 mm, $\tau \approx 0{,}3$ bei der Länge 2 m.

Mit flexiblen Lichtleitkabeln läßt sich Licht auf gekrümmten Bahnen weiterleiten. Dadurch wird eine Möglichkeit eröffnet, hochfrequente Feldenergie in der gleichen Weise zu bündeln wie niederfrequente Wechselströme in Drähten. Die Flexibilität ist z. B. bei der Beleuchtung von Körperhöhlen vorteilhaft, in die abbildende optische Systeme zur Beobachtung eingeführt werden. In optischen Geräten können z. B. über Faserbündel mehrere Skalen durch eine zentrale Lichtquelle beleuchtet werden. Ein Teil der Planspiegel und der Reflexionsprismen läßt sich dadurch einsparen. Es fallen also eventuell damit verbundene Platz- und Justierprobleme weg.

Bildleitkabel. Ein Faserbündel kann als abbildendes Funktionselement im oben genannten eingeschränkten Sinne verwendet werden. Dazu ist es erforderlich, daß die Fasern geordnet sind. Bei der Herstellung solcher Bündel wird der Glasfaden auf eine Trommel gewickelt. Der entstandene Faserring wird nach der Fixierung zerschnitten.

Zur Bildübertragung muß auf der Eintrittsfläche ein Bild erzeugt werden (Abb. 5.8). Das Auflösungsvermögen hängt außer von dem der Eintrittsfläche aufgeprägten Auflösungsvermögen vom Faserdurchmesser, vom Packungsfaktor und der Ordnung der Fasern ab. Sehr dünne Fasern, die ein hohes Auflösungsvermögen haben, weisen größere Transmissionsverluste auf als dickere Fasern. Bei Durchmessern

von 1 bis 100 μm und hohen numerischen Aperturen ist das erreichbare Auflösungsvermögen gut.

Eine Kontrastminderung gegenüber dem aufgeprägten Bild durch das Bildleitkabel kann durch zu geringe Schichtdicken des Fasermantels hervorgerufen werden. Ist die in den Mantel eindringende Welle nicht genügend abgeklungen, so dringt Energie in den Mantel der Nachbarfaser ein.

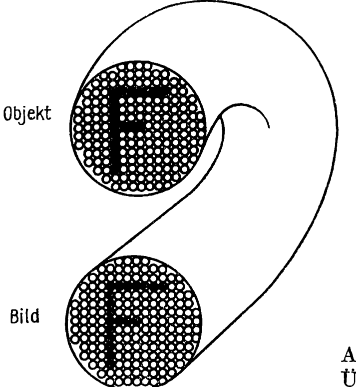


Abb. 5.8
Übertragung durch Bildleitkabel

Ferner können Inhomogenitäten im Faserkern bewirken, daß Strahlen so aus ihrer Richtung abgelenkt werden, daß sie in den Mantel eindringen.

Bildleitkabel mit ebenen Endflächen übertragen die Bilder aberrationsfrei. Durch eine entsprechende Form der Endfläche der Kabel kann die Bildfläche von der Ebene abweichend gestaltet werden. So ist z. B. die Bildfeldwölbung des vorangehenden Systems ausgleichbar. Durch konische Faserbündel kann auch der Abbildungsmaßstab in gewissen Grenzen beeinflußt werden.

5.1.3. Lichtleiter aus inhomogenen Stoffen

Bei inhomogenen Stoffen ist die Brechzahl stetig veränderlich. Die Brechzahl ist eine Funktion des Ortes. Inhomogene Stoffe finden Verwendung als dünne Übergangsschichten zwischen zwei homogenen Stoffen mit dem Ziel der Reflexionsminderung und als Gradientenfaser zur Signal- und Bildübertragung. Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf Gradientenfasern.

Lichtausbreitung in inhomogenen Stoffen. Die Ausbreitung des Lichtes in einer Gradientenfaser soll geometrisch-optisch betrachtet werden. In einer Gradientenfaser nimmt die Brechzahl radial mit der Entfernung von der Faserachse ab. Die Lichtstrahlen beschreiben gekrümmte Bahnen, wenn sie nicht in Richtung der Brechzahländerung oder senkrecht dazu verlaufen.

Wendet man das Brechungsgesetz auf zwei benachbarte Schichten mit den Brechzahlen n und $n + \mathrm{d}n$ an, so ergibt sich

$$n \sin \varepsilon = (n + \mathrm{d}n) \sin (\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon) \tag{5.29}$$

und unter Anwendung der Additionstheoreme und Vernachlässigung kleiner Größen

$$n \sin \varepsilon = n \sin \varepsilon + \mathrm{d}n \cdot \sin \varepsilon + n \cos \varepsilon \cdot \mathrm{d}\varepsilon$$

bzw.

$$n \cos \varepsilon \cdot \mathrm{d}\varepsilon + \sin \varepsilon \cdot \mathrm{d}n = 0.$$

Auflösen nach $\mathrm{d}\varepsilon$ ergibt

$$\mathrm{d}\varepsilon = -\tan \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{d}n}{n}. \tag{5.30}$$

Aus Abb. 5.9 folgt

$$\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\varrho} = \tan \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho}. \tag{5.31}$$

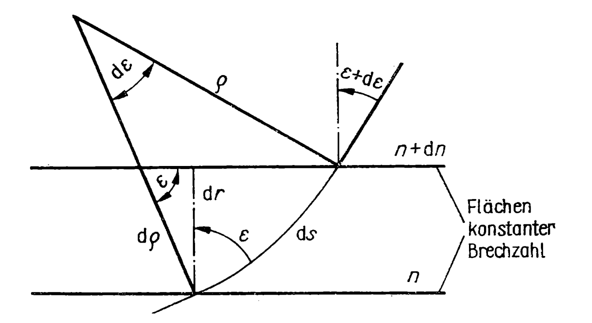


Abb. 5.9
Strahlenverlauf im inhomogenen Stoff

Durch Gleichsetzen von $\mathrm{d}\varepsilon$ nach Gl. (5.30) und Gl. (5.31) erhält man für die Krümmung der Lichtstrahlen wegen

$$\tan \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -\tan \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{d}n}{n}$$

den Ausdruck

$$K = \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{n} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varrho}. \tag{5.32}$$

Ist die Brechzahl als Funktion des Ortes bekannt, so läßt sich mit Hilfe von Gl. (5.32) der Krümmungsradius der Lichtstrahlen berechnen.

Beschränkt man sich auf Paraxialstrahlen, so kann nach der Theorie der Raumkurven

$$K = -\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2}$$

gesetzt werden. Weiter gilt im paraxialen Gebiet $\mathrm{d}\varrho \approx \mathrm{d}r$, so daß Gl. (5.32) auf

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{n} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} \tag{5.33}$$

führt.

Brechzahlverteilungen. Eine Gradientenfaser, deren Brechzahl mit der Entfernung von der Zylinderachse abnimmt, kann die Lichtstrahlen fokussieren, also eine optische Abbildung realisieren. In der Literatur wurde jedoch gezeigt, daß es keine Brechzahlverteilung gibt, mit der eine punktförmige Abbildung erzielt wird. Mit einer vorgegebenen Brechzahlverteilung ist es nicht möglich, sowohl meridionale wie auch windschiefe Strahlen in einem Punkt zu vereinigen.

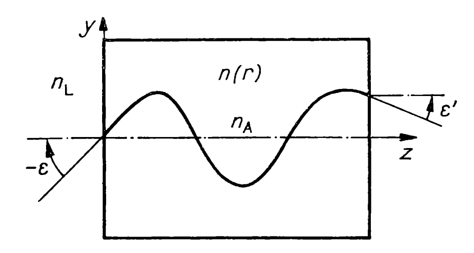


Abb. 5.10
Verlauf von Meridionalstrahlen im inhomogenen Stoff

Betrachten wir zunächst die Ausbreitung von Meridionalstrahlen in einem inhomogenen Stoff (Abb. 5.10). Die Lichtstrahlen breiten sich in der Gradientenfaser infolge der stetigen Abnahme der Brechzahl sinusförmig aus. Es entsteht eine sinusförmige Bahn um die Faserachse, ohne daß die Grenzfläche erreicht wird.

Die ideale Brechzahlverteilung eines inhomogenen Stoffes bezüglich der Abbildung im Meridionalschnitt ist gegeben durch

$$n(r) = n_A \operatorname{sch}\left(\sqrt{a}\, r\right) = n_A \left(1 - \frac{1}{2} a r^2 + \frac{5}{24} a^2 r^4 - \frac{61}{720} a^4 r^6 + \cdots + (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!} a^{2n-2} r^{2n}\right). \tag{5.34}$$

(n_A ist die Brechzahl auf der Achse, r ist der Abstand von der Achse, a ist eine positive Konstante, $\operatorname{sch} x = 1/(\operatorname{ch} x)$ ist der Hyperbelsekans, E_n sind Eulersche Zahlen.)

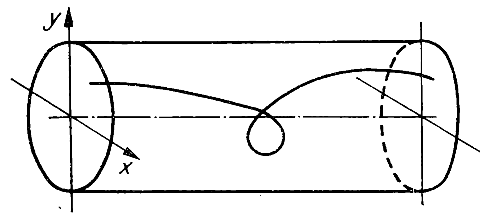


Abb. 5.11
Schraubenförmiger Verlauf eines windschiefen Strahls im inhomogenen Stoff

Sollen windschiefe Strahlen in der Faser schraubenförmige Bahnen ergeben (Abb. 5.11), so ist die Brechverteilung

$$n(r) = n_A (1 + a r^2)^{-0,5} = n_A \left(1 - \frac{1}{2} a r^2 + \frac{3}{8} a^2 r^4 - \frac{15}{48} a^4 r^6 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n n!} a^{2n-2} r^{2n}\right) \tag{5.35}$$

erforderlich.

Die Brechzahlverteilungen nach Gl. (5.34) und Gl. (5.35) unterscheiden sich in den Koeffizienten der Glieder ab 4. Ordnung des Radius. Beschränkt man sich auf das paraxiale Gebiet, so brauchen nur die Glieder bis zur 2. Ordnung berücksichtigt zu werden, und die ideale Brechzahlverteilung ist gegeben durch

$$n(r) = n_\mathrm{A}\left(1 - \frac{1}{2}\,ar^2\right). \tag{5.36}$$

In der Nähe der Zylinderachse muß die Brechzahlverteilung auf jeden Fall parabolisch sein, damit eine paraxiale Abbildung zustande kommt.

Abbildungsgleichungen im paraxialen Gebiet. Mit der idealen Brechzahlverteilung im paraxialen Gebiet Gl. (5.36) führt die Gl. (5.33), die die Ausbreitung der Lichtstrahlen beschreibt, auf eine Schwingungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}z^2} + ar = 0. \tag{5.37}$$

Dabei wurden die Annahmen $|0{,}5 \cdot ar^2| \ll 1$ und $n(r) \approx n_\mathrm{A}$ verwendet. Die Lösung der Gl. (5.37) liefert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen für den eintretenden Strahl (Einfallshöhe $r(0) = r_e$, Strahlneigung $r'(0) = r'_e$) den Strahlenverlauf in der Faser (Abb. 5.12)

$$r(z) = r_e \cos\left(\sqrt{a}\,z\right) + r'_e \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\sqrt{a}\,z\right) \tag{5.38}$$

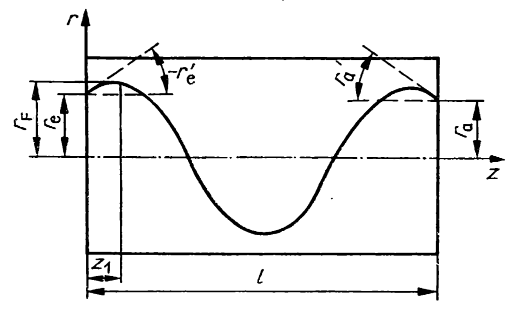


Abb. 5.12
Ein- und Ausgangsgrößen der Gradientenfaser

und durch Differentiation die Strahlneigung

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = r'(z) = -r_e \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,z\right) + r'_e \cos\left(\sqrt{a}\,z\right). \tag{5.39}$$

Setzt man in den Gleichungen (5.38) und (5.39) z gleich der Faserlänge l, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen innerhalb der Gradientenfaser:

$$r_a = r_e \cos\left(\sqrt{a}\,l\right) + r'_e \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right), \tag{5.40a}$$

$$r'_a = -r_e \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right) + r'_e \cos\left(\sqrt{a}\,l\right). \tag{5.40b}$$

Man kann dieses Gleichungssystem als Matrizenprodukt schreiben:

$$\begin{pmatrix} r_a \\ r'_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{a}\,l\right) & \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right) \\ -\sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right) & \cos\left(\sqrt{a}\,l\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ r'_e \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Die Paraxialstrahlen breiten sich in der Gradientenfaser sinusförmig mit der Periode $2\pi/\sqrt{a}$ aus. Dabei fallen die Durchgänge durch die Faserachse nur bei achsparallel einfallenden Strahlen unabhängig von der Einfallshöhe r_e in einem Punkt zusammen. Daraus resultiert auch, daß alle achsparallel einfallenden Strahlen, nachdem sie die Faser passiert haben, in einem Punkt konvergieren. Der Abstand dieses Konvergenzpunktes von der Faseraustrittsfläche beträgt f'_s. In der Entfernung $-f'$ kann eine äquivalente dünne Linse angenommen werden (Abb. 5.13).

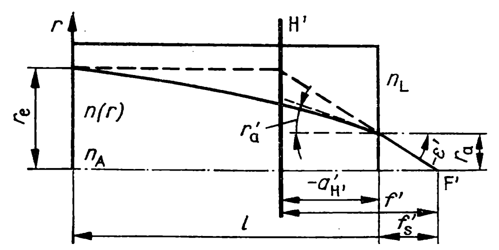


Abb. 5.13
Zur Brennweite einer Gradientenfaser

Es können dann für die Gradientenfaser Brennpunkte, Hauptpunkte, Scheitelbrennweiten, Brennweiten und Hauptebenen definiert werden. Ein achsparallel einfallender Strahl hat am Austrittsende der Faser die Höhe

$$r_a = r_e \cos\left(\sqrt{a}\,l\right) \tag{5.42a}$$

und die Neigung

$$r'_a = -r_e \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right). \tag{5.42b}$$

Unter der Voraussetzung $n(r) \approx n_A$ und dem Brechungsgesetz für kleine Winkel

$$n_A r'_a = n_L \varepsilon' \tag{5.43}$$

ergibt sich für die Scheitelbrennweite

$$f'_s = -\frac{r_a}{\varepsilon'} = \frac{n_L r_e \cos\left(\sqrt{a}\,l\right)}{n_A r_e \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right)} = \frac{n_L}{n_A \sqrt{a}} \cot\left(\sqrt{a}\,l\right). \tag{5.44}$$

Für die Brennweite erhält man

$$f' = -\frac{r_e}{\varepsilon'} = \frac{n_L r_e}{n_A r_e \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right)} = \frac{n_L}{n_A \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right)} \tag{5.45}$$

und für die Lage der Hauptebene H′

$$a'_{\mathrm{H}'} = f'_s - f' = \frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{A}}\sqrt{a}} \frac{\cos\left(\sqrt{a}\,l\right) - 1}{\sin\left(\sqrt{a}\,l\right)} = -\frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{A}}\sqrt{a}} \tan\left(\sqrt{a}\,\frac{l}{2}\right). \tag{5.46}$$

Die entsprechenden Gleichungen für die objektseitigen Größen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen von den bildseitigen, weil der bildseitig achsparallel austretende Strahl analog verlaufen würde.

Gl. (5.45) zeigt, daß die Brennweite einer Gradientenfaser außer von ihren Konstanten nur von ihrer Länge und nicht von ihren sonstigen geometrischen Abmessungen abhängig ist.

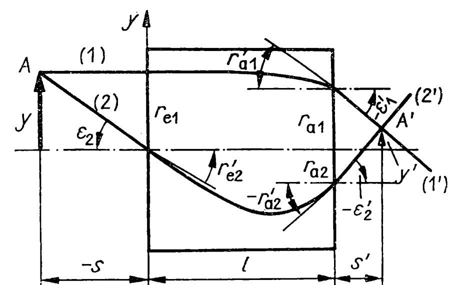


Abb. 5.14
Abbildung an der Gradientenfaser

Um die Beziehungen zwischen Objekt und Bild zu erhalten, geht man von Abb. 5.14 aus. Strahlen, die von einem Punkt A des Objektes ausgehen, schneiden sich in einem Punkt des Bildes. Betrachtet man zwei ausgezeichnete Strahlen, einen achsparallelen Strahl (1) und einen, der zum Achspunkt der Eintrittsfläche zielt (2), so lassen sich daraus die bildseitige Schnittweite s', die Bildgröße y' und der Abbildungsmaßstab β' berechnen.

Mit Hilfe der Koordinaten der austretenden Strahlen r'_{ai} und deren Richtungen $\varepsilon'_i = (n_{\mathrm{A}} r'_{ai})/n_{\mathrm{L}}$, die aus dem Brechungsgesetz folgen, können die Geradengleichungen für die beiden austretenden Strahlen (1′) und (2′) aufgestellt werden. Die Größen r'_{ai} und r_{ai} erhält man unter Berücksichtigung der Anfangswerte der eintretenden Strahlen $\left(r_{e1} = y,\ r'_{e1} = 0,\ r_{e2} = 0,\ r'_{e2} = (n_{\mathrm{L}}\varepsilon_2)/n_{\mathrm{A}} = -(n_{\mathrm{L}} r_{e2})/(n_{\mathrm{A}} s)\right)$ aus den Gleichungen (5.40):

$$y_{(1')} = -\frac{n_{\mathrm{A}}}{n_{\mathrm{L}}} r_{e1} \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right) \cdot (z - l) + r_{e1} \cos\left(\sqrt{a}\,l\right). \tag{5.47a}$$

$$y_{(2')} = \frac{r_{e1}}{s} \cos\left(\sqrt{a}\,l\right) \cdot (z - l) + \frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{A}}} \frac{r_{e1}}{s} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\sqrt{a}\,l\right). \tag{5.47b}$$

Aus der Forderung gleicher Bildhöhe folgt die Lage des Bildes:

$$s' = z - l = \frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{A}}\sqrt{a}} \frac{n_{\mathrm{A}} s \sqrt{a} - n_{\mathrm{L}} \tan\left(\sqrt{a}\,l\right)}{n_{\mathrm{L}} + n_{\mathrm{A}} s \sqrt{a} \tan\left(\sqrt{a}\,l\right)}. \tag{5.48}$$

Setzt man Gl. (5.48) in eine der Gleichungen (5.47) ein, so erhält man die Bildgröße

$$y' = \frac{y n_L}{n_L \cos\left(\sqrt{a}\, l\right) + n_A s \sqrt{a} \sin\left(\sqrt{a}\, l\right)} \tag{5.49}$$

und daraus den Abbildungsmaßstab $\beta' = y'/y$.

Mit Hilfe der Brennweite nach Gl. (5.45) kann man umformen in:

$$\beta' = \frac{f'}{s + f' \cos\left(\sqrt{a}\, l\right)}. \tag{5.50}$$

Numerische Apertur. Die maximale numerische Apertur ergibt sich aus der Forderung, daß der Randstrahl des einfallenden Strahlenbündels in der Gradientenfaser maximal bis zum wirksamen Faserradius r_F ausgelenkt werden darf (Abb. 5.12). Mit der Gl. (5.39) folgt aus der Extremwertforderung $r'(z_1) = 0$

$$z_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}. \tag{5.51}$$

Damit ergibt sich für die maximale Strahlneigung innerhalb der Faser aus Gl. (5.38)

$$r'_e = r_F \sqrt{a}.$$

Mit dem Brechungsgesetz erhält man die maximale numerische Apertur zu

$$A = n \sin u = n_A r_F \sqrt{a}. \tag{5.52}$$

Transmissionsverluste. Lichtverluste werden in Gradientenfasern hauptsächlich durch

— Reflexionsverluste an den Endflächen und
— Lichtabsorption im inhomogenen Stoff

hervorgerufen. Die Reflexionsverluste lassen sich mit den Fresnelschen Formeln berechnen. Die Absorptionsverluste hängen von der Wellenlänge und vom Lichtweg in der Faser ab.

Farbfehler. Inhomogene Stoffe lassen sich aus homogenen Stoffen herstellen, indem durch eine thermisch angeregte Diffusion Substanzen in die Faser eingebracht werden. Die Konzentration der einzelnen Komponenten des inhomogenen Stoffes ist ortsabhängig, wodurch sich ein Brechzahlgradient herausbildet. Infolge der Wechselwirkung der einzelnen Komponenten des inhomogenen Stoffes in Abhängigkeit von ihrer Konzentration mit dem Licht ist die Brechzahlverteilung wellenlängenabhängig. Das bedeutet, daß bei der Abbildung Farbfehler und bei der Signalübertragung Verzerrungen auftreten.

5.2. Dispergierende Funktionselemente

5.2.1. Dispersionsprismen

Ein dispergierendes Funktionselement zerlegt das Licht spektral. Hauptanwendungsgebiete der dispergierenden Funktionselemente sind

— die Spektroskopie (funktionsbestimmendes Element der Spektrografen);
— die Ausfilterung von quasimonochromatischem Licht aus polychromatischem Licht (funktionsbestimmendes Element der Monochromatoren).

Die wichtigsten dispergierenden Funktionselemente sind:

— Dispersionsprismen (Brechung des Lichtes),
— Beugungsgitter (Beugung des Lichtes),
— Etalons und Keile (Interferenz des Lichtes).

Wir behandeln zunächst die Dispersionsprismen.

In der Mathematik wird unter einem Prisma ein Körper verstanden, dessen Grund- und Deckfläche kongruente Vielecke darstellen und dessen Seitenflächen Parallelogramme sind. Für die Zwecke der technischen Optik ist diese Definition um einen funktionellen Gesichtspunkt zu erweitern.
Wir definieren:

> Ein Prisma ist ein Körper aus einem lichtdurchlässigen Stoff, der mindestens zwei ebene und nichtparallele optisch wirksame Flächen hat.

Die optische Wirkung besteht im allgemeinen aus Reflexionen und Brechungen. Im Gegensatz zur Definition der Mathematik sind für ein Prisma in der technischen Optik die Form und die Beschaffenheit der optisch nicht wirksamen Flächen für die Funktion unwesentlich.

> Ein Dispersionsprisma ist ein Prisma mit mindestens zwei brechenden Flächen. Der Winkel zwischen zwei brechenden Flächen ist ein brechender Winkel γ. Ein Dispersionsprisma zerlegt das Licht spektral.

(Eine Grenzfläche, durch die das Licht senkrecht hindurchgeht, betrachten wir hier als brechende Fläche.)
Die spektrale Zerlegung des Lichtes durch ein Prisma kann bewußt genutzt oder unerwünscht sein. Letzteres ist der Fall, wenn das Licht vom Prisma nur abgelenkt werden soll. Wir sprechen dann nicht von einem Dispersionsprisma. Die Dispersion des Lichtes kann nicht geometrisch-optisch, sondern nur wellenoptisch verstanden werden. Deshalb gilt:

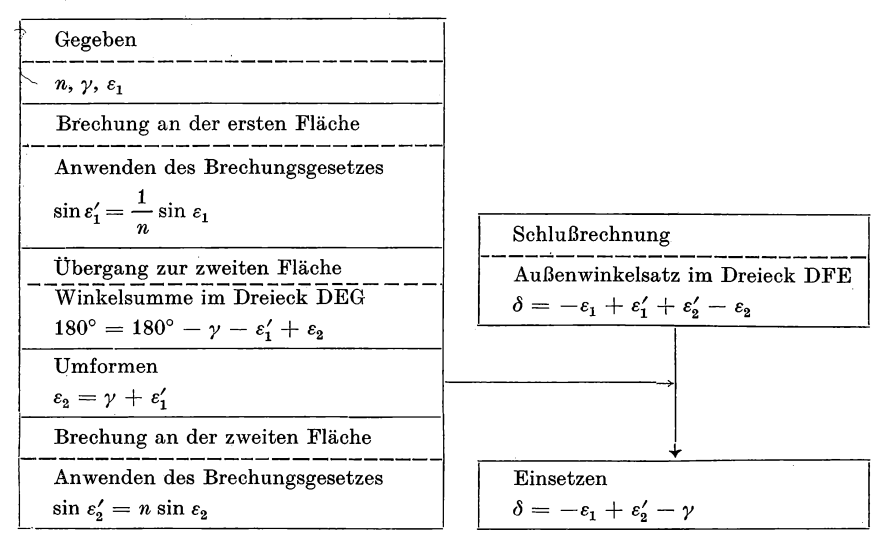
> Ein Dispersionsprisma ist ein wellenoptisches Funktionselement. Seine Hauptfunktion ist die spektrale Zerlegung des Lichtes. Die Ablenkung des Lichtes stellt eine Nebenfunktion dar.
> Da die Hauptfunktion auf der Brechung des Lichtes beruht, kann das Dispersionsprisma auch wie ein geometrisch-optisches Funktionselement behandelt werden.

Die Aufgabe besteht zunächst darin, die Ablenkung δ eines Lichtstrahls zu berechnen. Für einen Lichtstrahl beliebiger Richtung ist diese Aufgabe schwierig zu lösen. Wir beschränken uns auf die Berechnung der Ablenkung eines Lichtstrahls, der im Hauptschnitt verläuft.

Der Hauptschnitt zweier brechender Prismenflächen steht senkrecht auf der brechenden Kante. Diese ist die Schnittgerade der brechenden Flächen. Ein Lichtstrahl, der im Hauptschnitt einfällt, bleibt im Hauptschnitt.

Wir haben also den Vorteil, daß wir den Strahlverlauf in einer Ebene behandeln können. Eine geschlossene Formel für die Ablenkung δ wäre aber trotzdem unhandlich. Wir leiten deshalb einen Formelsatz ab, mit dem die einzelnen Größen schrittweise zu berechnen sind.
Wir nehmen an, daß das Prisma beiderseits an den gleichen Stoff angrenzt. Die relative Brechzahl für den Übergang in das Prisma sei n.

Tabelle 5.2
Ableitung der Gleichungen für das Dispersionsprisma



Die Ableitung der Beziehungen ist in der Tab. 5.2 enthalten. Die benötigten Größen entnehmen wir Abb. 5.15. Das Ergebnis ist folgender Formelsatz:

$$\sin \varepsilon_1' = \frac{1}{n} \sin \varepsilon_1, \tag{5.53}$$

$$\varepsilon_2 = \gamma + \varepsilon_1', \tag{5.54}$$

$$\sin \varepsilon_2' = n \sin \varepsilon_2, \tag{5.55}$$

$$\delta = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \gamma. \tag{5.56}$$

Die Anwendung von Formelsätzen zur schrittweisen numerischen Berechnung der Größen ist für die geometrische Optik typisch. (Vgl. die Strahldurchrechnung durch Flächenfolgen.) Sie führt im allgemeinen zu weniger Rechenfehlern als das Einsetzen von Zahlen in lange unübersichtliche Formeln. Außerdem kommt sie der Algorithmierung des Rechenprozesses entgegen und ist damit die Arbeitsweise, die auf Rechenanlagen direkt übertragbar ist.

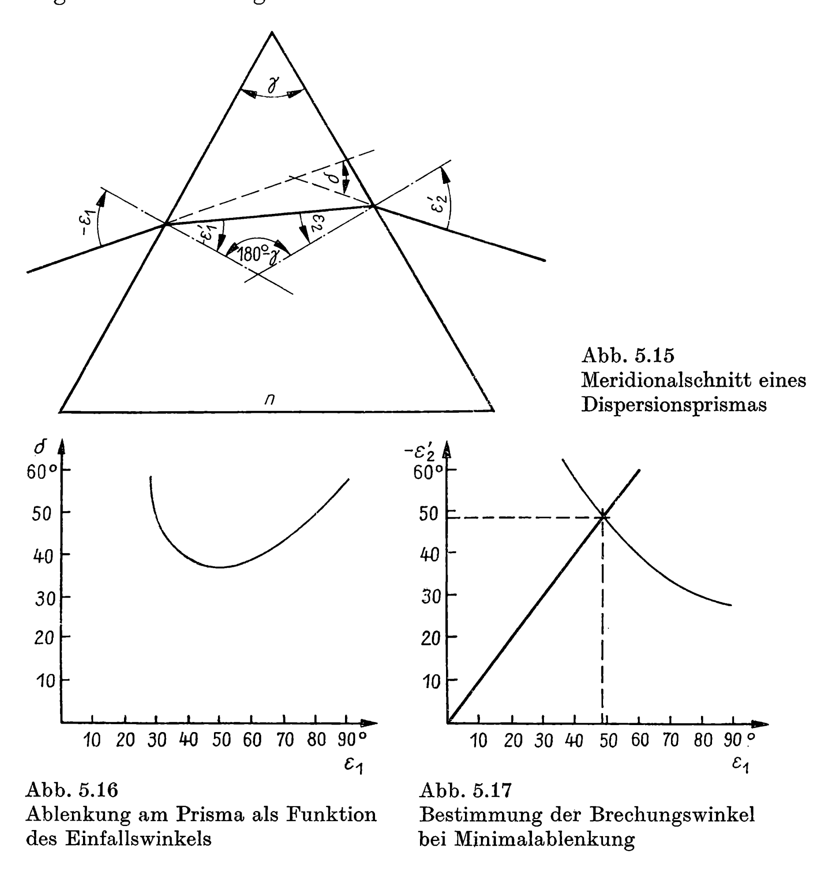


Abb. 5.15
Meridionalschnitt eines Dispersionsprismas

Abb. 5.16
Ablenkung am Prisma als Funktion des Einfallswinkels

Abb. 5.17
Bestimmung der Brechungswinkel bei Minimalablenkung

In der Abb. 5.16 ist für ein Prisma mit der Brechzahl $n = 1{,}5028$ und mit dem brechenden Winkel $\gamma = 60°$ die Ablenkung δ als Funktion des Einfallswinkels ε_1 grafisch dargestellt. Die Kurve beginnt bei $-\varepsilon_1 = 28°\,6'$, weil für betragsmäßig kleinere Einfallswinkel an der zweiten Fläche Totalreflexion eintritt. Die Ablenkung hat ein Minimum $\delta_{\text{Min}} = 37°\,24'$ bei einem Einfallswinkel von $-\varepsilon_1 = 48°\,52'$. In der Abb. 5.17 sind die Funktion $\varepsilon_2' = f(-\varepsilon_1)$ und die Gerade $\varepsilon_2' = -\varepsilon_1$ dargestellt. Die Kurve $\varepsilon_2' = f(-\varepsilon_1)$ und die Gerade schneiden sich bei $-\varepsilon_1 = 48°\,52'$. Daraus folgt für das spezielle Beispiel, daß die Minimalablenkung bei

$$\varepsilon_2' = -\varepsilon_1 \tag{5.57}$$

vorliegt. Aus Gl. (5.57) folgt

$$\sin \varepsilon_2' = -\sin \varepsilon_1,$$

wegen Gl. (5.53) und Gl. (5.55) ist

$$n \sin \varepsilon_2 = -n \sin \varepsilon_1',$$

also auch

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_1'. \tag{5.58}$$

Tabelle 5.3
Ableitung der Winkelbeziehungen für die Minimalablenkung

Änderung der Ablenkung mit ε_1'
Ableiten von $\delta = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \gamma$

$$\frac{d\delta}{d\varepsilon_1'} = -\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_1'} + \frac{d\varepsilon_2'}{d\varepsilon_1'} = -\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_1'} + \frac{d\varepsilon_2'}{d\varepsilon_2}\,\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1'}$$

Ableiten von
$\varepsilon_1 = \operatorname{arc\,sin}(n \sin \varepsilon_1')$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_1'} = \frac{n \cos \varepsilon_1'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varepsilon_1'}}$$

Ableiten von
$\varepsilon_2' = \operatorname{arc\,sin}(n \sin \varepsilon_2)$

$$\frac{d\varepsilon_2'}{d\varepsilon_2} = \frac{n \cos \varepsilon_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varepsilon_2}}$$

Ableiten von $\varepsilon_2 = \gamma + \varepsilon_1'$

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1'} = 1$$

Bedingung für einen Extremwert

$$\frac{d\delta}{d\varepsilon_1'} = -\frac{n \cos \varepsilon_1'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varepsilon_1'}} + \frac{n \cos \varepsilon_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varepsilon_2}} = 0$$

Umformen

$$\frac{n \cos \varepsilon_1'}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varepsilon_1'}} = \frac{n \cos \varepsilon_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varepsilon_2}}$$

Bedingung für die Existenz der Gleichung
$\varepsilon_1' = \pm \varepsilon_2$

Anwenden der Vorzeichenregel
$\varepsilon_1' = -\varepsilon_2$

Die Gleichungen (5.57) und (5.58) leiten wir in der Tab. 5.3 allgemein ab. Es gilt also:

> Die Ablenkung δ hat ihren kleinsten Wert, d. h. es liegt die Minimalablenkung vor, wenn das Licht im Hauptschnitt symmetrisch verläuft (Abb. 5.18).

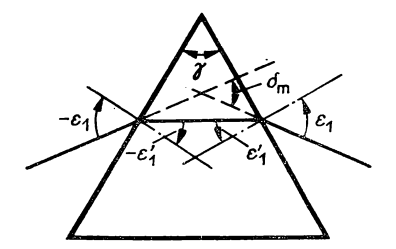
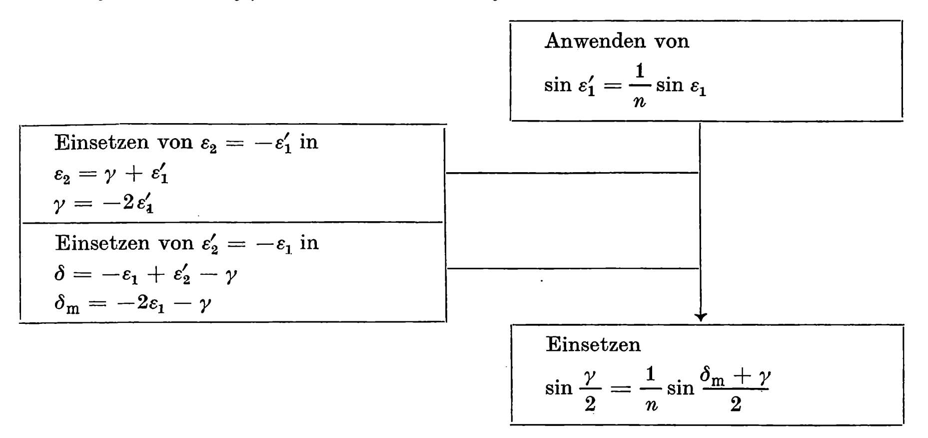


Abb. 5.18
Symmetrischer Strahlenverlauf im Dispersionsprisma

Zwischen der Minimalablenkung δ_m und dem brechenden Winkel läßt sich ein direkter Zusammenhang finden. Dieser wird in der Tab. 5.4 hergestellt und führt auf

$$\sin\frac{\delta_m + \gamma}{2} = n \sin\frac{\gamma}{2}. \tag{5.59}$$

Tabelle 5.4
Ableitung der Gleichung für die Minimalablenkung



Anwenden von
$\sin\varepsilon_1' = \frac{1}{n}\sin\varepsilon_1$

Einsetzen von $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1'$ in
$\varepsilon_2 = \gamma + \varepsilon_1'$
$\gamma = -2\varepsilon_1'$

Einsetzen von $\varepsilon_2' = -\varepsilon_1$ in
$\delta = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \gamma$
$\delta_m = -2\varepsilon_1 - \gamma$

Einsetzen
$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{n}\sin\frac{\delta_m + \gamma}{2}$

Diese Gleichung stellt die Grundlage für die Messung der Brechzahl des Prismenwerkstoffs dar. Der brechende Winkel und die Minimalablenkung δ_m können mit einem Goniometer gemessen werden.

Prismen-Anordnungen. Im einfachsten Fall besteht das Optik-Schema eines Monochromators aus einem Beleuchtungsspalt, der mittels eines Kollimators ins Unendliche abgebildet wird, dem Dispersionsprisma und einem Fernrohrobjektiv, das den Eintrittsspalt in den Austrittsspalt abbildet. Das gewünschte Wellenlängen-

intervall wird durch das Drehen des Prismas eingestellt (Abb. 5.19). Ohne besondere Maßnahmen läßt sich nicht erreichen, daß nach dem Justieren auf Minimalablenkung für eine Wellenlänge auch die anderen Wellenlängen in Minimalablenkung auf den Austrittsspalt fokussiert werden.

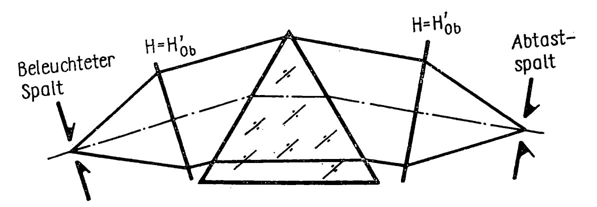


Abb. 5.19
Optikschema des Prismenmonochromators

Es wurden deshalb Prismenformen sowie Baugruppen aus Dispersionsprismen und Spiegelflächen entwickelt, deren Gesamtablenkung unabhängig von der Wellenlänge ist. Bei ihnen ist dann nur die Minimalablenkung für eine Wellenlänge einzujustieren, um die Minimumsbedingung für alle Wellenlängen zu erfüllen.

Wadsworth-Anordnung. Abb. 5.20 zeigt die Kombination aus Dispersionsprisma und Planspiegel. Die Ziffern bei den Winkeln geben die Reihenfolge der Winkelbestimmung an. Das Ergebnis für die Gesamtablenkung durch Prisma und Spiegel ist

$$\delta_{P+S} = 180^\circ - 2\beta. \tag{5.60}$$

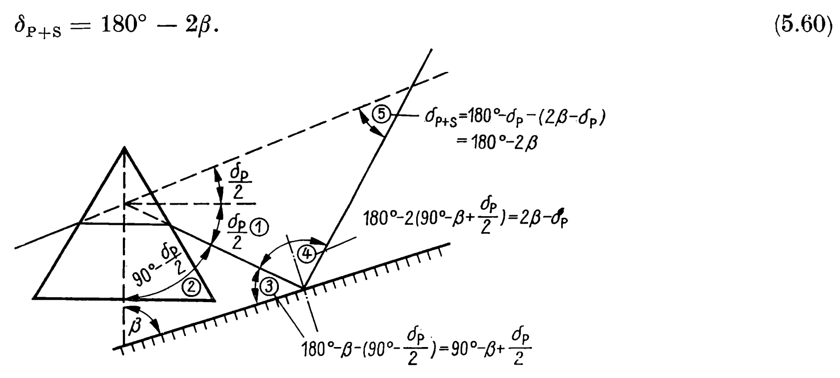


Abb. 5.20
Kombination aus Prisma und Planspiegel

Die Ablenkung ist also sowohl vom Einfallswinkel ε_1 wie auch von der Wellenlänge λ unabhängig. Eine Drehung des Gesamtsystems ändert die Ablenkung nicht. Für $\beta = 90^\circ$ wird $\delta_{P+S} = 0$ (Abb. 5.21). Diese Anordnung des Planspiegels, bei der das Licht nicht abgelenkt wird, wird Wadsworth zugeschrieben.

Einprisma konstanter Ablenkung. Der Planspiegel kann wegen der Umkehrbarkeit des Strahlengangs auch vor dem Dispersionsprisma stehen. Der Spiegel läßt sich auch zwischen zwei Teilprismen anordnen. Die Abb. 5.22a···c zeigen den Übergang

vom Einzelprisma zur Baugruppe aus zwei Teilprismen und einem Planspiegel. Es gilt ebenfalls

$$\delta_{P+S} = 180° - 2\beta.$$

Durch Anschleifen der beiden brechenden Flächen und der Spiegelfläche an einen Glaskörper (gestrichelt gekennzeichnet) entsteht ein sogen. „Einprisma" mit konstanter Ablenkung.

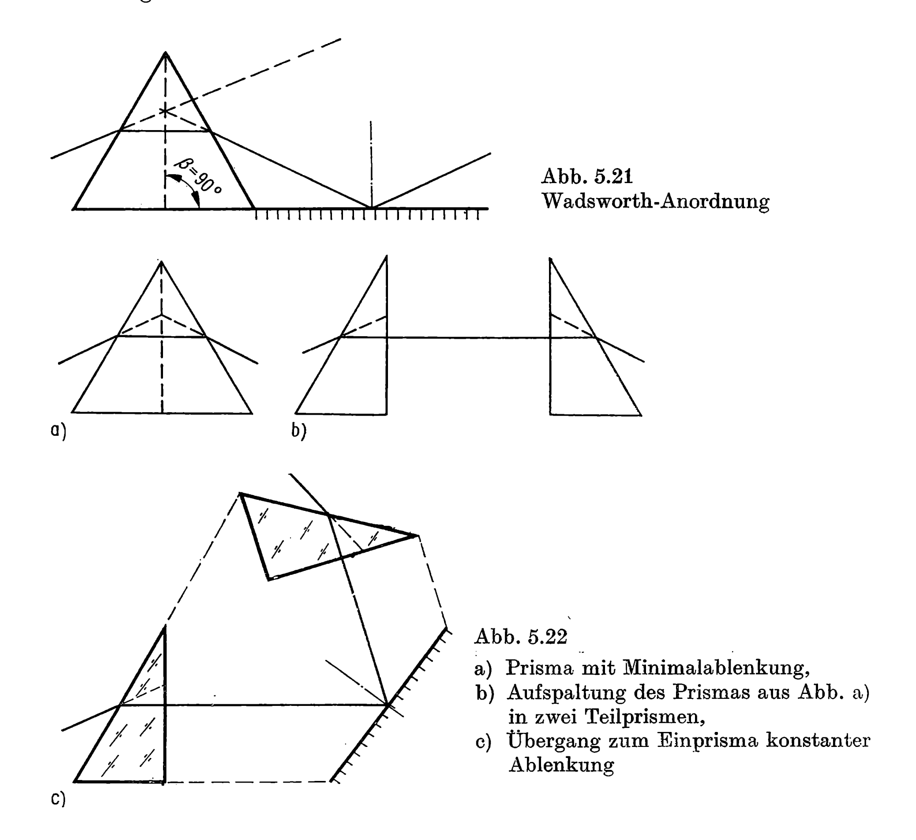


Abb. 5.21
Wadsworth-Anordnung

Abb. 5.22
a) Prisma mit Minimalablenkung,
b) Aufspaltung des Prismas aus Abb. a) in zwei Teilprismen,
c) Übergang zum Einprisma konstanter Ablenkung

Das Autokollimationsprisma (Abb. 5.23) ist der Sonderfall des Einprismas mit $\beta = 0$ und $\delta_{P+S} = 180°$.

Das Abbe-Prisma (Abb. 5.24) ist der Sonderfall des Einprismas mit $\beta = 45°$ und $\delta_{P+S} = 90°$, bei dem $\gamma = 60°$ gewählt ist. An der Spiegelfläche beträgt der Einfallswinkel 45°, so daß sie totalreflektierend sein kann.

Wird das Abbe-Prisma, wie in der Abb. 5.24 angegeben, aus drei Teilprismen zusammengesetzt, dann ist es möglich, die Dispersionsprismen aus Flintglas und den totalreflektierenden Halbwürfel zur Verringerung der Absorption im kurzwelligen

Bereich aus Kronglas zu fertigen. Bei der Herstellung aus einem Glaskörper ist es fertigungstechnisch günstiger, das Prisma um den in der Abb. 5.24 gestrichelt gezeichneten Teil zu vergrößern.

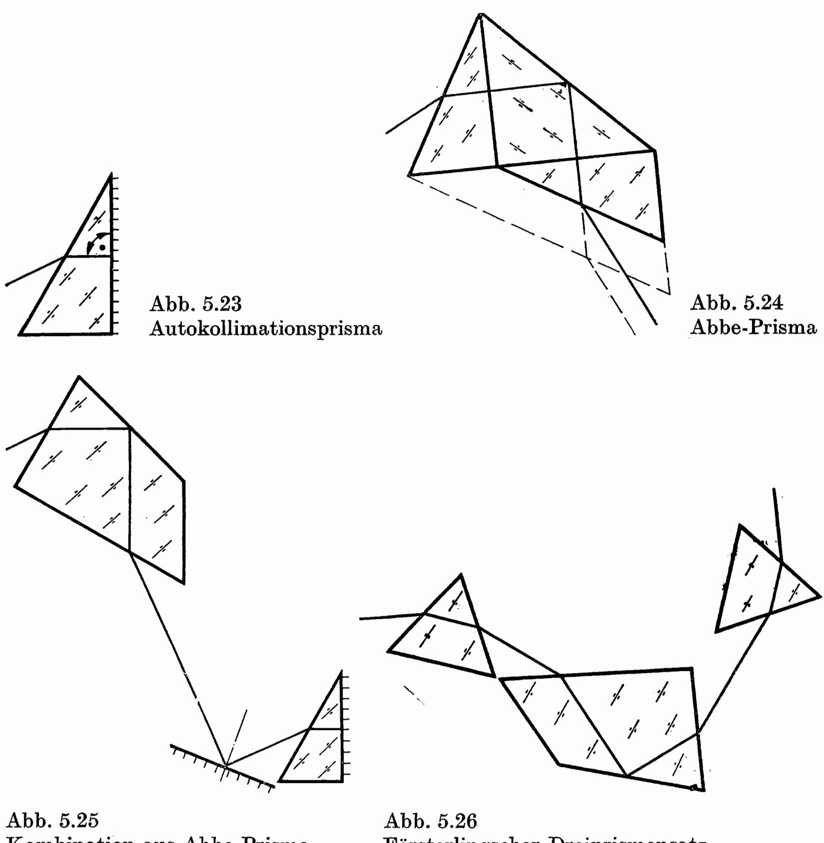


Abb. 5.23
Autokollimationsprisma

Abb. 5.24
Abbe-Prisma

Abb. 5.25
Kombination aus Abbe-Prisma, Planspiegel und Autokollimationsprisma

Abb. 5.26
Försterlingscher Dreiprismensatz

Baugruppen mit mehrfacher Dispersion entstehen, wenn ein Prisma doppelt durchsetzt oder mehr als ein Prisma verwendet wird. Abb. 5.25 zeigt ein Beispiel aus einem doppelt durchsetzten Abbe-Prisma, einem Autokollimationsprisma und einem Planspiegel (bei gleichen brechenden Winkeln der Prismen dreifache Dispersion). Konstante Ablenkung erfordert die Drehung der beiden Prismen um eine gemeinsame Achse bei feststehendem Spiegel.

Abb. 5.26 enthält den Försterlingschen Dreiprismensatz. Da sich die Ablenkungen der beiden einfachen Dispersionsprismen aufheben, bleibt nur die 90°-Ablenkung des Abbe-Prismas übrig. Prismenkombinationen ohne Spiegelfläche lassen sich ebenfalls mit konstanter Ablenkung ausbilden. Dazu ist es erforderlich, daß sie

entgegengesetzt zueinander verdreht werden. Kollimator und Fernrohrobjektiv müssen mitgedreht werden. Im Beispiel der Abb. 5.27 sind der Kollimator mit dem ersten, das Objektiv mit dem zweiten Prisma starr zu verbinden.

Geradsichtprismen lenken das Licht einer mittleren Wellenlänge nicht ab. Die Dispersion ist gering, so daß sie nur für einfache Handspektroskope geeignet sind.

Das Amici-Prisma (Abb. 5.28) besteht aus Kron- und Flintglasprismen, deren Ablenkung sich für die mittlere Wellenlänge aufhebt.

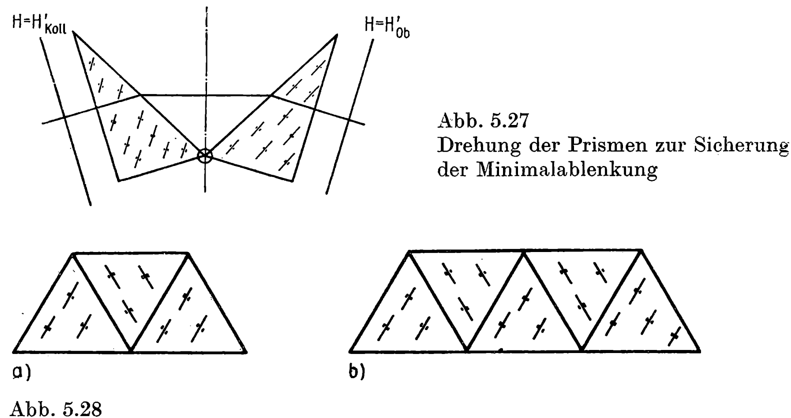


Abb. 5.27
Drehung der Prismen zur Sicherung der Minimalablenkung

Abb. 5.28
Amici-Prisma aus drei (a) bzw. fünf (b) Teilprismen

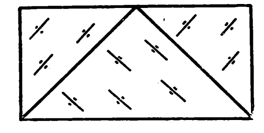


Abb. 5.29
Wernicke-Prisma

Geringere Reflexionsverluste an den Grenzflächen erhält man, wenn diese senkrecht zur Richtung des Lichtes der mittleren Wellenlänge orientiert werden. Ein Beispiel dafür ist das Wernicke-Prisma (Abb. 5.29).

5.2.2. Beugungsgitter

Die Beugungsgitter lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten einteilen. Wir beschränken uns auf Liniengitter und unterscheiden

— nach den beiden Möglichkeiten, die komplexe Amplitude des Lichtes zu beeinflussen, Amplituden- und Phasengitter, nach der Form der Gitterfläche Plan- und Konkavgitter sowie nach der Beobachtungsart Transmissions- und Reflexionsgitter.

Wir greifen aus den Kombinationen der drei angeführten Merkmale die praktisch wichtigsten heraus und gehen näher darauf ein.

— Ein planes Transmissionsgitter entsteht, wenn auf einen ebenen Gitterrohling, z. B. aus poliertem Glas, mit einem Diamanten in gleichmäßigen Abständen Striche geritzt werden. Dazu dienen die Gitterteilmaschinen.

Bei diesen wird entweder der Gitterrohling oder das Reißwerk, das den Diamanten trägt, mittels Präzisionsschrauben jeweils um die Gitterkonstante verschoben. Im ersten Fall bewegt sich der Diamant, im zweiten das Gitter längs einer Furche. Der gesamte Aufbau der Gitterteilmaschine muß sehr stabil sein. Für geringere Ansprüche an die Gleichmäßigkeit der Teilung werden Gitterkopien verwendet. Auf ein Glasgitter wird mehrere Male eine Kollodiumlösung gegossen. Nach dem Eintrocknen läßt sich ein dünner Film abziehen, der die Gitterstruktur besitzt. Auch andere Stoffe eignen sich für eine Kopie des Gitters. Beim planen Transmissionsgitter liegen die Ordnungen nach Gl. (2.329) in den Richtungen

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{m\lambda}{g}; \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; 3, \ldots.$$

Die Intensität in den Ordnungen hängt von der Furchenform ab und ist nicht in jedem Falle im voraus festzulegen.

— Bei planen Reflexionsgittern wird die Teilung in eine Metalloberfläche geritzt. Meistens ist das Spiegelmetall auf einen Glasträger aufgedampft. Welches Metall verwendet wird, richtet sich auch nach dem vorgesehenen Spektralbereich. Im Ultravioletten eignet sich z. B. Aluminium. Bei Reflexionsgittern läßt sich mit entsprechend geformten Diamanten im allgemeinen eine vorgeschriebene Furchenform gut annähern. Das gilt besonders für Gitter, die im langwelligen Spektralbereich (Infrarot) eingesetzt werden, weil dann die Gitterkonstante größer sein kann. Reflexionsgitter sind im wesentlichen Phasengitter, d. h., die Phase ist eine periodische Funktion des Ortes.

Die Ordnungen liegen auch beim Reflexionsgitter in den aus

$$\alpha_0' - \alpha = \frac{m\lambda}{g} \tag{5.61}$$

berechneten Richtungen. Der Richtungskosinus α_0' gibt die Richtung des reflektierten Lichtes an. Nach Abb. 5.30 ist

$$\hat{\alpha}_0' = 180^\circ - \hat{\alpha}_0, \quad \text{also} \quad \alpha_0' = -\alpha_0. \tag{5.62}$$

Auf die Richtung des einfallenden Lichtes bezogen gilt demnach

$$\alpha_0 + \alpha = -\frac{m\lambda}{g}. \tag{5.63}$$

Für das ungebeugte Licht der nullten Ordnung gilt $\alpha = -\alpha_0$. Hinsichtlich der Furchenform behandeln wir zwei Spezialfälle.

Das Laminargitter besitzt „kastenförmige" Furchen (Abb. 5.31). Wir untersuchen die Beugung für senkrechten Lichteinfall und für niedrige Ordnungen. Bei der Stufenhöhe h haben die in den Vertiefungen reflektierten Bündel gegenüber den

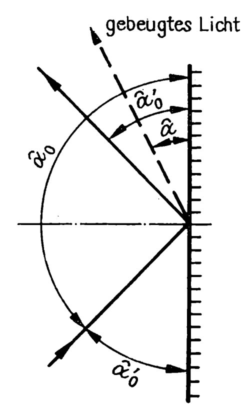


Abb. 5.30
Beugungswinkel bei Reflexionsgittern

auf den Erhöhungen reflektierten Bündeln den längeren Lichtweg $2h$. Die Phasendifferenz beträgt

$$\delta = \frac{4\pi h}{\lambda}. \tag{5.64}$$

Für die Strukturfunktion gilt

$$f(\varkappa) = \begin{cases} e^{j\delta}, & 0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0, \\ 1, & \varkappa_0 \leqq \varkappa \leqq 1. \end{cases} \tag{5.65}$$

δ hängt nicht von $\varkappa$ ab. Wir erhalten nach Gl. (2.339)

$$a_0 = e^{j\delta} \int_0^{\varkappa_0} d\varkappa + \int_{\varkappa_0}^1 d\varkappa = 1 + \varkappa_0(e^{j\delta} - 1) \tag{5.66}$$

und nach Gl. (2.338)

$$a_m = e^{j\delta} \int_0^{\varkappa_0} e^{2\pi j m\varkappa} d\varkappa + \int_{\varkappa_0}^1 e^{2\pi j m\varkappa} d\varkappa$$

$$= \frac{1}{2\pi j m} [e^{j\delta} (e^{2\pi j m\varkappa_0} - 1) + e^{2\pi j m} - e^{2\pi j m\varkappa_0}]$$

Wegen $\exp(2\pi j m) = 1$ gilt

$$a_m = \frac{1}{2\pi j m} (e^{2\pi j m\varkappa_0} - 1) (e^{j\delta} - 1). \tag{5.67}$$

Die Intensität des direkt reflektierten Lichtes ist proportional zu

$$a_0 a_0^* = 1 + 4\varkappa_0(\varkappa_0 - 1) \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{5.68}$$

Die Intensität in der m-ten Ordnung ist proportional zu

$$a_\mathrm{m} a_\mathrm{m}^* = \frac{4}{\pi^2 m^2} \sin^2 \pi m \varkappa_0 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{5.69}$$

Am häufigsten werden Laminargitter verwendet, für die $\varkappa_0 = 0{,}5$ ist. Die Gl. (5.68) und (5.69) spezialisieren sich in

$$a_0 a_0^* = 1 - \sin^2 \frac{\delta}{2}, \tag{5.70}$$

$$a_\mathrm{m} a_\mathrm{m}^* = \frac{4}{\pi^2 m^2} \cdot \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{5.71}$$

Die geraden Ordnungen fallen aus. Für die ungeraden Ordnungen gilt

$$a_\mathrm{m} a_\mathrm{m}^* = \frac{4}{\pi^2 m^2} \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \; (m \text{ ungerade}) \cdot \tag{5.72}$$

Wählen wir $h = \lambda/4$, dann wird nach Gl. (5.64) $\delta = \pi$. Es ist

$$a_0 a_0^* = 0, \qquad a_\mathrm{m} a_\mathrm{m}^* = \frac{4}{\pi^2 m^2}, \; (m \text{ ungerade}). \tag{5.73a, b}$$

Die nullte Ordnung, die wegen der fehlenden Dispersion bedeutungslos ist, wird unterdrückt. Die gesamte Energie ist in den Spektren enthalten. Die größte Intensität hat eine Linie mit der Wellenlänge $\lambda = 4h$, die „blaze-Wellenlänge" des Gitters genannt wird, in der ersten Ordnung. Ein Vergleich von Gl. (5.73b) mit dem nach Gl. (2.343) gebildeten Wert $a_\mathrm{m} a_\mathrm{m}^* = 1/\pi^2 m^2$ ($\varkappa_0 = 0{,}5$; m ungerade) zeigt, daß

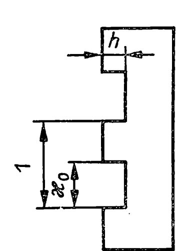


Abb. 5.31
Laminargitter

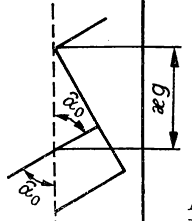


Abb. 5.32
Echelettegitter

die Spektren des Laminargitters die vierfache Intensität der Spektren eines „kastenförmigen" Transmissionsgitters haben.

Das Echelettegitter hat „sägezahnförmige" Furchen (Abb. 5.32). Die Furchenform dient wie beim Laminargitter zur Verstärkung der Intensität in den höheren Ordnungen. Das Echelettegitter hat den Vorteil, daß das Hauptmaximum in jede belie-

bige Ordnung gelegt werden kann. Die Flanken einer Furche sollen einen rechten Winkel miteinander bilden. Das Lichtbündel treffe senkrecht auf die lange Flanke auf (Abb. 5.32). Es gilt

$$\Delta L = 2\varkappa g \alpha_0, \quad \text{also} \quad \delta = \frac{4\pi\varkappa g \alpha_0}{\lambda}. \tag{5.74}$$

Wir führen die Abkürzung $2\pi g \alpha_0/\lambda = c$ ein. Die Strukturfunktion lautet

$$f(\varkappa) = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}c\varkappa}. \tag{5.75}$$

Nach Gl. (2.338) und Gl. (2.339) erhalten wir die Fourierkoeffizienten durch

$$a_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\mathrm{j}c\varkappa} \mathrm{d}\varkappa = \frac{1}{2\mathrm{j}c} (\mathrm{e}^{2\mathrm{j}c} - 1) \tag{5.76}$$

und

$$a_m = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\mathrm{j}(c+m\pi)\varkappa} \mathrm{d}\varkappa = \frac{1}{2\mathrm{j}(c + m\pi)} [\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(c+m\pi)} - 1]. \tag{5.77}$$

Die Intensitäten sind proportional zu

$$a_0 a_0^* = \left(\frac{\sin c}{c}\right)^2 \tag{5.78}$$

bzw. zu

$$a_m a_m^* = \left[\frac{\sin(c + m\pi)}{c + m\pi}\right]^2. \tag{5.79}$$

Wenn wir verlangen, daß die m-te Ordnung in Richtung des einfallenden Lichtes reflektiert wird, dann muß $\alpha = \alpha_0$ und nach Gl. (5.63)

$$2\alpha_0 = -\frac{m\lambda}{g} \tag{5.80}$$

sein. Mit Gl. (5.80) ergibt sich $c = -m\pi$ sowie aus Gl. (5.78) und Gl. (5.79)

$$a_0 a_0^* = 0, \qquad a_m a_m^* = 1. \tag{5.81a, b}$$

Die aus Gl. (5.80) folgende Wellenlänge $\lambda = -\frac{2\alpha_0 g}{m}$ ist die blaze-Wellenlänge des Gitters. Die nullte Ordnung fällt weg, und die m-te Ordnung hat eine besonders hohe Intensität.

Echelettegitter werden besonders für Untersuchungen im infraroten Bereich eingesetzt. Die geringe Intensität der Strahlungsquellen erfordert eine gute Ausnutzung der Energie in diesem Spektralbereich.

Konkave Reflexionsgitter. Die Plangitter haben den Nachteil, daß sie nur in Verbindung mit abbildenden Optiken verwendbar sind. Werden dazu Linsen benutzt, dann kann deren Farbfehler stören. Bei Linsen und bei Spiegeln setzt die Wellenlängenabhängigkeit der Durchlässigkeit bzw. der Reflexion die Lichtstärke herab. Die maximalen Beugungswinkel sind durch die Fassungen begrenzt. Diese

Nachteile lassen sich teilweise beheben, wenn das Gitter die Abbildung selbst übernimmt, was bei den Konkavgittern der Fall ist.

Konkave Reflexionsgitter stellen Hohlspiegel dar, deren zu den Gitterstrichen senkrechte Sehne gleichmäßig geteilt ist (Abb. 5.33).

Konkavgitter eignen sich für den gesamten optischen Spektralbereich, besonders aber für den ultravioletten Bereich.

Konkave Reflexionsgitter werden von unserer Theorie der Beugungsgitter nicht erfaßt, weil wir stets über eine ebene Fläche integriert und Parallelbündel vorausgesetzt haben. Wir entwickeln daher eine vereinfachte Theorie des Konkavgitters, bei der nur die Lage der Beugungsmaxima bestimmt wird. Der Einfluß der Strukturfunktion bleibt unberücksichtigt, so daß wir keine Beziehung für die Intensitätsverteilung gewinnen.

In der Abb. 5.33 sei S der Beleuchtungsspalt, S′ der Ort der Registriereinrichtung (z. B. des Films). Die Gitterstriche stehen senkrecht auf der Zeichenebene. S und S′ sollen so gelegt werden, daß das Spektrum in S′ scharf abgebildet wird. Durch die Beugung am Gitter kommt von jeder Furche ein schmales Bündel, das wegen der kleinen Gitterkonstanten in sich keine nennenswerten Phasendifferenzen besitzt, zum Punkt S′. Damit in S′ die m-te Ordnung der Wellenlänge λ abgebildet wird, muß für jede Furche

$$l + l' = l_0 + l_0' + k \cdot m\lambda \tag{5.82}$$

gelten. k ist die von der Mitte aus gezählte Nummer der Furche. Gleichmäßige Teilung der Sehne bedeutet gleichmäßige Teilung der y-Achse, also

$$y = k \cdot g. \tag{5.83}$$

Mit Gl. (5.83) eliminieren wir k aus Gl. (5.82);

$$l + l' = l_0 + l_0' + \frac{my\lambda}{g}. \tag{5.84}$$

Wir berechnen l. Es ist nach Abb. 5.33

$$l^2 = (z - s)^2 + (y_0 - y)^2, \tag{5.85a}$$

$$l_0^2 = s^2 + y_0^2, \tag{5.85b}$$

$$r^2 = (z - r)^2 + y^2. \tag{5.85c}$$

Wir setzen z aus Gl. (5.85c) in Gl. (5.85a) ein, vernachlässigen z^2 gegenüber y^2 und erhalten

$$l = l_0 \sqrt{1 + \frac{y^2}{l_0^2}\left(1 - \frac{s}{r}\right) - \frac{2yy_0}{l_0^2}}. \tag{5.86}$$

Die Reihe

$$l = l_0 \left\{1 + \frac{y^2}{2l_0^2}\left(1 - \frac{s}{r}\right) - \frac{yy_0}{l_0^2} - \left[\frac{1}{8}\,\frac{y^2}{l_0^2}\left(1 - \frac{s}{r}\right) - \frac{2yy_0}{l_0^2}\right]^2 + \cdots\right\} \tag{5.87}$$

brechen wir mit dem in y quadratischen Glied ab und eliminieren y_0^2 mit Hilfe von Gl. (5.85b). Es ergibt sich

$$l = l_0 + \frac{y^2 s}{2 \cdot l_0}\left(\frac{s}{l_0^2} - \frac{1}{r}\right) - \frac{y y_0}{l_0}. \tag{5.88}$$

Die Berechnung von l' verläuft nach dem gleichen Schema. l und l' setzen wir in Gl. (5.84) ein. Die Gleichung

$$\frac{y^2}{2}\left[\frac{s}{l_0}\left(\frac{s}{l_0^2} - \frac{1}{r}\right) + \frac{s'}{l_0'}\left(\frac{s'}{l_0'^2} - \frac{1}{r}\right)\right] - y\left(\frac{y_0}{l_0} + \frac{y_0'}{l_0'} + \frac{m\lambda}{g}\right) = 0 \tag{5.89}$$

muß für sämtliche aus Gl. (5.83) folgenden y-Werte erfüllt sein. Dies ist nur möglich, wenn die Koeffizienten der Potenzen von y einzeln verschwinden. Aus

$$\frac{y_0}{l_0} + \frac{y_0'}{l_0'} = -\frac{m\lambda}{g} \tag{5.90}$$

folgt mit (Abb. 5.33)

$$\cos \hat{\alpha}_0 = \alpha_0 = \frac{y_0}{l_0} \quad \text{und} \quad \sin(\hat{\alpha} - 90^\circ) = -\alpha = -\frac{y_0'}{l_0'}$$

$$\alpha_0 + \alpha = -\frac{m\lambda}{g}. \tag{5.91}$$

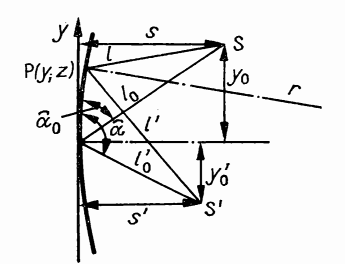


Abb. 5.33
Konkaves Reflexionsgitter

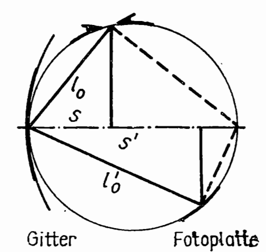


Abb. 5.34
Rowland-Kreis

Die Gl. (5.63) für die Richtung der Maxima gilt auch beim Konkavgitter. Die Gleichung

$$\frac{s}{l_0}\left(\frac{s}{l_0^2} - \frac{1}{r}\right) + \frac{s'}{l_0'}\left(\frac{s'}{l_0'^2} - \frac{1}{r}\right) = 0 \tag{5.92}$$

ist am einfachsten zu erfüllen, wenn

$$\frac{s}{l_0^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{s'}{l_0'^2} = \frac{1}{r}$$

oder

$$sr = l_0^2, \qquad s'r = l_0'^2 \tag{5.93a, b}$$

gesetzt wird. In Gl. (5.93) drückt sich der Satz von Euklid bezüglich zweier rechtwinkliger Dreiecke aus, deren Hypotenuse der Durchmesser eines Kreises mit dem Radius $r/2$ ist (Abb. 5.34).

Bei einem Konkavgitter müssen Beleuchtungsspalt und Empfänger auf einem Kreis mit dem Radius $r/2$, dem sogenannten Rowland-Kreis, liegen.

Bei einem Konkavgitter wird mit schrägen Bündeln abgebildet. Deshalb liefert es astigmatische Bilder. Es gibt verschiedene Anordnungen, bei denen der Fehler gering ist (vgl. [8]). Über konstruktive Lösungen zur zwangsweisen Führung von Spalt und Bild auf dem Rowland-Kreis lese man ebenfalls in [8] nach.

Teilungsfehler lassen sich bei der Gitterherstellung nicht vermeiden. Sie werden nach ihren Auswirkungen eingeteilt.

Periodische Teilungsfehler werden durch die Präzisionsschrauben, die dem Verschieben um die Gitterkonstante dienen, und durch den Antrieb der Teilmaschine hervorgerufen. Im Spektrum äußern sie sich in falschen Linien, die symmetrisch zur Mutterlinie liegen und Gittergeister genannt werden.

Statistische Teilungsfehler drücken sich in zufälligen Schwankungen der Furchenlage und der Furchenform aus. Sie erzeugen Streulicht und heben damit den Untergrund des Spektrums an.

Fortschreitende Teilungsfehler, wie z. B. ein gleichmäßiges Anwachsen der Gitterkonstanten in einer Richtung, rufen bei Plangittern fokale Eigenschaften hervor. Bei Konkavgittern führen sie zu einer scheinbaren Änderung des Krümmungsradius. Nähere Ausführungen über Teilungsfehler sind in [8] enthalten.

5.2.3. Etalons

Etalons sind dispergierende Funktionselemente, deren Hauptfunktion auf der Interferenz des Lichtes beruht.

> Etalons im engeren Sinne stellen planparallele Platten mit örtlich konstanter optischer Dicke dar, deren Oberflächen stark reflektieren.
> Etalons dienen der Erzeugung von Mehrfachbündeln, die so miteinander interferieren, daß Haidingersche Ringe entstehen (Abschn. 2.5.3.).

Die optische Dicke nd muß bis auf Abweichungen von 10 nm konstant sein. Das Reflexionsvermögen der Oberflächen ist entweder durch je eine Metallschicht oder durch dielektrische Mehrfachschichten angehoben (Wirkungsweise wird im Abschn. 5.3.2. erläutert).

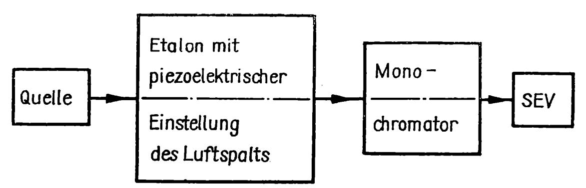


Abb. 5.35
Optik-Schema des Fabry-Perot-Interferometers

Etalons werden z. B. im Fabry-Perot-Interferometer eingesetzt, dessen Optik-Schema in der Abb. 5.35 angegeben ist. Nach Gl. (2.242) entsteht der helle Ring

maximaler Ordnung in der Nähe von $\varepsilon = 0$. Seine Ordnung folgt bei $n = 1$ aus

$$k_{\text{Max}} = \frac{2n''d}{\lambda}. \tag{5.94}$$

Die Brechzahl n'' des Etalons ist nicht so genau meßbar, wie es für absolute Wellenlängen-Bestimmungen notwendig wäre. Deshalb dienen Etalons zur Bestimmung kleiner Wellenlängen-Differenzen.

Etalons aus Rubin, Neodymglas u. a. werden als Laserresonatoren eingesetzt.

Lummer-Gehrcke-Platten können als Etalons mit nahezu streifendem Lichtaustritt aufgefaßt werden (Abb. 5.36). Das hohe Reflexionsvermögen, das zur Erzeugung von Mehrfachbündeln erforderlich ist, wird nicht durch Verspiegelung, sondern durch den großen Austrittswinkel erreicht.

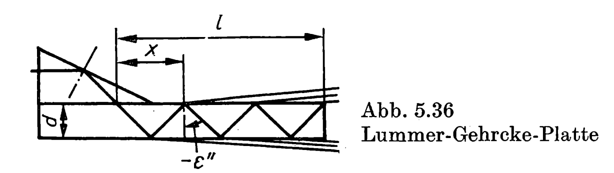


Abb. 5.36
Lummer-Gehrcke-Platte

Das Licht wird über ein Reflexionsprisma in das Etalon geleitet. Dadurch tritt das direkt reflektierte Licht nicht auf und die Streifensysteme durch die Interferenz der auf beiden Seiten der Platte austretenden Bündel sind nahezu gleich. Die maximale Ordnung beträgt nach Gl. (2.217a) mit

$$\delta = 2k\pi$$

$$k_{\text{Max}} = \frac{2n''d}{\lambda} \cos \varepsilon''. \tag{5.95}$$

Die Bündelanzahl folgt aus (Abb. 5.36)

$$p = \frac{l}{x}.$$

Mit $x = 2d \cdot \tan \varepsilon''$ erhalten wir

$$p = \frac{l}{2d \tan \varepsilon''}. \tag{5.96}$$

Es werden im allgemeinen Platten mit folgenden Abmessungen verwendet:

Länge 100 ··· 300 mm, Breite 20 ··· 50 mm, Dicke 3 ··· 10 mm. Bei der Länge $l = 200$ mm, der Dicke $d = 10$ mm und der Brechzahl $n'' = 1{,}52$ ergibt sich $\varepsilon'' = 41{,}1°$, $k_{\text{Max}} = 38\,800$ und $p = 11$. Durch den streifenden Lichtaustritt sind die Anforderungen an die Ebenheit der Fläche hoch.

Abweichungen bringen falsche Linien mit sich, die „Geister" genannt werden. Diese sind erkennbar, wenn zwei Lummer-Gehrcke-Platten gekreuzt hintereinander angeordnet werden.

Als *Etalons im weiteren Sinne* können auch planparallele Luftplatten zwischen verspiegelten Oberflächen von Glas- oder Quarzplatten aufgefaßt werden (Abb. 5.37). Die Glasplatten werden schwach keilförmig ausgebildet, damit störende Reflexe

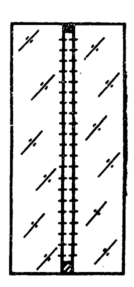


Abb. 5.37
Luftplatten-Etalon

unterdrückt werden (Keilwinkel bis zu 20′). Die Luftplattendicke kann mikrometrisch, pneumatisch oder magnetostriktiv verstellbar sein. Meistens werden jedoch feste Etalons verwendet, bei denen Distanzstücke aus Invar eine bis auf 1 μm konstante Dicke der Luftplatte garantieren. Der Längenausdehnungskoeffizient des Invars von $9 \cdot 10^{-7}$ grd^{-1} stimmt fast mit der relativen Wellenlängenänderung mit der Temperatur bei $\lambda = 590$ nm in Luft überein ($9{,}3 \cdot 10^{-7}$ grd^{-1}).

Es bleibt nur die Druckabhängigkeit der Wellenlänge zu berücksichtigen.

Luftetalons in Fabry-Perot-Interferometern dienen vorwiegend spektroskopischen Untersuchungen, z. B. der Feinstruktur von Spektrallinien.

5.2.4. Auflösungsvermögen. Dispersionsgebiet

Dispersionsprismen, Beugungsgitter und Etalons haben die Aufgabe, das Licht spektral zu zerlegen. Ihre Leistungsfähigkeit wird vor allem durch die Kennzahlen Auflösungsvermögen und Dispersionsgebiet beschrieben. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Auflösungsvermögen.

> Das Auflösungsvermögen ist der Kehrwert des gerade noch trennbaren relativen Wellenlängenintervalls.

Da nur der Betrag der Wellenlängendifferenz von Bedeutung ist, definieren wir das Auflösungsvermögen durch

$$A = \left| \frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} \right| . \tag{5.97}$$

Die Berechnung des Auflösungsvermögens im konkreten Fall ist eine Frage der Vereinbarung. Als Gütefunktion wird die durch Interferenz oder Beugung entstehende Intensitätsverteilung verwendet. Durch ein Gütekriterium, das einer Aussage über die notwendige Einsattlung der durch die Addition der Intensitätsverteilungen für die Wellenlänge $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ entstehenden Gesamtintensität entspricht, wird die Gütezahl Auflösungsvermögen abgeleitet (Abb. 5.38).

Beim Etalon mit endlicher Bündelanzahl besteht das Interferenzbild aus Hauptmaxima zwischen denen Minima und Nebenmaxima liegen. In diesem Fall legen wir fest:

> Das Wellenlängenintervall $\mathrm{d}\lambda$ wird aufgelöst, wenn das Hauptmaximum der Wellenlänge λ mit dem ersten Minimum der Wellenlänge $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ zusammenfällt.

Für die Phasendifferenz gilt allgemein

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L. \tag{5.98}$$

Differentiation nach λ ergibt

$$\mathrm{d}\delta = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta L \, \mathrm{d}\lambda. \tag{5.99}$$

Division von Gl. (5.99) durch Gl. (5.98) führt auf

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta} = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \tag{5.100}$$

Bei der Interferenz endlich vieler Bündel erhalten wir nach Gl. (2.236) Hauptmaxima für

$$\delta = 2k\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Das erste Minimum liegt nach Gl. (2.239) um

$$\mathrm{d}\delta = \frac{2\pi}{p}$$

vom Hauptmaximum entfernt. Damit folgt aus Gl. (5.100)

$$\left|\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right| = kp. \tag{5.101}$$

Das Auflösungsvermögen ist der Bündelanzahl und der Ordnung der Interferenzstreifen proportional.

Beim Etalon mit unendlicher Bündelanzahl sind keine Nebenmaxima der Intensität vorhanden (Abb. 2.73). Die „Schärfe" der Hauptmaxima wird durch deren Halbwertsbreite charakterisiert. Wir vereinbaren deshalb als Kriterium zur Ableitung des Auflösungsvermögens:

> Zwei Intensitätsverteilungen sind auflösbar, wenn ihre Hauptmaxima um die Halbwertsbreite auseinander liegen (Abb. 5.39).

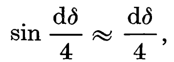
Die Halbwertsbreite wird als kleine Größe angenommen. Im Phasendifferenzmaß betrage sie $\mathrm{d}\delta$. Nach Gl. (2.229) ist

$$\frac{I''}{I} = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \dfrac{\mathrm{d}\delta}{4}} = \frac{1}{2} \tag{5.102}$$

zu setzen. Daraus folgt

$$(1 - R)^2 = 4R \sin^2 \frac{d\delta}{4}. \tag{5.103}$$

Wir ziehen die Wurzel und verwenden die Näherung



$$\sin \frac{d\delta}{4} \approx \frac{d\delta}{4},$$

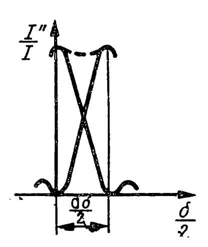


Abb. 5.38
Zur Definition des Auflösungsvermögens

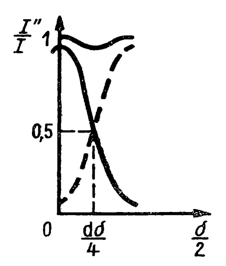


Abb. 5.39
Halbwertsbreite bei der Interferenz unendlich vieler Bündel

so daß Gl. (5.103) in

$$d\delta = \frac{2(1 - R)}{\sqrt{R}} \tag{5.104}$$

übergeht. Division von Gl. (5.104) durch Gl. (2.231) ergibt

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{1 - R}{\pi k \sqrt{R}}. \tag{5.105}$$

Aus Gl. (5.100) und Gl. (5.105) folgt

$$\left|\frac{\lambda}{d\lambda}\right| = k \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}. \tag{5.106}$$

Wir nennen die Größe

$$p_e = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R} \tag{5.107}$$

„effektive Bündelzahl" und erhalten analog zu Gl. (5.101)

$$\left|\frac{\lambda}{d\lambda}\right| = k p_e. \tag{5.108}$$

Bei $R = 0{,}81$ ist $p_e = 15$; bei $R = 0{,}9$ ist $p_e = 30$. Die effektive Bündelanzahl steigt stark mit dem Reflexionsvermögen an.

Beim Beugungsgitter besteht das Beugungsbild aus Hauptmaxima, Nebenmaxima und Nullstellen der Intensität. Das Kriterium der Auflösung ist dem für Etalons mit endlicher Bündelanzahl analog:

Das Wellenlängenintervall $\mathrm{d}\lambda$ wird aufgelöst, wenn das Hauptmaximum der Wellenlänge λ mit der ersten Nullstelle der Wellenlänge $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ zusammenfällt.

Ein Hauptmaximum liegt in der Richtung

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{m\lambda}{g}. \tag{5.109}$$

Differenzieren ergibt

$$\mathrm{d}(\alpha_0 - \alpha) = \frac{m}{g}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{5.110}$$

Division führt auf

$$\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\alpha_0 - \alpha}{\mathrm{d}(\alpha_0 - \alpha)}. \tag{5.111}$$

Wir setzen nach Gl. (2.339) und Gl. (2.331)

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{m\lambda}{g}, \quad \mathrm{d}(\alpha_0 - \alpha) = \frac{\lambda}{Ng} \tag{5.112a, b}$$

und erhalten

$$\left|\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right| = |m|\,N. \tag{5.113}$$

Das Auflösungsvermögen hängt nicht unmittelbar von der Gitterkonstanten ab. Diese wirkt sich nur indirekt aus, weil die Gesamtlinienanzahl N bei vorgegebener Gitterbreite der Gitterkonstanten umgekehrt proportional ist.

Das Auflösungsvermögen ist in höheren Ordnungen besser. Die maximale Ordnung der Gitterspektren ist jedoch begrenzt. Da α und α_0 Richtungskosinus sind, muß für eine beliebige Lichteinfallsrichtung

$$\alpha_0 - 1 \leqq \alpha_0 - \alpha \leqq \alpha_0 + 1 \tag{5.114}$$

sein. Mit Gl. (5.109) folgt daraus

$$\frac{g}{\lambda}(\alpha_0 - 1) \leqq m \leqq \frac{g}{\lambda}(\alpha_0 + 1). \tag{5.115}$$

Bei senkrechtem Lichteinfall ist $\alpha_0 = 0$, also

$$-\frac{g}{\lambda} \leqq m \leqq \frac{g}{\lambda}. \tag{5.116}$$

Die Spektren liegen, wie zu erwarten war, symmetrisch zum ungebeugten Licht.

Bei streifendem Einfall wird $\alpha_0 = 1$ und nach Gl. (5.114)

$$0 \leqq m \leqq \frac{2g}{\lambda}. \tag{5.117}$$

Wir erhalten nur die eine Hälfte der Spektren, und dadurch ist die maximale Ordnung doppelt so groß wie bei senkrechtem Lichteinfall. Aus Gl. (5.116) lesen wir ab, daß die Gitterkonstante mindestens der Wellenlänge gleich sein muß, wenn noch die erste Ordnung auftreten soll.

Dispersionsprisma. Wir berechnen das Auflösungsvermögen des Dispersionsprismas für Parallelbündel. Es ist dann ε_1 konstant und für das sogenannte Dispersionsvermögen gilt

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{5.118}$$

Wenn $\delta = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2' - \gamma$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_1' + \gamma$ ist

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{d\varepsilon_2'}{dn} \quad \text{und} \quad \frac{d\varepsilon_1'}{dn} = \frac{d\varepsilon_2}{dn}. \tag{5.119a, b}$$

Die Berechnung von $d\varepsilon_2'/dn$ aus den Prismendaten wird in der Tab. 5.5 ausgeführt (Abb. 5.40). Es ergibt sich mit Gl. (5.118)

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{\sin\gamma}{\cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{5.120}$$

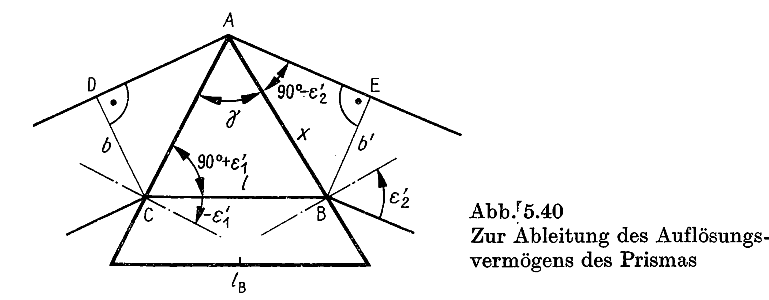


Abb. 5.40
Zur Ableitung des Auflösungsvermögens des Prismas

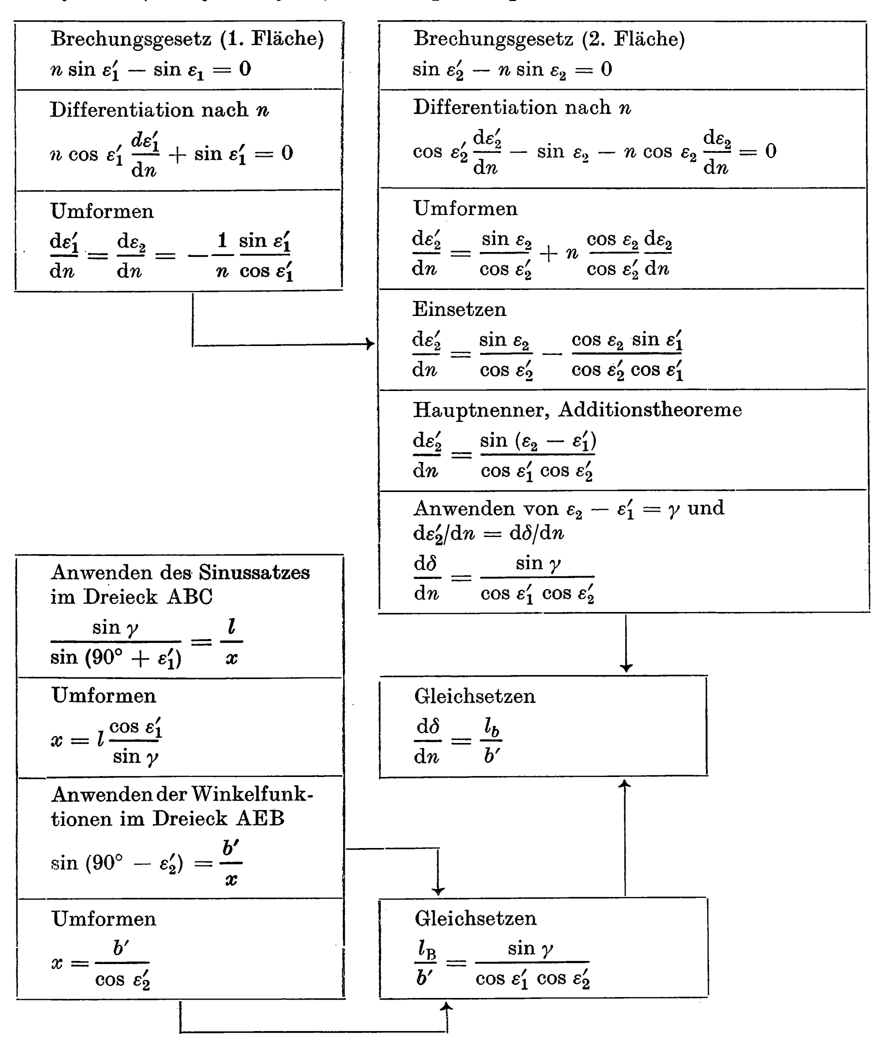
Weiter wird in der Tab. 5.5 abgeleitet, daß für die Minimalablenkung

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\varepsilon_1' \cos\varepsilon_2'} = \frac{l_B}{b} \tag{5.121}$$

gilt. Darin sin l_B die Basislänge des Prismas, b die Breite des einfallenden Parallelbündels. Aus Gl. (5.120) und Gl. (5.121) folgt

$$d\delta = \frac{l_B}{b}\frac{dn}{d\lambda}d\lambda. \tag{5.122}$$

Tabelle 5.5
Ableitung des Auflösungsvermögens für das Dispersionsprisma



Das Auflösungsvermögen wird durch die Beugung des Lichtes am Spalt mit der Breite b begrenzt. (Die Tatsache, daß eigentlich ein Rechteck der Breite b und der Prismenlänge l gebeugt wird, hat für die Auflösung keine Bedeutung.) Die erste Nullstelle der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$, die höchstens mit dem Hauptmaximum der Wellenlänge λ zusammenfallen darf, gehört zur Ablenkung

$$d\delta = \frac{\lambda}{b}. \tag{5.123}$$

Gleichsetzen von $\mathrm{d}\delta$ nach Gl. (5.112) und Gl. (5.123) ergibt für das Auflösungsvermögen

$$\left|\frac{\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right| = l_{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{5.124}$$

Das Auflösungsvermögen des Dispersionsprismas mit Minimalablenkung ist seiner Basislänge und der Dispersion des Prismenwerkstoffs proportional.

Die Funktion $n = n(\lambda)$ ist für die Gläser SF 644/344 und SK 622/600 in der Abb. 2.38 dargestellt. Die Tangente an die dort dargestellten Kurven ergibt die Dispersion $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$. Es ist zu erkennen, daß die Dispersion und damit das Auflösungsvermögen nach dem kurzwelligen Bereich hin zunimmt.

Dispersionsgebiet. Zwischen der Intensitätsverteilung eines dispergierenden Funktionselements und der Wellenlänge läßt sich nur dann ein eindeutiger Zusammenhang herstellen, wenn jedem Meßpunkt der Intensität eine Wellenlänge zugeordnet ist. Es kommt jedoch vor, daß sich in bestimmten Gebieten die Interferenzmaxima verschiedener Ordnung überlagern.

Das Dispersionsgebiet ist der Wellenlängenbereich, in dem zwischen dem Ort und der Wellenlänge ein eindeutiger Zusammenhang besteht.

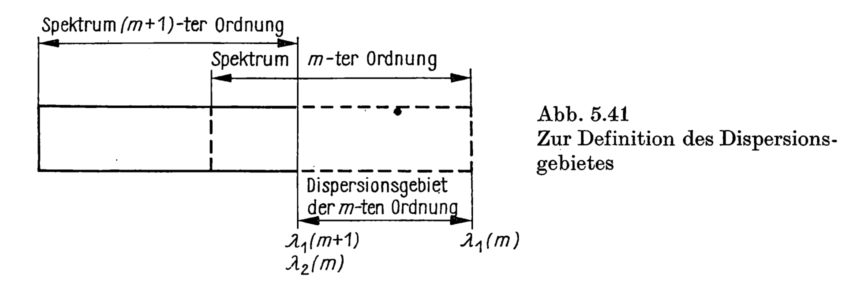


Abb. 5.41
Zur Definition des Dispersionsgebietes

Abb. 5.41 demonstriert das Dispersionsgebiet für die Spektren eines Beugungsgitters. Die Ablenkung des Lichtes für die eine Grenze des Dispersionsgebietes der m-ten Ordnung läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{m\lambda_2}{g} = \frac{(m+1)\,\lambda_1}{g}. \tag{5.125}$$

Daraus folgt für das Dispersionsgebiet

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{m}. \tag{5.126}$$

Allgemein formuliert gilt also

$$\Delta\lambda = \left|\frac{\lambda}{m}\right|. \tag{5.127}$$

Die analoge Überlegung für Etalons führt auf das Dispersionsgebiet in der Schreibweise

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k}. \tag{5.128}$$

Das Dispersionsprisma erzeugt nur ein Spektrum, so daß der Begriff des Dispersionsgebietes gegenstandslos ist. Das ausnutzbare Wellenlängenintervall ist in erster Linie durch die Absorption des Prismenwerkstoffs bestimmt.

Bei Beugungsgittern ist die Ordnung wesentlich kleiner als bei Etalons, so daß bei ihnen das Dispersionsgebiet größer ist. Bei Etalons ist im allgemeinen eine Vordispersion mit einem Gitter oder einem Prisma erforderlich, damit nur Licht des Dispersionsgebietes aufgespalten wird. Tab. 5.6 enthält eine Übersicht über das Auflösungsvermögen und das Dispersionsgebiet der drei behandelten Gruppen von dispergierenden Funktionselementen.

Tabelle 5.6
Auflösungsvermögen und Dispersionsgebiet bei $\lambda = 500$ nm

	Daten	Ordnung	Auflösungs-vermögen	Dispersionsgebiet in nm
Flintglas-Prisma	$b = 100$ mm	—	10000	—
Liniengitter	$N = 100000$	$m = 2$	200000	250
Etalon	$p_e = 60$	$k = 80000$	4800000	0,00625

5.3. Filternde Funktionselemente

5.3.1. Absorptionsfilter

Die filternden Funktionselemente im Sinne dieses Abschnitts könnten vollständig als Zeitfrequenzfilter bezeichnet werden.

> Filternde Funktionselemente verändern die spektrale Zusammensetzung des Lichtes.
> Farbfilter haben einen eingeschränkten spektralen Durchlässigkeitsbereich, Kantenfilter eine kurz- oder langwellige Grenze.
> Monochromat- oder Linienfilter erzeugen quasimonochromatisches Licht.

Filter betrachten wir als Funktionselemente. Die Änderung der spektralen Zusammensetzung des Lichtes ist auch mit Geräten lösbar, bei denen dispergierende oder filternde Funktionselemente eingesetzt sind (Monochromatoren). Außerdem können optisch wirksame Flächen eines optischen Systems so behandelt werden, daß dem Gesamtsystem eine Filterwirkung zukommt.

Wir rechnen die Reflexionsänderung von Oberflächen, die ebenfalls wellenlängenabhängig ist, zu den Filterwirkungen. Die möglicherweise mit der Reflexion ver-

bundene Richtungsänderung des Lichtbündels überlagert sich der Filterung als Nebenfunktion.

Tab. 5.7 enthält eine Übersicht über physikalische Effekte, die einzelnen Filtertypen oder Geräten zugrunde liegen. Die Geräte werden in diesem Buch nicht behandelt.

Tabelle 5.7
Physikalische Effekte, filternde Funktionselemente und Geräte

Effekt	Funktionselement	Gerät
Totalreflexion	Turner-Filter	—
Absorption	Farbgläser	—
Dispersion	—	Prismenmonochromator
Interferenz	Interferenzfilter	Interferenzfilter-Monochromator
Beugung	—	Gittermonochromator

Absorptionsfilter beruhen auf der wellenlängenabhängigen Absorption von optisch durchlässigen Stoffen. Planparallel geschliffene Farbgläser stellen die hochwertigsten Absorptionsfilter für optische Geräte dar. Sie sind besonders bekannt als Filter für fotografische Aufnahmen. Gelegentlich werden auch mit organischen Farbstoffen eingefärbte Gelatine- oder Folienfilter verwendet.

Die für Absorptionsfilter charakteristischen Kennzahlen wurden bereits im Abschnitt 2.3.1. abgeleitet. Wir wiederholen das dort dargelegte.

Der Reintransmissionsgrad kennzeichnet das Verhältnis aus der Intensität I_2 unmittelbar vor Austritt des Lichtes aus dem Filter und der Intensität unmittelbar nach Eintritt des Lichtes in den Filter. Er beschreibt also nur die Abnahme der Lichtintensität durch Absorption. Es ist

$$\vartheta = \frac{I_2}{I_1}. \tag{5.129}$$

Als Stoffkennzahl dient der Reintransmissionsgrad für die Einheitsdicke, der durch

$$\delta = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{d=1\,\mathrm{mm}} \tag{5.130}$$

definiert ist. Damit gilt

$$\vartheta = \delta^d. \tag{5.131}$$

Der Transmissionsgrad erfaßt zusätzlich die durch Reflexion an den Grenzflächen des Filters entstehende Energieabnahme. Es ist also

$$\tau = \frac{I''}{I}. \tag{5.132}$$

Für kleine Absorptionskonstanten und nahezu senkrecht auf die Grenzflächen auftreffendes Licht gilt angenähert nach Gl. (2.81)

$$\tau = P\vartheta. \tag{5.133}$$

Der Reflexionsfaktor P läßt sich nach Gl. (2.80) aus

$$P = \frac{2n}{n^2 + 1} \tag{5.134}$$

berechnen.

Für einige Farbfilter sind die Kenngrößen in der Tab. 5.8 enthalten. Der Verlauf des Reintransmissionsgrades ist in Abb. 5.42 dargestellt.

Tabelle 5.8
Eigenschaften einiger Filtergläser

alte Bezeichnung neue Bezeichnung Code-Nr.	BG 14 BE 45-92 653	VG 5 VE 54-89 684	RG 6 RDA 43-54 701
Art	Blauglas mit Rotabsorption	Grünglas	Rotglas
P_d	0,920	0,913	0,917
ϑ (480 nm)	0,97	0,56	0 46
ϑ (546 nm)	0,88	0,88	0,25
ϑ (800 nm)	0,28	0,50	0,98

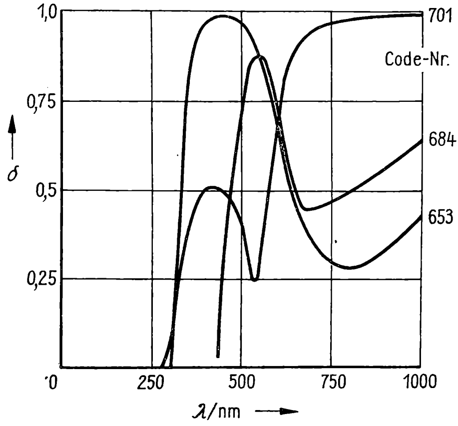


Abb. 5.42
Reintransmissionsgrad einiger Farbfilter

5.3.2. Interferenzfilter

Die Herstellung von Interferenzfiltern wurde möglich, nachdem die Technologie dünner Schichten industriell beherrscht wurde.

Interferenzfilter enthalten Systeme aus dünnen Schichten, in denen das Licht so interferiert, daß die spektrale Durchlässigkeit oder das spektrale Reflexionsvermögen an einen vorgegebenen Verlauf weitgehend angenähert wird.

Entsprechend dieser Begriffsbestimmung unterscheiden wir Interferenztransmissions- und Interferenzreflexionsfilter.

Ein Teil der dünnen Schichten muß genügend durchsichtig sein. Wegen der geringen Schichtdicken können wir die Absorption in Nichtleitern vernachlässigen. Wir bezeichnen deshalb ein System aus nichtleitenden Schichten als Interferenzfilter ohne Absorption. Interferenzfilter mit Absorption enthalten dünne und damit teildurchlässige Metallschichten.

Wir behandeln zunächst den theoretisch einfachen Fall der nichtleitenden Einfachschicht zwischen teildurchlässigen Metallschichten (Abb. 5.43).

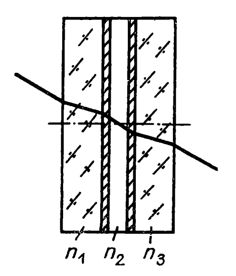


Abb. 5.43
Interferenzfilter mit Einfachschicht zwischen Metallschichten

Interferenzfilter mit Absorption (Einfachschicht). Die Anordnung nach Abb. 5.43 ist dem Fabry-Perot-Etalon analog. Die Metallschichten haben zwei wesentliche Wirkungen:

- Erhöhung des Reflexionsvermögens an den Oberflächen der nichtleitenden Schicht;
- Änderung der Phase des Lichtes (Phasensprung).

Die Reflexion an den Außenflächen der Träger ist für die Interferenz unwesentlich, sie geht in den Transmissionsgrad des Filters ein.

Wir berechnen den Reintransmissionsgrad eines Filters, auf den eine ebene Welle trifft. Innerhalb der nichtleitenden Schicht treten Mehrfachreflexionen auf. Sämtliche im hindurchgehenden Licht enthaltenen Bündel müssen durch beide Metallschichten gehen, wobei die komplexen Amplituden um die Faktoren σ_1 und σ_2 geschwächt und in der Phase um $\exp \mathrm{j}(\delta_{\mathrm{d}_1} + \delta_{\mathrm{d}_2})$ geändert werden. Die Größen σ_1, σ_2, δ_{d_1}, δ_{d_2} folgen aus den Formeln für die Metallreflexion.

Gegenüber dem direkt hindurchgelassenen Licht haben die übrigen Bündel je zwei zusätzliche Metallreflexionen mit dem Reflexionsfaktor $\alpha_1\alpha_2$ und der Phasenänderung $\delta_{\mathrm{r}_1} + \delta_{\mathrm{r}_2}$ erfahren. Zwei aufeinanderfolgende Bündel haben die Phasendifferenz δ durch den Wegunterschied in der Schicht. Die komplexe Amplitude eines beliebigen Bündels lautet also

$$a_k'' = a\sigma_1\sigma_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta_{\mathrm{d}_1}+\delta_{\mathrm{d}_2})}(\alpha_1\alpha_2)^{k-1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-1)(\delta_{\mathrm{r}_1}+\delta_{\mathrm{r}_2})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-1)\delta}. \qquad (5.135)$$

Wir nehmen an, daß beide Metallschichten gleich sind. Außerdem verwenden wir den Energiesatz in der Form

$$R + D + A = 1$$

(R = Reflexionsvermögen, D = Durchlässigkeit, A = Absorptionsvermögen).

Außerdem ist analog zu Gl. (2.201) und Gl. (2.202)

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^2 = R \quad \text{und} \quad \sigma_1\sigma_2 = 1 - R - A \tag{5.136, 5.137}$$

zu setzen.

Wegen der gleichen Einfallswinkel an den Metallschichten ist $\delta_{r_1} = \delta_{r_2} = \delta_r$. Mit Gl. (5.136) und Gl. (5.137) geht Gl. (5.135) über in

$$a_k'' = a(1 - R - A) \cdot e^{j(\delta_{d_1}+\delta_{d_2})} R^{k-1} \cdot e^{2j(k-1)\delta_r} \cdot e^{j(k-1)\delta}. \tag{5.138}$$

Die durch Interferenz der Teilbündel entstehende Amplitude beträgt

$$a'' = a(1 - R - A) \cdot e^{j(\delta_{d_1}+\delta_{d_2})} \sum_{k=1}^{\infty} R^{k-1} \cdot e^{2j(k-1)\delta_r} \cdot e^{j(k-1)\delta}. \tag{5.139}$$

Die Summation wird mit der Formel für die Summe der unendlichen geometrischen Reihe ausgeführt. Wir erhalten

$$a'' = a \frac{(1 - R - A) \cdot e^{j(\delta_{d_1}+\delta_{d_2})}}{1 - R \cdot e^{2j\delta_r} \cdot e^{j\delta}}. \tag{5.140}$$

Für die Intensität ergibt sich (vgl. Abschn. 2.5.2.)

$$I'' = I \frac{(1 - R - A)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} + \delta_r\right)}. \tag{5.141}$$

Für die Maxima gilt

$$I''_{\text{Max}} = I \left(\frac{1 - R - A}{1 - R}\right)^2, \quad \frac{\delta}{2} + \delta_r = k\pi. \tag{5.142, 5.143}$$

Die Durchlässigkeit hängt vom Absorptionsvermögen der Metallschichten ab und sinkt erwartungsgemäß mit wachsender Dicke der Verspiegelung.

Aus Gl. (5.143) ergibt sich unter Verwendung von Gl. (2.217a)

$$\frac{2\pi n_2 d \cos \varepsilon''}{\lambda_0} + \delta_r = k\pi. \tag{5.144}$$

Die erforderliche Schichtdicke beträgt

$$d = \frac{\lambda_0}{2\pi n_2 \cos \varepsilon''} (k\pi - \delta_r). \tag{5.145}$$

Nach dem Vorbild der Ableitung von Gl. (5.105) erhalten wir für die Halbwertsbreite der Durchlässigkeitsmaxima

$$\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1 - R}{\pi \sqrt{R} \left(k - \frac{\delta_r}{\pi}\right)}. \tag{5.146}$$

Wir diskutieren die Gleichungen (5.142), (5.145), (5.146) für senkrechten Lichtdurchgang und $n_1 = n_2 = n_3 = n$. Die Ergebnisse sind dann unabhängig von der Schwingungsebene des einfallenden Lichtes. Aus Gl. (5.145) folgt

$$d = \frac{\lambda_0}{2n}\left(k - \frac{\delta_r}{\pi}\right). \tag{5.147}$$

Für Silberschichten gilt bei $\varepsilon = 0$ praktisch unabhängig von der Schichtdicke angenähert

$$\delta_r = 0{,}25\pi. \tag{5.148}$$

Bei $\lambda_0 = 552$ nm und $n = 1{,}5$ ergibt sich für $k = 1$ eine Dicke von $d = 138$ nm. In den höheren Ordnungen ist d um Vielfache von $\lambda_0/2n = 184$ nm zu vergrößern. Die Eigenschaften zweier Filter, die sich in der Dicke der Silberschichten unterscheiden, sind in der Tab. 5.9 zusammengestellt. Folgende allgemeingültigen Ergebnisse sind abzulesen:

— Ein höheres Reflexionsvermögen setzt die Durchlässigkeit stark herab.
— Ein Filter 1. Ordnung läßt auch Licht mit kleinerer Wellenlänge hindurch.
— Ein Filter höherer Ordnung läßt auch Licht höherer und niedrigerer Wellenlänge hindurch.
— Filter höherer Ordnung haben geringere Halbwertsbreiten.

Tabelle 5.9
Vergleich von vier Interferenzfiltern

	Filter I	Filter II	Filter I und Filter II	
R	0,86	0,945	*1. Ordnung*	
A	0,02	0,025	d/nm	138
D	0,12	0,03	λ_{Max}/nm	552
I''_{Max}/I	0,734	0,298		236,57
1. Ordnung				150,55
$100\left\lvert\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right\rvert$	6,4%	2,4%		
			4. Ordnung	
4. Ordnung			d/nm	690
$100\left\lvert\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right\rvert$	1,28%	0,48%	λ_{Max}/nm	2760
				1182
				752,73
				552
				435,74

Soll ein Filter nur eine Ordnung hindurchlassen, also ein Linienfilter sein, dann müssen wir ihn mit einem zweiten Filter koppeln, der die übrigen Ordnungen unterdrückt. Das kann durch ein Farbglas erreicht werden. Handelsübliche Interferenzlinienfilter enthalten deshalb eingekittete Farbgläser.

Bei der Anwendung eines Interferenzfilters müssen wir darauf achten, daß er vom Parallelbündel senkrecht durchsetzt wird. Bei kleinen Neigungen verschiebt sich

sein Durchlässigkeitsmaximum nach kleineren Wellenlängen. Aus Gl. (5.145) folgt für unser Beispiel wegen $\varepsilon = \varepsilon''$ bei $n_1 = n_2$

$$\lambda_0(\varepsilon) = \frac{2nd}{k - \frac{\delta_r}{\pi}} \cos\varepsilon = \lambda_0(0)\cos\varepsilon. \tag{5.149}$$

Für kleine Winkel gilt

$$\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0(0)\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right). \tag{5.150}$$

Es handelt sich um einen quadratischen Effekt, so daß kleine Abweichungen von $\varepsilon = 0$ in Kauf genommen werden können. Abweichungen von der Parallelität innerhalb des Lichtbündels bewirken eine Abnahme der Wellenlänge des Lichtes nach dem Rande zu. Bei einem Bündel mit dem Öffnungswinkel 2u ergibt sich

$$\lambda_0\,(\varepsilon = 0) - \lambda_0\,(\varepsilon = u) = \lambda_0 - \lambda_0\cos u = \lambda_0(1 - \cos u). \tag{5.151}$$

Bei $u = 60°$ ist also z.B.

$$\lambda_0(\varepsilon = 60°) = \frac{1}{2}\lambda_0(\varepsilon = 0).$$

Schließlich ist zu beachten, daß das Licht bei schrägem Durchgang durch den Filter polarisiert wird. Die Beziehungen sind dann für R_s, D_s und R_p, D_p getrennt anzuwenden (Abschn. 5.4.5.). Die Intensität in den Maxima wird dadurch mit beeinflußt, daß die Metallschichten wellenlängenabhängig absorbieren. Dadurch wird u. a. der Einsatz von Interferenzfiltern im Ultravioletten und Infraroten beeinträchtigt.

Filterkombinationen ohne Kopplung. Interferenzfilter können miteinander kombiniert werden. Sie wirken dann so wie Anordnungen aus Farbgläsern. Die Durchlässigkeiten der einzelnen Filter sind miteinander zu multiplizieren, weil zwischen den wirksamen Schichten verschiedener Filter keine Interferenz des Lichtes eintritt. Wir sprechen deshalb auch von Filterkombinationen ohne Kopplung. Durch die Reflexionen an den Filteroberflächen wird die Durchlässigkeit herabgesetzt. Außerdem können bei parallelen Filtern störende Nebenbilder entstehen. Die Filter werden deshalb manchmal gegen die optische Achse geneigt. Dabei muß auf die veränderte Lage des Maximums geachtet werden.

Mehrfachschichten mit Kopplung. Wir sparen gegenüber den ungekoppelten Interferenzfiltern Metallschichten ein, vermindern also die Absorptionsverluste, wenn wir abwechselnd nichtleitende und leitende Schichten aufdampfen. Die Durchlässigkeit des Filters ist dann nicht mehr das Produkt aus den Durchlässigkeiten der Einzelschichten. Wegen der Interferenz sämtlicher durch das Schichtsystem hindurchgehenden Bündel müssen erst die komplexen Amplituden addiert werden, bevor daraus die Gesamtintensität gebildet werden kann. Die Schichten sind miteinander gekoppelt. Je weniger durchlässig die Metallschichten sind, desto geringer

ist die Kopplung. Formal bestehen Analogien zu den gekoppelten elektrischen Schwingkreisen, wie sie in den Bandfiltern vorkommen. Die Durchlässigkeitskurven entsprechen daher mit wachsender Kopplung — also mit steigender Durchlässigkeit der Metallschichten — immer mehr den typischen Bandfilterkurven mit einer Einsattelung des Maximums (Abb. 5.44a⋯c). Wir beschränken uns auf ein Beispiel

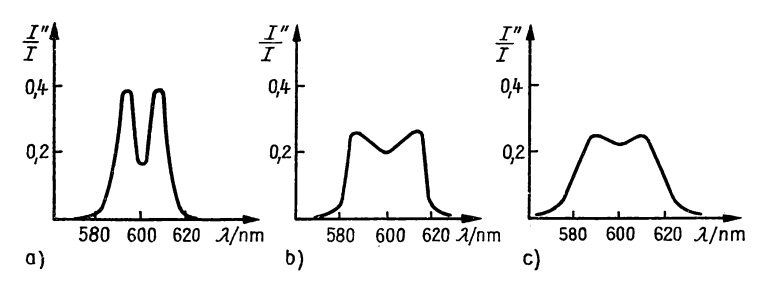


Abb. 5.44
Durchlässigkeiten bei gekoppelten Interferenzschichten
a) schwache, b) mittlere, c) starke Kopplung

aus [5]. Es handelt sich um ein Zweifachfilter, bei dem sämtliche Nichtleiter gleiche Brechzahl haben und die drei Metallschichten gleich sind. Die Daten der Metallschichten sind:

Abb. 5.44a Dicke $d = 30$ nm, Durchlässigkeit $D = 0{,}164$;
Abb. 5.44b Dicke $d = 20$ nm, Durchlässigkeit $D = 0{,}30$ und
Abb. 5.44c Dicke $d = 15$ nm, Durchlässigkeit $D = 0{,}40$.

Interferenzfilter ohne Absorption (Einfachschicht). Eine dünne nichtleitende Schicht zwischen gleichen Trägerplatten erzeugt wegen des geringen Reflexionsvermögens der Grenzflächen nur zwei Bündel wesentlicher Intensität. Die Durchlässigkeit hängt kosinusförmig von der Wellenlänge ab. Die Einfachschicht ist als Filter wenig geeignet.

Mehrfachschichten. Die Metallschichten in den Interferenzfiltern mit Absorption dienen der Erzeugung vieler interferierender Bündel. Ihr Nachteil ist die Absorption, die bei schmalen Halbwertsbreiten nur geringe Durchlässigkeiten ermöglicht. Die absorbierte Energie wird in Wärme umgewandelt, so daß bei hohen Intensitäten Spannungen entstehen können.

Mehrfachbündel müssen aber auch entstehen, wenn nichtleitende Schichten mit abwechselnd hoher und niedriger Brechzahl verwendet werden (damit das Reflexionsvermögen der Grenzflächen merklich ist). Deshalb eignen sich auch Schichtsysteme, die nur nichtleitende Schichten enthalten, als Interferenzfilter. Die Durchlässigkeitskurven solcher Filter haben wegen der starken Kopplung der Schichten den Charakter von Bandfilterkurven. Ein System aus mehreren Schichten mit abwechselnd hoher und niedriger Brechzahl besitzt prinzipiell eine Wellenlängenabhängigkeit der hindurchgelassenen Intensität, wie sie in der Abb. 5.45 dargestellt ist. Bei senkrechtem Lichtdurchgang muß die Schichtdicke jeweils ein ungerad-

zahliges Vielfaches von $\lambda_0/4n$ betragen (λ_0 = Vakuumwellenlänge des Minimums). Die Intensität im Minimum hängt von der Anzahl der Schichten ab. Abb. 5.46 enthält I''_{Min}/I als Funktion der Anzahl der Grenzflächen.

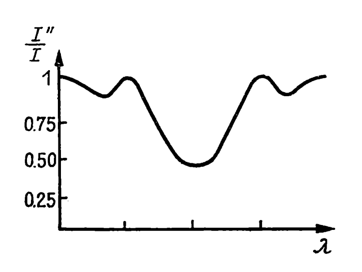


Abb. 5.45
Hindurchgelassene Intensität für ein System aus nichtleitenden Schichten

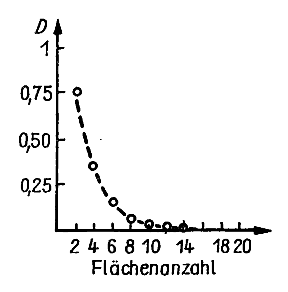


Abb. 5.46
Durchlässigkeit im Minimum als Funktion der Flächenanzahl

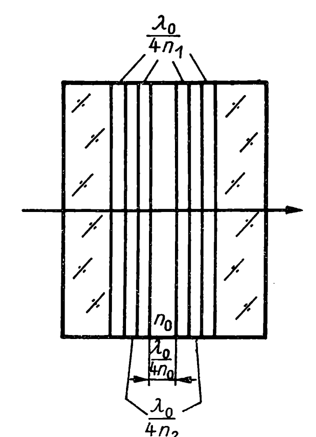


Abb. 5.47
Interferenzfilter aus nichtabsorbierenden Schichten

Da nach Abb. 5.45 ein Schichtsystem starke Reflexion in schmalen Wellenlängenbereichen hat, kann es in einem Linien-Interferenzfilter anstelle einer Metallschicht eingesetzt werden. Ein derartiger Linienfilter besteht aus einer $\lambda/2$-Schicht zwischen zwei Systemen aus Mehrfachschichten. Es hat den Vorteil einer geringen Halbwertsbreite bei niedriger Absorption (Abb. 5.47).

Die hochbrechenden Schichten können z. B. aus Zinksulfid ($n_1 = 2{,}3$), die niedrigbrechenden Schichten aus Kryolith ($n_2 = 1{,}3$) bestehen. Mit einer großen Anzahl an Schichten, bei denen allerdings die geringe Absorption und Streuung der Einzelschicht die Durchlässigkeit auf Werte unter 50% herabsetzen können, lassen sich Halbwertsbreiten unter 1 nm erreichen.

5.3.3. Reflexionsänderung

Bei den Interferenzfiltern, die wir im vorigen Abschnitt behandelten, wird das hindurchgelassene Licht ausgenutzt. Bei ihnen kommt es also auf den Verlauf der spektralen Durchlässigkeit an. Durch die Interferenz an dünnen Schichten wird aber ebenfalls das Reflexionsvermögen beeinflußt. Sowohl die Erhöhung des Reflexionsvermögens von Spiegeln als auch die Unterdrückung der Reflexion an Oberflächen haben praktische Bedeutung.

Entspiegelung. Unter der „Entspiegelung" versteht man das Bedampfen von Linsen-, Prismen- und Plattenflächen mit dünnen, wenig absorbierenden Schichten zum Zwecke der Reflexionsminderung durch Interferenz. Bei den Erzeugnissen des VEB Carl Zeiss Jena tragen diese Schichten die Handelsbezeichnung „T-Belag" bzw. bei mehreren Schichten „MC-Belag". Die Entspiegelung von Flächen an Linsen, Prismen und Planplatten, die das Licht nicht reflektieren sollen, hat drei wesentliche Vorteile:

- Da bei der Interferenz an praktisch nichtabsorbierenden Schichten der Energieerhaltungssatz erfüllt ist, ist der nichtreflektierte Lichtstrom im hindurchgelassenen Licht enthalten. Ein System, dessen Elemente entspiegelt sind, ist also „lichtstärker" als ein sonst gleiches, nichtentspiegeltes System.
- Das unkontrolliert reflektierte Licht ruft störende Nebenbilder und Reflexe hervor, die durch eine Entspiegelung weitgehend vermieden werden.
- Zwischen den Linsenflächen eines Systems treten Mehrfachreflexionen auf. Dadurch entsteht Streulicht, das den Kontrast des Bildes herabsetzt. Entspiegelte Systeme erzeugen kontrastreichere Bilder als nichtentspiegelte Systeme.

Das Beispiel einer nichtabsorbierenden Einfachschicht, die auf eine Planplatte aufgedampft ist, wollen wir quantitativ behandeln. Als Planplatte soll auch eine polierte Metallplatte zugelassen werden (Abb. 5.48). Die an der nichtabsorbierenden

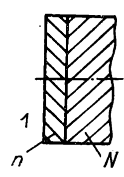


Abb. 5.48
Einfachschicht zur Reflexionsänderung

Schicht reflektierte Welle hat die Amplitude $a_1' = -\alpha_1 A$ (das Minuszeichen repräsentiert den Phasensprung). Die nächste Welle, die die Schicht verläßt, ist am Metall reflektiert (Faktor α_2) und durch die erste Fläche zweimal hindurchgelassen worden (in verschiedenen Richtungen, Faktor $\sigma_1\sigma_1'$). Sie hat gegenüber der direkt reflektierten Welle mit der Amplitude a_1' auf Grund des Weges in der Schicht die Phasendifferenz δ und infolge des bei der Metallreflexion auftretenden Phasensprunges die Phasendifferenz δ_r. Die komplexe Amplitude dieser Welle beträgt

$$a_2' = \sigma_1\sigma_1'\alpha_2 A \cdot e^{j(\delta+\delta_r)}.$$

Jede weitere im austretenden Licht enthaltene Welle ist je einmal zusätzlich am Metall und von innen an der Schichtoberfläche reflektiert worden. Die durch Interferenz entstehende Gesamtamplitude $a' = \sum a'_k$ beträgt also

$$a' = -\alpha_1 A + \sigma_1 \sigma'_1 \alpha_2 A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta+\delta_r)} + \sigma_1 \sigma'_1 \alpha_1 \alpha_2^2 A \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{j}(\delta+\delta_r)} + \cdots$$

oder

$$a' = -\alpha_1 A + \sigma_1 \sigma'_1 \alpha_2 A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta+\delta_r)} \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_1 \alpha_2)^m \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}m(\delta+\delta_r)}. \tag{5.152}$$

Nach Gl. (2.201) und Gl. (2.202) bestehen die Zusammenhänge $\alpha_1 = \sqrt{R_1}$, $\alpha_2 = \sqrt{R_2}$ und $\sigma_1 \sigma'_1 = 1 - R_1$.

Damit geht Gl. (5.152) über in

$$a' = -\sqrt{R_1}\, A + (1 - R_1) \sqrt{R_2}\, A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta+\delta_r)} \sum_{m=0}^{\infty} (R_1 R_2)^{\frac{m}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}m(\delta+\delta_r)}. \tag{5.153}$$

Die unendliche geometrische Reihe summieren wir. Das ergibt

$$a' = -\sqrt{R_1}\, A + \frac{(1 - R_1) \sqrt{R_2}\, A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta+\delta_r)}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\delta+\delta_r)}}. \tag{5.154}$$

Das gesamte Reflexionsvermögen berechnen wir aus

$$R = \frac{a' a'^*}{A^2}. \tag{5.155}$$

Wir setzen Gl. (5.154) in Gl. (5.155) ein und formen so um, daß der Ausdruck

$$R = \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(\delta + \delta_r)}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(\delta + \delta_r)} \tag{5.156}$$

entsteht.

Mit $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ erhalten wir

$$R = \frac{\left(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \cdot \sin^2 \frac{\delta + \delta_r}{2}}{\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \cdot \sin^2 \frac{\delta + \delta_r}{2}}. \tag{5.157}$$

Wir diskutieren zunächst die Entspiegelung einer nichtabsorbierenden Platte. Je nachdem, ob die Brechzahl der aufgedampften Schicht größer oder kleiner als die Brechzahl des Trägers ist, ist $\delta_r = 0$ oder $\delta_r = \pi$. Die Annahme $\delta_r = 0$ führt auf einen Widerspruch. (Das soll jedoch hier nicht näher untersucht werden.) Wir setzen deshalb $\delta_r = \pi$, so daß

$$R = \frac{\left(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}}{\left(1 - \sqrt{R_1 R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}} \tag{5.158}$$

ist. Wir können das Reflexionsvermögen zum Verschwinden bringen, wenn wir die beiden Bedingungen

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{R_1} = \sqrt{R_2} \tag{5.159, 5.160}$$

erfüllen. Die Gl. (5.159) legt die Schichtdicke fest. Sie garantiert die richtigen Phasendifferenzen zwischen den Teilwellen und wird deshalb Phasenbedingung genannt. Die Gl. (5.160) enthält eine Aussage über die Brechzahl der aufgedampften Schicht. Durch ihre Erfüllung sind die Amplitudenverhältnisse so festgelegt, daß sich die Teilwellen gegenseitig auslöschen. Gl. (5.160) wird als Amplitudenbedingung bezeichnet. Die Phasenbedingung (5.159) verlangt

$$\delta = (2z + 1)\,\pi.$$

Die optische Weglänge, die der Phasendifferenz zugeordnet ist, beträgt $\Delta L = 2nd$ (n bezeichnet die Brechzahl, d die Dicke der aufgedampften Schicht). Wir erhalten mit $\delta = (2\pi\Delta L/\lambda_0)$

$$d = \frac{2z + 1}{4} \frac{\lambda_0}{n}, \qquad z = 0; 1; 2; 3; \ldots. \tag{5.161}$$

Die Amplitudenbedingung (5.160) formen wir für den Fall einer nahezu senkrecht einfallenden ebenen Welle um. Es ist dann nach Gl. (2.54)

$$R_1 = \frac{1 - n}{1 + n} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{n - N}{n + N}$$

(N = Brechzahl des Trägers) zu setzen. Die Amplitudenbedingung führt auf

$$n = \sqrt{N}. \tag{5.162}$$

Bei der Entspiegelung einer nichtabsorbierenden Platte für senkrecht auftreffendes Licht mit einer Einfachschicht muß die Schichtdicke ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda_0/4n$, die Brechzahl der Schicht gleich der Wurzel aus der Brechzahl des Trägers sein.

Mit einer Einfachschicht kann das Reflexionsvermögen nur für eine Wellenlänge zum Verschwinden gebracht werden (Abb. 5.49). Das hat zwei Ursachen. Einmal läßt sich nach Gl. (5.161) die Schichtdicke nur für eine Wellenlänge richtig bemessen, und zum anderen ist wegen des unterschiedlichen Verlaufs der Funktionen $n = n(\lambda)$ und $N = N(\lambda)$ (verschiedene Dispersionskurven) die Amplitudenbedingung (5.162) nur für eine Wellenlänge exakt zu erfüllen. An der Farbe des reflektierten Lichtes ist zu erkennen, für welche Farbe entspiegelt wurde. Wird die Reflexion z. B. von gelbem Licht unterdrückt, so erscheint die Schicht blau, also in der Komplementärfarbe zu Gelb. Ein Purpurfarbton zeigt Entspiegelung für den gelbgrünen Spektralbereich an. Für die Wirkungsweise der Entspiegelung im gesamten ausgenutzten Wellenlängenintervall ist auch die Schichtdicke wesentlich. Die Schicht mit der kleinstmöglichen Dicke $d = \lambda_0/4n$ ($z = 0$) ist am günstigsten. In der Abb. 5.49 sind die Funktionen $R = R(\lambda)$ für eine Schicht mit dieser Dicke (Kurve 1) und für eine Schicht mit der Dicke $d = 3\lambda/4n$ (Kurve 2) gegenübergestellt.

Mit Mehrfachschichten läßt sich das Reflexionsvermögen für einen größeren Wellenlängenbereich verringern. Mit einer Anordnung aus drei Schichten (Abb. 5.50) ist der Verlauf des Reflexionsvermögens nach Abb. 5.51 möglich. Die Brechzahlen betragen $N = 1{,}62$, $n_1 = 1{,}38$ (Magnesiumfluorid), $n_2 = 2{,}30$ (Zinksulfid) und $n_3 = 1{,}76$ (Aluminiumoxid).

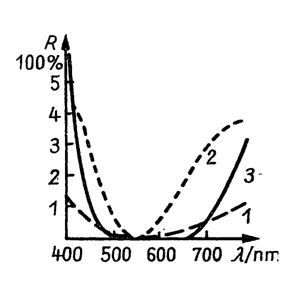


Abb. 5.49
Reflexionsvermögen bei Entspiegelung mit einer Einfachschicht (3 $\triangleq$ Mehrfachschicht)

n_1 | n_2 | n_3 | N

$\frac{\lambda_0}{4n_1}$ | $\frac{\lambda_0}{2n_2}$ | $\frac{3\lambda_0}{4n_3}$

Abb. 5.50
Dreifachschicht zur Entspiegelung

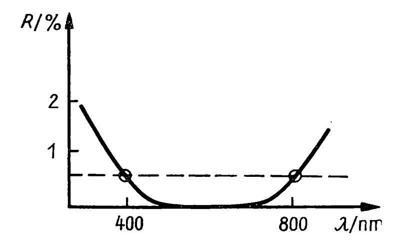


Abb. 5.51
Reflexionsvermögen bei Entspiegelung mit einer Mehrfachschicht

Die bisherigen Ableitungen gelten für nahezu senkrecht auf eine Planfläche auftreffende Wellen. Für schrägen Lichteinfall ist die Ableitung bis zur Gl. (5.160) gültig. Wir müssen aber beachten, daß das Reflexionsvermögen von der Lage der Schwingungsebene des Lichtes gegenüber der Einfallsebene abhängt. Die Gl. (5.160) ist deshalb für zwei Beziehungen zu formulieren, für R_s und für R_p. Beide Größen lassen sich im allgemeinen nicht zu Null machen, so daß eine vollständige Entspiegelung für schrägen Lichteinfall nicht möglich ist. Beim Einfall von natürlichem Licht ist das reflektierte Licht linear polarisiert, wenn $R_s = 0$ oder $R_p = 0$ ist; sonst ist es partiell linear polarisiert (Abschn. 5.4.5.).

An Linsenflächen kommen im allgemeinen Einfallswinkel eines größeren Bereiches vor. Es genügt aber in den meisten praktischen Fällen, die Schichtdicke und die Brechzahl für senkrecht auftreffendes Licht zu bemessen. Von Null verschiedene Einfallswinkel bewirken eine geringe Verschiebung der Nullstelle des Reflexionsvermögens zu einer anderen Wellenlänge. Bei sehr großen Öffnungswinkeln der Bündel und damit stark variierendem Einfallswinkel innerhalb der Bündel ist eine Entspiegelung mit inhomogenen Schichten möglich.

Als Beispiel aus der Literatur sei das Reflexionsvermögen für die Grenzschicht zwischen einem Stoff mit der Brechzahl $n_1 = 1{,}52$ und einem Stoff mit der Brechzahl $n_2 = 2{,}5$ angegeben. Ohne Zwischenschicht beträgt das Reflexionsvermögen $R = 0{,}06$. Für eine Zwischenschicht mit linearem Brechzahlanstieg über verschiedene Dicken hinweg ist das Reflexionsvermögen in der Abb. 5.52 angegeben. Bereits bei der optischen Dicke $\lambda_0/2$ zeigt sich ein deutlicher Entspiegelungseffekt.

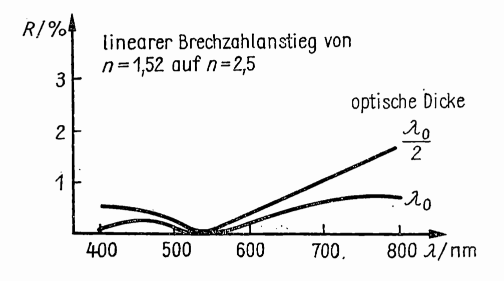


Abb. 5.52
Reflexionsvermögen
bei Entspiegelung
mit einer inhomogenen Schicht

Die „Kaltlichtspiegel“ stellen einen Sonderfall des entspiegelten Trägers dar. Sie werden als Beleuchtungsspiegel in Kinoprojektoren eingesetzt. Durch zwei Mehrfachschichten (z. B. aus je 10 Schichten) auf einem Hohlspiegel ohne Metallbelag wird das Reflexionsvermögen in einem breiten Band herabgedrückt (Bandfilterwirkung). Dieses Band wird in den infraroten Spektralbereich gelegt, so daß der infrarote Anteil des vom Lichtbogen kommenden Lichtes durch den Spiegel hindurchgeht, ohne diesen zu erwärmen. Die Wärmebelastung des Filmes wird herabgesetzt. Im sichtbaren Gebiet muß ein Reflexionsband mit möglichst hohem Reflexionsvermögen liegen (Abb. 5.53).

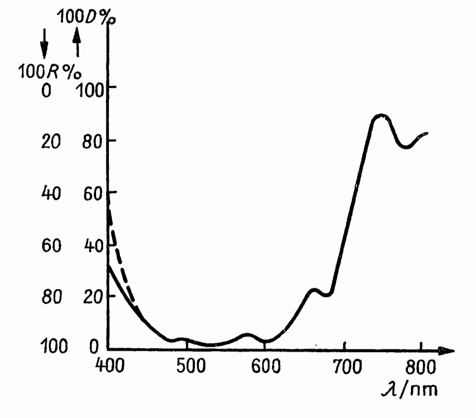


Abb. 5.53
Reflexionsvermögen und Durchlässigkeit eines Kaltlichtspiegels

Die Reflexionserhöhung durch Interferenz an aufgedampften Schichten wird besonders bei Metallspiegeln angewendet. Wir setzen wieder senkrecht auftreffende ebene Wellen voraus. Der Träger besteht aus Metall und ist damit ein absorbierender Stoff. Der Wert der Phasendifferenz δ_r in Gl. (5.157) ist von der Metallart abhängig.

Wir erhalten ein maximales Reflexionsvermögen, wenn

$$\sin^2 \frac{\delta + \delta_r}{2} = 1$$

ist. Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\delta + \delta_r}{2} = (2z + 1)\frac{\pi}{2}. \tag{5.163}$$

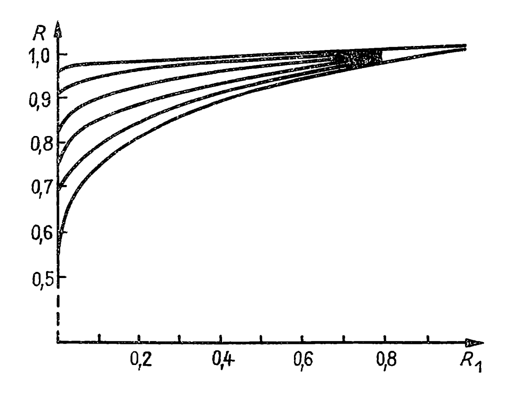
Die Schicht muß die Dicke

$$d = \left(2z + 1 - \frac{\delta_r}{\pi}\right)\frac{\lambda_0}{4n}, \qquad z = 0; 1; 2; 3; \ldots \tag{5.164}$$

haben. Das Reflexionsvermögen beträgt nach den Gleichungen (5.157) und (5.163)

$$R = \frac{\left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{R_1 R_2}\right)^2}. \tag{5.165}$$

Abb. 5.54 enthält die Darstellung der Funktion $R = R(R_1)$ mit R_2 als Parameter. Es ist zu erkennen, daß sich nur im Bereich relativ geringen Reflexionsvermögens des Trägers ein merklicher Effekt erzielen läßt. Dazu wären aber sehr hochbrechende



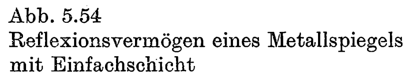


Abb. 5.54
Reflexionsvermögen eines Metallspiegels mit Einfachschicht

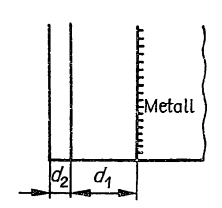


Abb. 5.55
Doppelschicht auf einem Metallspiegel

Schichten notwendig. Deshalb hat die Methode z. B. bei Aluminiumspiegeln im fernen Ultraviolett praktische Bedeutung. Die gleiche Wirkung wie eine aufgedampfte Einfachschicht hat nach Messner eine Anordnung nach Abb. 5.55. Bei geeigneter Wahl der Dicke d_1 und bei einer Dicke $d_2 = \lambda_0/4n$ gilt bei der Doppelschicht ebenfalls die Gl. (5.165) für das gesamte Reflexionsvermögen. Abb. 5.54 veranschaulicht auch die Wirkung der Doppelschicht.

Eine weitere Erhöhung des Reflexionsvermögens in breiten Spektralbändern läßt sich durch Mehrfachschichten mit abwechselnd hoher und niedriger Brechzahl erreichen. Abb. 5.56 zeigt die Wirkung einer Schicht aus Ceriumoxid, Magnesiumfluorit und Ceriumoxid auf einem Aluminiumspiegel. Außerdem ist der Einfluß einer SiO-Schicht angegeben, die nur dem Schutz der Spiegeloberfläche dient (nach [9]).

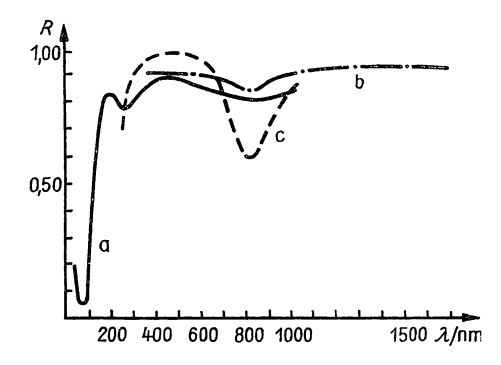


Abb. 5.56
Reflexionsvermögen eines Aluminiumspiegels
a) mit SiO-Schicht,
b) ohne Belag,
c) mit Mehrfachschicht

5.4. Polarisierende Funktionselemente

5.4.1. Polarisationsprismen

Polarisierende Funktionselemente ändern den Polarisationszustand des Lichtes. Sie werden als Polarisatoren bezeichnet, wenn sie Licht mit geändertem Polarisationszustand bereitstellen sollen; sie werden als Analysatoren bezeichnet, wenn sie dem Nachweis oder der Untersuchung von polarisiertem Licht dienen sollen. Bei ihnen kommt es im allgemeinen darauf an, daß ihre Drehung um die Lichtrichtung genau gemessen werden kann. Bei Polarisatoren ist anzustreben, daß der Polarisationszustand im gesamten Feld gleich ist. Sie werden vorwiegend zur linearen Polarisation des Lichtes eingesetzt.

Polarisatoren für zirkular und elliptisch polarisiertes Licht heißen Phasenplatten. Analysatoren können ebenfalls über das gesamte Feld einheitliche Polarisationseigenschaften aufweisen. Zur Verbesserung der Nachweisempfindlichkeit der Drehung werden sie aber auch mit geteiltem Feld hergestellt. Hinter den beiden Feldteilen stehen die Schwingungsebenen entweder senkrecht oder sie bilden einen kleinen Winkel miteinander.

Es gibt fünf Ausführungsformen von polarisierenden Funktionselementen:

Polarisationsprismen (doppelbrechende Kristalle)
Polarisationsfilter (dichroitische Stoffe)
Interferenzpolarisatoren (Systeme aus dünnen Schichten)
Reflexionspolarisatoren (reflektierende oder durchlässige Grenzflächen).

Reflexionspolarisotoren sind heute für sichtbares Licht kaum noch im Einsatz. Wir behandeln sie hier nicht. Die Grundlagen sind im Abschn. 2.2.3. dargelegt worden.

Polarisationsprismen beruhen vorwiegend auf der Doppelbrechung des Lichtes an schwach absorbierenden Kristallen. (Eine Ausnahme werden wir am Schluß dieses Abschnitts behandeln.) Bevorzugt werden Kalkspat, Quarz und synthetische Kristalle wie z. B. ADP-Einkristalle, die optisch einachsig sind. Die Brechzahlen sind in der Tab. 5.10 enthalten.

Tabelle 5.10
Brechzahlen von doppelbrechenden Kristallen

	n_r	n_a
Kalkspat	1,6584	1,4864
Quarz	1,5442	1,5533
ADP	1,5246	1,4792

Kalkspat ($CaCO_3$) ist sehr stark doppelbrechend, aber schwierig zu beschaffen, weil er nicht gezüchtet werden kann. Besonders hochwertig ist der isländische Doppelspat. Quarz (SiO_2) hat eine geringe Doppelbrechung und dreht außerdem die Schwingungsebene des Lichtes, er ist also optisch aktiv. Quarz hat aber auch außerhalb des sichtbaren Gebietes einen günstigen Reintransmissionsgrad. ADP-Einkristalle werden aus einer wäßrigen Lösung von Ammoniumdihydrogenphosphat gezüchtet. Es sind relativ große Einkristalle mit sehr homogenen optischen Eigenschaften möglich. Der Reintransmissionsgrad ist von 250 nm bis 1076 nm ausreichend groß. Die optische Achse liegt günstig gegenüber den äußeren Begrenzungsflächen der Kristalle.

Das Nicolsche Prisma besteht aus Kalkspat. Die Kristalle des Kalkspats gehören dem hexagonalen System an. Sie bilden im natürlichen Zustand ein Rhomboeder aus sechs Rhomben. Die Winkel zwischen den Kanten betragen 105° 5′ und 74° 55′. Die kristallografische Hauptachse und damit die optische Achse des Kristalls geht durch die Punkte, in denen die Kanten drei stumpfe Winkel miteinander bilden (Abb. 5.57).

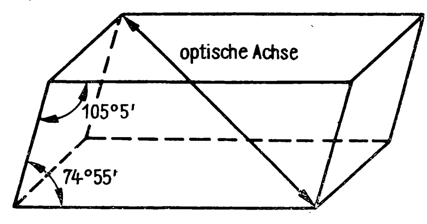


Abb. 5.57
Kalkspatkristall

In der Abb. 5.58 ist der Kristall so gedreht, daß die optische Achse in der Zeichenebene liegt. Der spitze Winkel der Kanten beträgt in diesem Schnitt 70° 52′. Dieser Winkel wird auf 68° abgeschliffen, der Kristall geteilt und die Hälften mit Kanadabalsam verkittet (Abb. 5.59).

Für Licht der Na-D-Linie betragen die Brechzahlen $n_r = 1{,}65838$, n (Kanadabalsam) $= 1{,}542$, $n_a = 1{,}48643$. Eine ebene Welle, die parallel zu den Seitenkanten des Prismas einfällt, hat den Einfallswinkel $\varepsilon_1 = 22°$. Durch Doppelbrechung wird das Licht aufgespalten. Die Schwingungsebene des ordentlichen Strahls steht senkrecht zum Hauptschnitt; die Schwingungsebene des außerordentlichen Strahls liegt parallel zum Hauptschnitt. Der ordentliche Strahl hat den Brechungswinkel $\varepsilon_r' = 13° 3'$ und damit den Einfallswinkel $\varepsilon_2 = 76° 87'$ an der Kanadabalsamschicht. Dort beträgt der Grenzwinkel der Totalreflexion für den ordentlichen Strahl $\varepsilon_G = 68° 24'$. Der ordentliche Strahl wird also totalreflektiert und von der Fassung des Prismas absorbiert.

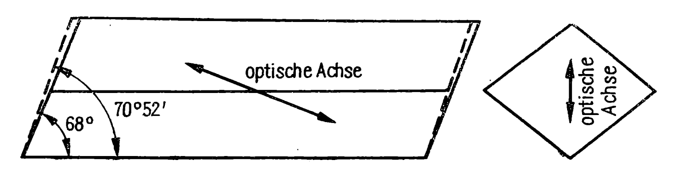


Abb. 5.58
Schnitt durch einen Kalkspatkristall, der die optische Achse enthält

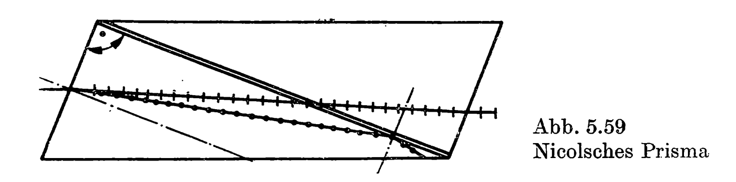


Abb. 5.59
Nicolsches Prisma

Der außerordentliche Strahl wird schwächer gebrochen. Für ihn ist die Kanadabalsamschicht ein optisch dichterer Stoff. Er geht durch das Prisma hindurch, so daß aus diesem linear polarisiertes Licht austritt.

Für ein konvergentes Bündel wird der Grenzwinkel der Totalreflexion an der Kanadabalsamschicht vom ordentlichen Strahl unterschritten, wenn der Konvergenzwinkel größer als 31° ist. Bei weißem Licht zeigen sich durch die Dispersion farbige Ränder des Bündels.

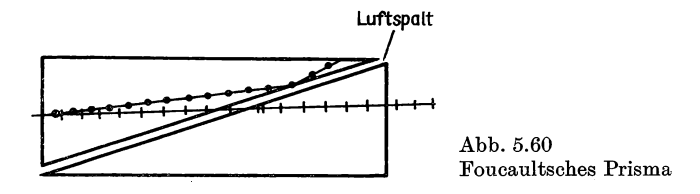


Abb. 5.60
Foucaultsches Prisma

Das Foucaultsche Prisma (Abb. 5.60) unterscheidet sich vom Nicolschen Prisma dadurch, daß statt des Kanadabalsams eine Luftschicht vorhanden ist und die Endflächen nahezu senkrecht zu den Seitenkanten stehen.

Der Transmissionsgrad für ultraviolettes Licht ist größer als beim Nicolschen Prisma. Nachteile sind der geringe zulässige Konvergenzwinkel von 8°, die schwierigere Fassung und die Mehrfachreflexionen in der Luftschicht.

Das Glan-Thompsonsche Prisma hat senkrecht zu den Seitenkanten geschliffene, rechteckige oder quadratische Endflächen. Die optische Achse liegt in beiden Teilprismen parallel zu den Endflächen (Abb. 5.61). Für Untersuchungen im sichtbaren Gebiet können die Teilprismen mit Kanadabalsam gekittet werden, im Ultravioletten verwendet man z. B. Glyzerin, Rizinusöl oder man beläßt eine Luftschicht. In diesen Fällen können Konvergenzwinkel bis 42° erreicht werden. Eine senkrecht auf die Eintrittsfläche treffende Welle wird nicht gebrochen, aber in zwei senkrecht zueinander schwingende Wellen aufgespalten. Der ordentliche Strahl wird an der Trennschicht totalreflektiert, der außerordentliche Strahl tritt aus.

Das Glan-Thompson-Prisma wird in den Geräten wegen seiner günstigen Eigenschaften bevorzugt angewendet. Es ist gut aus ADP herstellbar, allerdings bei größerer Baulänge und kleinerem Konvergenzwinkel als bei Kalkspat.

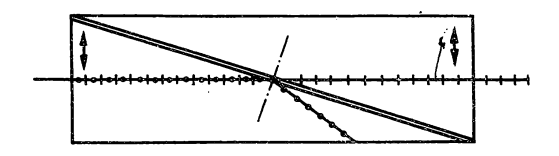


Abb. 5.61
Glan-Thompson-Prisma

Die Prismen von Rochon (Abb. 5.62), **Sénarmont** (Abb. 5.63) **und Wollaston** (Abb. 5.64) bestehen aus zwei an der Hypotenusenfläche zusammengesetzten Halbwürfeln aus optisch einachsigen Kristallen. Die Bilder gelten für Kalkspat oder ADP. Die Prismen liefern zwei senkrecht zueinander schwingende Wellen, wobei die beiden Wellen divergieren. Dadurch ist nach einer gewissen Strecke die Trennung vorhanden. Die drei genannten Prismen unterscheiden sich durch die Lage der optischen Achsen in den Teilprismen.

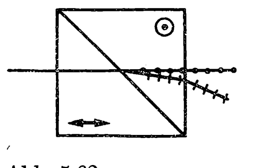


Abb. 5.62
Rochon-Prisma

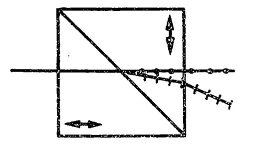


Abb. 5.63
Sénarmont-Prisma

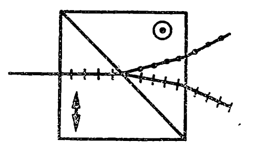


Abb. 5.64
Wollaston-Prisma

Beim Rochon- und beim Sénarmont-Prisma mit senkrecht auftreffendem Licht wird der ordentliche Strahl nicht abgelenkt und zeigt keine Dispersion.

Beim Wollaston-Prisma ist die Divergenz der austretenden Bündel größer als bei den beiden anderen Prismen, aber bei beiden tritt Dispersion auf.

Das Dove-Prisma (Abb. 5.65) ist ein Halbwürfel aus einem optisch einachsigen Stoff, so daß das Licht um 90° abgelenkt wird. Die einseitige Vertauschung durch die Spiegelfläche kann störend sein.

Bei den doppelbrechenden Polarisationsprismen wird der Lichtstrom fast um 50% ausgenutzt. Es treten nur geringe Reflexions- und Absorptionsverluste auf.

Die verfügbaren Einkristalle mit homogenen optischen Eigenschaften ermöglichen nur relativ geringe Durchmesser. Die Kristalle, vor allem die natürlichen Kristalle, sind teuer. Der maximale Konvergenzwinkel ist begrenzt. Die erforderliche Länge der Prismen bringt unter Umständen Platzschwierigkeiten für den Einbau in Geräte mit sich.

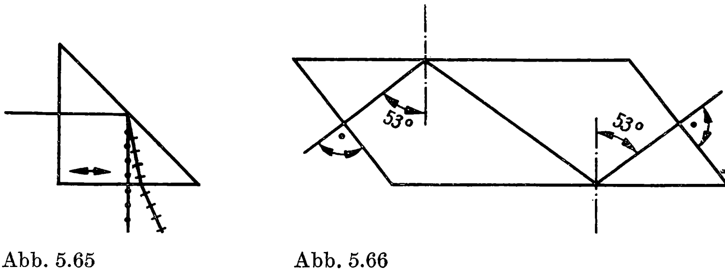


Abb. 5.65
Dove-Prisma

Abb. 5.66
Fresnelsches Parallelepiped

Das Fresnelsche Parallelepiped (Abb. 5.66) besteht aus Glas. Seine Funktion, die Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht, beruht nicht auf der Doppelbrechung, sondern auf der Totalreflexion.

Im Abschn. 2.2.4. wurde angegeben, daß zwischen der senkrecht und der parallel zur Einfallsebene schwingenden Welle bei der Totalreflexion die Phasendifferenz δ eingeführt wird, die aus

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\varepsilon\sqrt{\sin^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon_G}}{\sin^2\varepsilon} \tag{5.166}$$

folgt. Die zur Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht erforderliche Phasendifferenz von 90° wird z. B. durch zweimalige Totalreflexion eingeführt, wenn bei $n = 1{,}5$ der Einfallswinkel $\varepsilon = 53°$ beträgt.

Das Fresnelsche Parallelepiped ist also ein Funktionselement, das weniger zu den Polarisationsprismen als zu den Phasenplatten in Beziehung steht.

5.4.2. Flächenpolarisatoren

Flächenpolarisatoren beruhen auf der Richtungsabhängigkeit der Absorption, die in Kristallen und anderen optisch anisotropen Stoffen auftreten kann.

Bei Kristallen läßt sich analog zum Indexellipsoid, dessen halbe Hauptachsen den Hauptbrechzahlen n_1, n_2, n_3 gleich sind, ein Absorptionsellipsoid einführen.

Dessen Halbachsen sind durch die Größen

$$\frac{1}{\sqrt{k_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{k_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{k_3}}$$

gegeben, wobei die k_i die Hauptabsorptionskoeffizienten darstellen.

Bei den kubischen Kristallen, die optisch isotrop sind, ist auch die Absorption richtungsunabhängig.

Die optisch einachsigen Kristalle werden durch ein Absorptionsellipsoid beschrieben, das ein Rotationsellipsoid darstellt. Die Absorption der ordentlichen Welle ist richtungsunabhängig; die Absorption der außerordentlichen Welle unterscheidet sich senkrecht zur optischen Achse am stärksten von der Absorption der ordentlichen Welle. Die Absorption ist wellenlängenabhängig. Bei den optisch einachsigen Kristallen wird die unterschiedliche Absorption für die beiden ausgezeichneten Richtungen (parallel und senkrecht zur optischen Achse) als Dichroismus bezeichnet. Die optisch zweiachsigen Kristalle werden durch ein dreiachsiges Rotationsellipsoid beschrieben. Es wird von Trichroismus gesprochen.

Der Dichroismus wird bei den Flächenpolarisatoren, die auch Polarisationsfilter genannt werden, ausgenutzt.

Flächenpolarisatoren sind planparallele Platten aus dichroitischen Stoffen, bei denen zwischen der ordentlichen Welle und der außerordentlichen Welle ein großer Unterschied des Absorptionskoeffizienten besteht.

Die Vorteile der Flächenpolarisatoren sind ihre geringe Baulänge und damit das geringe Gewicht, die fluchtende optische Achse und die Möglichkeit, Polarisatoren mit großem Durchmesser herzustellen.

Nachteile der Flächenpolarisatoren sind die Färbung des Lichtes, der unter Eins liegende Polarisationsgrad, die Änderung des Polarisationsgrades bei einer Neigung um die optische Achse und die Schwierigkeiten, bei großen Filtern optisch einwandfrei ebene Oberflächen zu erzielen.

Turmalin. Der klassische Vertreter des dichroitischen Polarisators ist die Turmalinzange (Polarisator und Analysator im gemeinsamen Metallbügel). Turmalin ist ein optisch einachsiger Kristall des trigonalen Systems. Eine Kristallplatte, die parallel zur optischen Achse geschnitten ist, absorbiert bereits bei Dicken von 1 mm den ordentlichen Strahl fast vollständig. Die aus dem Kristall austretende, linear polarisierte außerordentliche Welle führt infolge der wellenlängenabhängigen Absorption im Kristall zu grün gefärbtem Licht. Der nutzbare Durchmesser der Polarisatoren ist durch die Größe der natürlich vorkommenden Kristalle begrenzt.

Herapathit ist ein Periodid des Chininsulfates. Aus ihm lassen sich große graugrünliche, hygroskopische Kristalle künstlich herstellen.

Die mechanischen Eigenschaften der Kristalle bereiten Schwierigkeiten bei der Verwendung in Polarisationsfiltern. Durch Einkitten in Planglasplatten konnten jedoch 1935 die ersten Flächenpolarisatoren, die Zeiss Herotare nannte, in den Handel gebracht werden.

Günstige mechanische Eigenschaften haben Polarisationsfilter, bei denen viele dichroitische Einkristalle in eine isotrope Folie eingebettet sind. So werden z. B. Herapathit-Mikrokristalle mit ca. 1 µm Länge und ca. 0,05 µm···0,1 µm Dicke in einer Schicht mit 25 µm···100 µm Dicke so eingebracht, daß sämtliche optische Achsen gleiche Richtung haben. Höhere Schichtdicken bringen einen höheren Polarisationsgrad, aber auch stärkere Absorption mit sich. Ein Nachteil der Polarisationsfilter mit Mikrokristallen ist die leichte Trübung durch die Streuung an den kleinen Teilchen.

Hochpolymere. Heute werden Flächenpolarisatoren vorwiegend aus besonders behandelten hochpolymeren Stoffen hergestellt. Ausgangsstoffe sind Stoffe mit Kettenmolekülen von Polyvinylalkohol, -ketal, -acetal usw. Eine mechanische Deformation der Folien, z. B. eine Dehnung, richtet die Kettenmoleküle so aus, daß die Folien doppelbrechend werden. Die so behandelten Folien werden mit einem dichroitischen Farbstoff, z. B. mit Iod, eingefärbt. Das parallel zur Dehnungsrichtung schwingende Licht und das senkrecht dazu schwingende Licht werden verschieden stark absorbiert. Durch geeignete Kombination aus Folie und Farbstoff sind Polarisationsgrade über 99% im sichtbaren Gebiet erreichbar. Die Durchlässigkeit beträgt etwa 30%. Wegen der Hygroskopizität ist das Einkitten der Folien in Deckgläser notwendig.

Filter, die im Spektralbereich von 600 nm···2400 nm die Durchlässigkeit 20% und den Polarisationsgrad über 99% ermöglichen, entstehen bei besonderer Behandlung der gedehnten Folien (erhöhte Trocknungstemperatur, veränderte Jodkonzentration, Zusatz eines Dehydrationsmittels). Mit Jod eingefärbte Folien haben Absorptionsmaxima bei 290 nm und 360 nm. Die Durchlässigkeit läßt sich durch spezielle Färbemethoden anheben, so daß auch UV-Polarisationsfilter hergestellt werden können. Diese sind auch ohne Deckgläser einsetzbar.

5.4.3. Phasenplatten

In einer doppelbrechenden Kristallplatte wird das Licht im allgemeinen in zwei senkrecht zueinander schwingende Wellen unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit aufgespalten. Daraus folgt, daß die beiden Teilwellen nach dem Verlassen der Kristallplatte eine Phasendifferenz haben.

Doppelbrechende planparallele Platten zur Erzeugung einer Phasendifferenz zwischen senkrecht zueinander schwingenden Wellen werden Phasenplatten genannt.

Im Abschn. 2.1.2. wurde gezeigt, daß aus senkrecht zueinander schwingenden Wellen mit geeigneten Phasendifferenzen jeder beliebige Polarisationszustand des Lichtes erzeugt werden kann. Phasenplatten eignen sich deshalb zur Analyse und Synthese der Polarisationszustände.

Wir behandeln die Wirkung von Phasenplatten aus einigen praktisch bedeutenden Kristallen.

Kalkspat. Optisch einachsige Kristalle, wie Kalkspat, werden parallel zur optischen Achse geschnitten und poliert. Das Licht trifft senkrecht auf die Platte auf und

erfährt keine Ablenkung. Die Phasendifferenz zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl beträgt

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L \tag{5.167}$$

mit

$$\Delta L = (n_r - n_a)\, d = d \cdot \Delta n. \tag{5.168}$$

Es gilt also

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \Delta n. \tag{5.169}$$

Ein sogen. $\lambda/4$-Plättchen erzeugt die Phasendifferenz $\delta = \pi/2$. Sorgt man für gleiche Amplitudenbeträge der beiden Teilwellen, indem man linear polarisiertes Licht auftreffen läßt, dessen Schwingungsebene mit den beiden im Kristall möglichen einen Winkel von 45° bildet, dann verläßt zirkular polarisiertes Licht die Phasenplatte (Abb. 5.67).

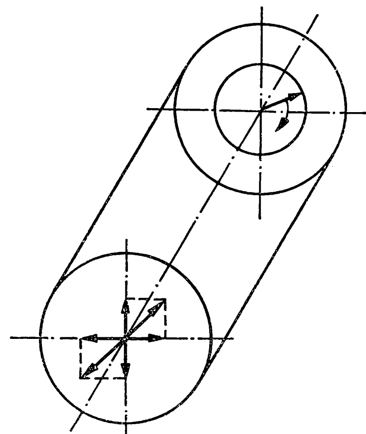


Abb. 5.67
Entstehung von zirkular polarisiertem Licht durch die $\lambda/4$-Platte

Das $\lambda/4$-Plättchen müßte die Dicke

$$d = \frac{\lambda_0}{4\Delta n} \tag{5.170}$$

haben.

Bei Kalkspat beträgt die Brechzahldifferenz $\Delta n = 0{,}172$ (für Licht der Natrium-D-Linie). Es ergibt sich

$$d = 8{,}57 \cdot 10^{-4}\ \text{mm}.$$

Kalkspatplatten lassen sich aber nur bis zu 0,5 mm Dicke herab herstellen. Deshalb

wählt man

$$d = k\frac{\lambda_0}{\Delta n} + \frac{\lambda_0}{4\Delta n}, \qquad k = \text{ganze Zahl}. \tag{5.171}$$

So wird z. B. mit $k = 170$ die Dicke $d = 0{,}5833$ mm.

In analoger Weise spricht man von $\lambda/2$-Plättchen ($\delta = \pi$) und λ-Plättchen ($\delta = 2\pi$).

Quarz eignet sich besonders für Arbeiten im Ultravioletten. Quarz ist optisch aktiv, d. h., er dreht die Schwingungsebene des Lichtes. Die Phasenplatten werden aus einer Rechts- und einer Linksquarzplatte zusammengesetzt. Der ordentliche Strahl der einen Platte wird in der anderen Platte zum außerordentlichen Strahl und umgekehrt (Abb. 5.68). Der optische Wegunterschied zwischen den senkrecht schwingenden Wellen beträgt

$$\Delta L = (n_r - n_a)\, d_1 - (n_r - n_a)\, d_2 = \Delta n \cdot \Delta d, \tag{5.172}$$

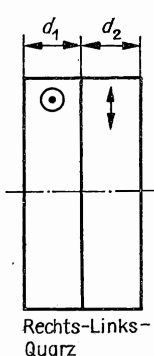


Abb. 5.68
Phasenplatte aus Rechts- und Linksquarz

die Phasendifferenz folgt aus

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\Delta n \cdot \Delta d. \tag{5.173}$$

Für Licht der Natrium-D-Linie ist $\Delta n = 0{,}0091$, ein $\lambda/4$-Plättchen ergibt sich z. B. mit der Dickendifferenz $\Delta d = 0{,}0162$ mm.

Glimmer gehört zum monoklinen Kristallsystem und ist optisch zweiachsig. Glimmer ist nur in bestimmten Ebenen leicht spaltbar. Die Hauptbrechzahlen betragen für Licht der Natrium-D-Linie $n_1 = 1{,}5933$, $n_2 = 1{,}5944$, $n_3 = 1{,}5612$.

Die Oberfläche der Kristallplättchen steht nahezu senkrecht zur Schwingungsrichtung der Welle, für deren Ausbreitung die Hauptbrechzahl n_3 gilt.

Weiter sind folgende Zusammenhänge wichtig (Abb. 5.69):

Für die Welle, die parallel zur Ebene der optischen Achsen schwingt, gilt die Hauptbrechzahl n_1.

Für die Welle, die senkrecht zur Ebene der optischen Achsen schwingt, gilt die Hauptbrechzahl n_2.

Die wirksame Brechzahldifferenz für senkrecht durch die Platte gehendes Licht beträgt demnach

$$\Delta n = n_1 - n_2 = 0{,}00487.$$

Die Mindestdicke eines $\lambda/4$-Plättchens ergibt sich zu $d = 0{,}0303$ mm. Glimmer ist bis zu $\lambda = 300$ nm herab verwendbar, aber mit dem Nachteil einer ungleichmäßigen Absorption.

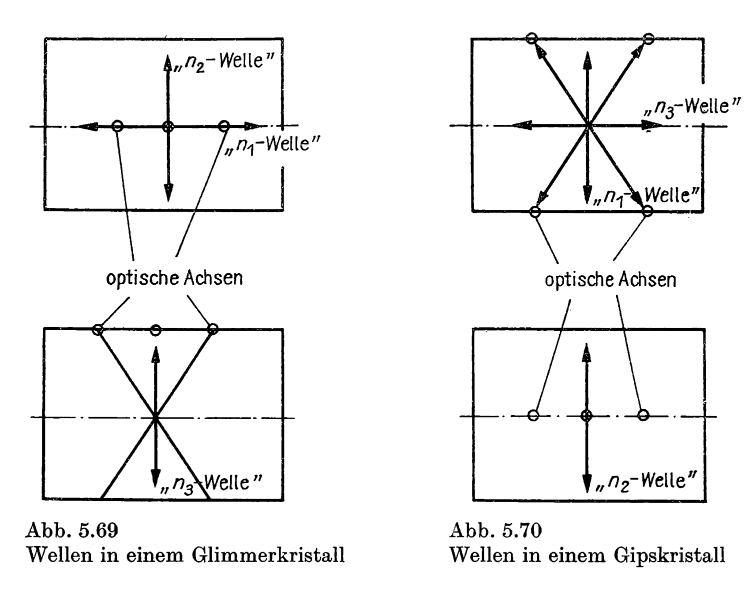


Abb. 5.69
Wellen in einem Glimmerkristall

Abb. 5.70
Wellen in einem Gipskristall

Gips ist parallel zur Ebene der optischen Achsen gut schleifbar (Abb. 5.70). Es handelt sich um einen optisch zweiachsigen Kristall mit den Hauptbrechzahlen (Na-D-Linie)

$$n_1 = 1{,}5298, \quad n_2 = 1{,}5228, \quad n_3 = 1{,}5208.$$

Die wirksame Brechzahldifferenz ist

$$\Delta n = n_1 - n_3 = 0{,}009.$$

Zur Erzeugung von zirkular polarisiertem Licht wird wegen der besseren Herstellbarkeit ein $1{,}25\lambda$-Plättchen verwendet.

Die Platte „Rot I. Ordnung" besteht ebenfalls aus Gips. Der Polarisator wird so eingestellt, daß die Schwingungsebene des linear polarisierten Lichtes unter 45° zu den möglichen Schwingungsebenen in der Gipsplatte steht (Abb. 5.71). Hinter der Gipsplatte befindet sich ein Analysator, dessen Schwingungsebene zu der des Polarisators senkrecht steht. (Einfachere Formulierung: Die Gipsplatte befindet sich in Diagonalstellung zwischen gekreuzten Polarisatoren.) Die beiden senkrecht zueinander schwingenden Wellen erhalten in der Gipsplatte eine Wellenlänge Wegunterschied für grünes Licht. Dadurch löschen sich die beiden vom Analysator hindurchgelassenen Anteile durch Interferenz aus (Abb. 5.71). Die Komplementärfarbe „Violett-Rot" (Rot I. Ordnung) wird sichtbar. Das „Rot I. Ordnung" ist also eine Mischfarbe, die bei der Interferenz von weißem Licht auftritt und zwar

bei der Auslöschung von grünem Licht in der I. Ordnung. Die Platte „Rot I. Ordnung" dient z. B. als Vergleichsobjekt bei Untersuchungen im Polarisationsmikroskop.

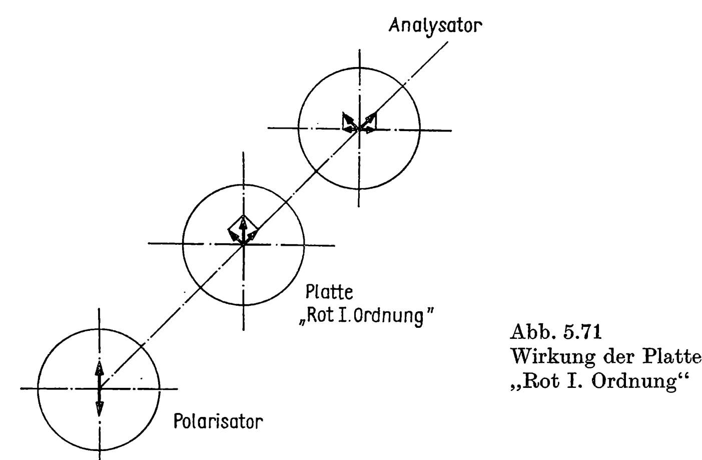


Abb. 5.71
Wirkung der Platte „Rot I. Ordnung"

5.4.4. Halbschattenpolarisatoren

Bei Messungen mit polarisiertem Licht sind häufig die Schwingungsrichtungen von Polarisator und Analysator senkrecht oder parallel zu stellen. Die Einstellung auf Dunkelheit oder maximale Helligkeit des gesamten Feldes ist sehr unsicher. Die fotometrische Genauigkeit läßt sich durch Halbschattenpolarisatoren erhöhen und zwar im günstigsten Fall bis auf 5,4″.

> Halbschattenpolarisatoren erhöhen die fotometrische Genauigkeit der Einstellung des Analysators. Sie stellen polarisierende Funktionselemente dar, bei denen zwei Feldteile vorhanden sind, in denen die Schwingungsrichtungen des Lichtes einen kleinen Winkel miteinander bilden.

Der Winkel zwischen den Schwingungsrichtungen der beiden Feldteile heißt Halbschatten (Abb. 5.72). Bei der Messung wird ein Fernrohr auf die Trennlinie der Feldteile eingestellt und auf gleiche Helligkeit bzw. Farbe der Feldteile abgeglichen. Die Schwingungsrichtung des Analysators bildet dann mit den Schwingungsrichtungen im Halbschattenpolarisator nahezu den gleichen Winkel (Abb. 5.72).

Wir erläutern einige Ausführungsarten.

Das Cornusche Prisma entsteht, indem ein Nicolsches Prisma geteilt, an beiden Teilen der halbe Halbschatten angeschliffen und die Hälften wieder verkittet werden (Abb. 5.73). Das Cornusche Prisma ist ein Polarisator mit festem Halbschatten.

Regelbarer Halbschatten nach Lippich. Ein sogen. Halbprisma bedeckt nur das halbe Feld eines Polarisators (Abb. 5.74). Durch eine Drehung des Prismas wird der

Halbschatten so geändert, daß die Helligkeit der Feldteile den Versuchsbedingungen angepaßt ist.

Die Winkel 86° 10′ und 94° des Prismas bewirken eine schärfere Trennlinie, weil Mehrfachreflexionen vermindert werden.

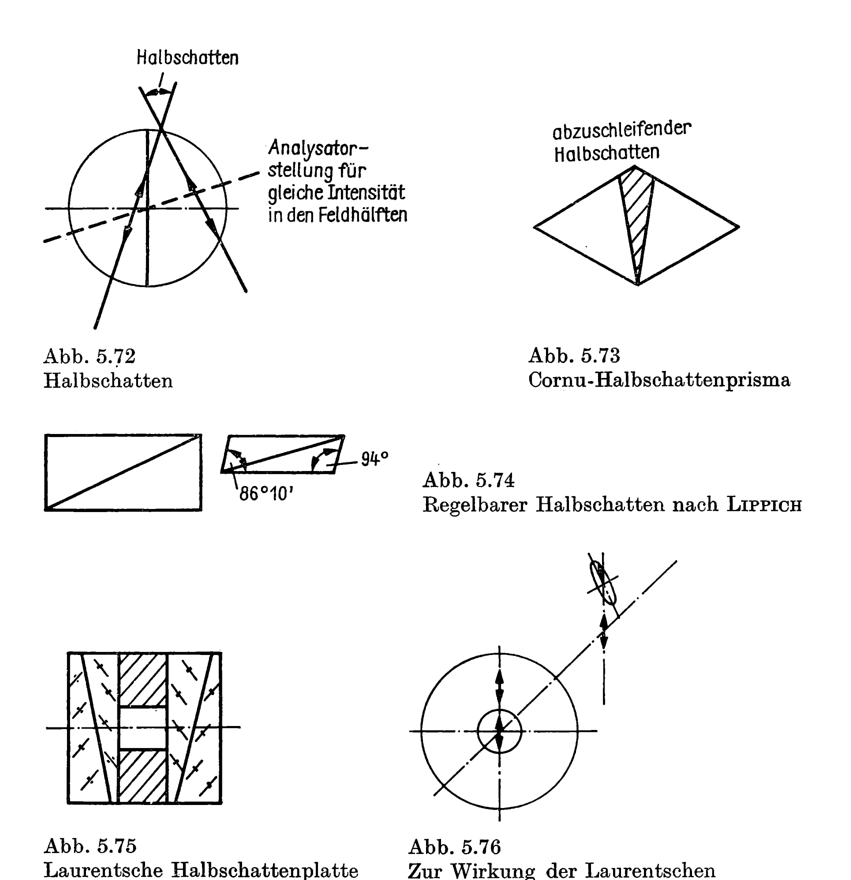


Abb. 5.72
Halbschatten

Abb. 5.73
Cornu-Halbschattenprisma

Abb. 5.74
Regelbarer Halbschatten nach LIPPICH

Abb. 5.75
Laurentsche Halbschattenplatte

Abb. 5.76
Zur Wirkung der Laurentschen Halbschattenplatte

Laurentsche Halbschattenplatte. Eine Kristallplatte erhält eine kreisförmige Öffnung von z. B. 2 mm Durchmesser (Abb. 5.75). Die Plattendicke wird so gewählt, daß hinter ihr zwischen den senkrecht zueinander schwingenden Wellen eine Phasendifferenz von $(0{,}009 \cdots 0{,}08) \cdot 2\pi$ erzeugt wird. Es entsteht schwach elliptisch polarisiertes Licht mit einem kleinen Winkel zwischen der großen Halbachse der Ellipse und dem linear polarisierten Licht, das durch die Öffnung unverändert hindurchgeht (Abb. 5.76). Damit eine scharfe Trennlinie erreicht wird, ist es notwendig, daß das reflektierte Licht in beiden Feldteilen etwa gleich ist. Deshalb wird die Kristallplatte zwischen achromatische Keilpaare eingekittet (Abb. 5.75).

Soleilsche Doppelplatte. Eine Platte aus Linksquarz und eine Platte aus Rechtsquarz werden nebeneinander gekittet. Die Dicke wird so festgelegt, daß die Schwingungsebene des Lichtes der Natrium-D-Linie um 90° gedreht wird (Abb. 5.77). Bei Parallelstellung von Polarisator und Analysator wird das gelbgrüne Licht der

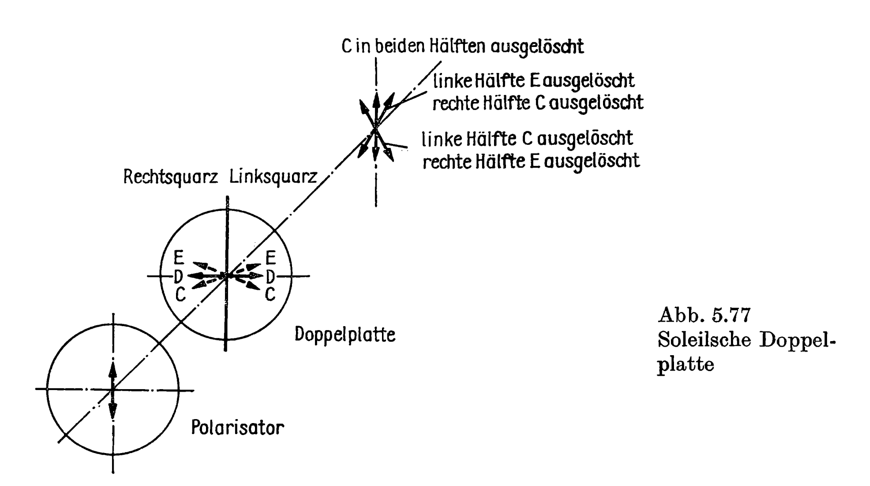


Abb. 5.77
Soleilsche Doppelplatte

Natrium-D-Linie ausgelöscht. Beide Feldhälften erscheinen in der Komplementärfarbe Rotviolett. Bei einer Abweichung von der Parallelstellung ändert sich die Farbe in der einen Feldhälfte nach Blau, in der anderen Feldhälfte nach Purpur (Abb. 5.77). Dieser Farbunterschied ist ein sehr empfindliches Einstellkriterium. Bei 20 °C gelten für Quarz die Drehwinkel der Tab. 5.11.

Tabelle 5.11
Drehwinkel von Quarz für drei Wellenlängen

λ/nm	Drehwinkel in Grad/mm
656,2 (C)	17,314
589,3 (D)	21,724
527,0 (E)	27,552

Zwischen der Brechzahldifferenz Δn, der Dicke d, der Wellenlänge λ und dem Drehwinkel α in Grad besteht der Zusammenhang

$$\alpha/\text{Grad} = \frac{180 d\, \Delta n}{\lambda}. \qquad (5.174)$$

Abgesehen von der Dispersion der Brechzahlen ist im Normalfall die Drehung im wesentlichen umgekehrt proportional zur Wellenlänge (normale Rotationsdispersion).

5.4.5. Interferenzpolarisatoren

Das an einer Grenzfläche reflektierte Licht ist linear polarisiert, wenn der Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel ε_l ist. Bei $n = 1$ und $n' = 1{,}5$ wird nach Abschn. 2.2.3. das Reflexionsvermögen jedoch nur $R_s\,(\varepsilon = \varepsilon_l) = 0{,}1479$ (Schwingungsebene der reflektierten Welle liegt senkrecht zur Einfallsebene). Bei unpolarisiert einfallendem Licht entfallen nur 50% der Intensität auf die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Welle, so daß ca. 7,4% der Intensität reflektiert werden.

Eine Verstärkung der senkrecht schwingenden Komponente durch Interferenz ist mit einem System aus Schichten mit abwechselnd hoher und niedriger Brechzahl möglich. Die Dicke der Schichten muß so gewählt werden, daß die wirksame optische Weglänge für die schräg in den Schichten verlaufenden Wellen $\lambda/4$ beträgt. Das Reflexionsvermögen beträgt für ein System aus m Schichten nach [4]

$$R_{sg} = \tanh^2\left[(m+1)\,\mathrm{arc\,tanh}\,\sqrt{R_s}\right]. \tag{5.175}$$

Für eine niedrigbrechende Schicht mit der Brechzahl $n_1 = 1{,}52$ und eine hochbrechende Schicht mit $n_2 = 2{,}4$ ist $\varepsilon_l = 57{,}67°$, $\sqrt{R_s} = -0{,}428$. Bei drei hoch- und zwei niedrigbrechenden Schichten ergibt sich $R_{sg} = 0{,}983$, und bei vier hoch- und drei niedrigbrechenden Schichten ergibt sich $R_{sg} = 0{,}998$.

Oft werden die Interferenzpolarisatoren so angewendet, daß die Schichten auf die Hypotenusenfläche eines Halbwürfelprismas aufgebracht werden. Zwei dieser Halbwürfel werden aufeinandergekittet. Die Brechzahl des Glases, aus dem die Prismen hergestellt sind, muß möglichst so gewählt werden, daß der Polarisationswinkel an der Grenzfläche hochbrechende—niedrigbrechende Schicht eingehalten wird.

An den Grenzflächen Glas—Schicht und Schicht—Kitt ist der Polarisationswinkel nicht eingehalten, so daß der Polarisationsgrad etwas herabgesetzt wird. Bei zwei derartig verkitteten Prismen sind das reflektierte und das hindurchgehende Licht linear polarisiert. Sie eignen sich also als Bündelteiler mit gleichzeitiger Polarisation.

Es ist auch möglich, das reflektierte und das hindurchgehende Licht zu nutzen. Dazu werden auf eine Spiegelfläche oder eine totalreflektierende Fläche ein $\lambda/4$-Plättchen und das Schichtsystem aufgebracht. Durch die Phasenplatte wird die Schwingungsebene der durch das Schichtsystem hindurchgelassenen Komponente beim zweimaligen Durchgang um 90° gedreht.

Eine weitere Möglichkeit, einen Interferenzpolarisator aufzubauen, besteht darin, eine dünne Schicht auf einen Glasträger aufzudampfen (Abb. 5.78). Für diesen Fall gilt die Gl. (5.158). Für die parallel zur Einfallsebene schwingende Komponente ist

$$R_{p1} = \frac{\tan(\varepsilon' - \varepsilon)}{\tan(\varepsilon' + \varepsilon)}, \qquad R_{p2} = \frac{\tan(\varepsilon'' - \varepsilon')}{\tan(\varepsilon'' + \varepsilon')}$$

einzusetzen.

Die Bedingungen für das Verschwinden der parallel schwingenden Komponente lauten

$$\cos^2\frac{\delta}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{R_{p1}} = \sqrt{R_{p2}}. \tag{5.176a, b}$$

Aus Gl. (5.176a) ergibt sich mit Gl. (2.217a) für δ die Phasenbedingung

$$d = \frac{(2z + 1)\,\lambda}{4n \cos \varepsilon'}, \qquad z = 0, 1, 2, \ldots .$$

Aus Gl. (5.176b) folgt mit dem Brechungsgesetz die Amplituden-Bedingung

$$(n^8 - N^4) \sin^4 \varepsilon - n^2 N^2 (n^6 - 2N^2) \sin^2 \varepsilon + n^4 N^2 (n^4 - N^2) = 0.$$

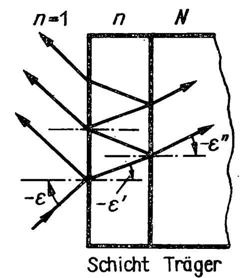


Abb. 5.78
Dünne Schicht auf einem Träger bei schrägem Lichteinfall

Das Reflexionsvermögen für die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente wird mit

$$\sqrt{R_{s1}} = \frac{\sin(\varepsilon' - \varepsilon)}{\sin(\varepsilon' + \varepsilon)}, \qquad \sqrt{R_{s2}} = \frac{\sin(\varepsilon'' - \varepsilon')}{\sin(\varepsilon'' + \varepsilon')}$$

berechnet und beträgt

$$R_s = \left[\frac{n^2 \cos^2 \varepsilon' - N \cos \varepsilon \cdot \cos \varepsilon''}{n^2 \cos^2 \varepsilon' + N \cos \varepsilon \cdot \cos \varepsilon''}\right]^2 . \tag{5.177}$$

Das Reflexionsvermögen wird durch Interferenz erhöht, wenn die Brechzahl der Schicht größer ist als die Brechzahl des Trägers ($n > N$). Mit einer Titanoxidschicht ($n = 2{,}5$) auf Glas ($N = 1{,}5$) erhält man z. B. bei $\varepsilon = 74°$ das Reflexionsvermögen $R_s = 40\%$. Der große Einfallswinkel ist ein Nachteil derartiger Interferenzpolarisatoren.

Interferenzpolarisatoren sind hinsichtlich des erreichbaren Polarisationsgrades mit den anderen Polarisatoren vergleichbar. In der Lichtausbeute sind sie wegen ihrer praktisch vollkommenen Absorptionsfreiheit und durch die Möglichkeit, beide Teilbündel zu nutzen, teilweise anderen Polarisatoren überlegen.

5.5. Ablenkende Funktionselemente

5.5.1. Planspiegel

Abbildung am Planspiegel. Unter einem Planspiegel verstehen wir eine ebene reflektierende Fläche. Im allgemeinen besteht ein Planspiegel aus einer oberflächenverspiegelten polierten Glasplatte. Diese kann aber auch teildurchlässig sein oder

gar nicht verspiegelt. Damit bei der Fassung des Spiegels keine Durchbiegung auftritt, muß dieser eine bestimmte Mindestdicke haben. Für hohe Ansprüche rechnet man mit einem notwendigen Verhältnis aus Dicke und Diagonale von 1:10···1:5. Die Spiegelschicht kann aus Metall oder aus nichtleitenden Mehrfachschichten bestehen, mit denen eine hohe Reflexion durch Interferenz des Lichtes erreicht werden kann. Ein Planspiegel bildet vom geometrisch-optischen Standpunkt aus den gesamten Raum kollinear ab. Der Abbildungsmaßstab beträgt $\beta' = 1$. Ein einwandfreier Planspiegel innerhalb eines optischen Systems beeinflußt dessen Abbildungsqualität nicht, wenn die Beugung an seiner Fassung vernachlässigt werden kann.

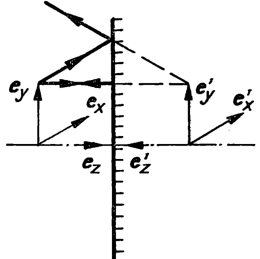


Abb. 5.79
Reflexion am Planspiegel

In der Abb. 5.79 ist zu erkennen, daß auf die Richtung des einfallenden Lichtes bezogen ein aufrechtes und seitenrichtiges Bild entsteht. (Wir brauchen nur in einen ebenen Spiegel zu sehen, um festzustellen, daß unser Kopf auch im Spiegelbild oben und unser linker Arm links bleibt.) Der Spiegel vertauscht aber gewissermaßen „vorn und hinten". Wir bringen mit dieser Formulierung zum Ausdruck, daß die z'- und die z-Achse entgegengesetzt gerichtet sind, während die x'- und die x-Achse sowie die y'- und die y-Achse gleich gerichtet sind. Durch das Vertauschen einer Achsenrichtung des Koordinatensystems entsteht aus einem Rechtssystem $\{x, y, z\}$ ein Linkssystem $\{x', y', z'\}$. Diese mathematische Transformation umschreiben wir in der Übertragung auf die optische Abbildung mit der Formulierung „das Bild ist spiegelverkehrt".

Ablenkung mit Planspiegeln. Die hauptsächliche Anwendung der Planspiegel besteht darin, die optische Achse und damit die abbildenden Bündel abzulenken.

> Planspiegel sind Bauelemente, mit denen die Elementarfunktion „Ablenken" realisiert wird. Die Ablenkung kann mit einer Änderung der Bildlage verbunden sein.

Abb. 5.80 zeigt die Anwendung eines Planspiegels zur Ablenkung der optischen Achse eines astronomischen Fernrohrs um 90°.

Beim Einsatz von Planspiegeln in optischen Systemen ist es notwendig, die Orientierung des Bildes im Raum (wir bezeichnen sie kurz als Bildlage) auf die durchgängige Lichtrichtung, also auf die Richtung des reflektierten Lichtes, zu beziehen. Das ist nach unseren Vereinbarungen stets die z'-Richtung. In der Abb. 5.79

ist deutlich, daß, in z'-Richtung gesehen, das Bild einseitig vertauscht ist. (Auch diesen Umstand beachten wir, wenn wir in einen ebenen Spiegel schauen. Versetzen wir uns in die Lage unseres Spiegelbildes, dann ist dessen rechter Arm das Bild unseres linken Armes.) Wir wollen in der Anwendung auf optische Systeme die Begriffe „links und rechts" sowie „oben und unten" zur Kennzeichnung der Bild-

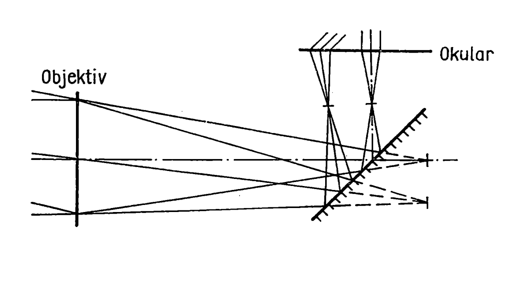


Abb. 5.80
Planspiegel zur Ablenkung der optischen Achse

Abb. 5.81
Aufgespalteter Planspiegel

lage vermeiden, weil diese relativ sind. Wir sprechen statt dessen von einseitiger Vertauschung, wenn eine Querrichtung erhalten bleibt und von zweiseitiger Vertauschung, wenn sich beide Querrichtungen ändern. (Nur in diesem Falle sprechen wir auch von Höhen- und Seitenvertauschung.)

Aufgespaltete Planspiegel. Nach Abschnitt 4.1.7. gilt für die aufgespaltete Planspiegelfläche

$$\hat{s}' = \hat{s}, \qquad \hat{\sigma}' = \hat{\sigma}.$$

Objekt und Bild fallen zusammen, und die Lichtstrahlen behalten ihre Richtung bei (Abb. 5.81). Der Winkel, den der Spiegel mit der optischen Achse eines zentrierten Systems bildet, kann dabei beliebig sein.

Die aufgespaltete Planspiegelfläche hat also den Nachteil, daß nicht zu erkennen ist, wie das Licht abgelenkt wird und wie sich die Bildlage verändert. Andererseits ist die ungeknickte optische Achse von Vorteil, wenn die Abbildung durch das übrige optische System zu untersuchen ist (Abb. 5.82).

Daraus folgt für das methodische Vorgehen:

> Die einfache Spiegelfläche ist zu verwenden, wenn der konkrete Verlauf der optischen Achse und die Bildlage zu untersuchen sind (Übergang von einem Rechts- in ein Linkssystem, ein- oder zweiseitige Vertauschung). Die aufgespaltete Spiegelfläche ist zu verwenden, wenn die Abbildung des optischen Systems unabhängig von den Knickungen der optischen Achse zu untersuchen ist. Die aufgespalteten Planspiegel haben darauf keinen Einfluß.

Allgemeine Behandlung von Planspiegeln. Wir gehen von einer Spiegelung aus (Abb. 5.83). In den Objektraum legen wir ein rechtwinkliges Rechtssystem mit den

Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$. Mit dem vektoriellen Reflexionsgesetz, das auch auf die Abbildung beliebiger Vektoren anwendbar ist, bestimmen wir die Komponenten der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}'_y$, $\boldsymbol{e}'_z$ des bildseitigen Koordinatensystems. Der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_z$ soll in Richtung der optischen Achse weisen. Der Normaleinheitsvektor des Spiegels hat die Komponenten

$$\boldsymbol{n} = \{0, \cos\alpha, \sin\alpha\}.$$

(Da wir hier offenlassen können, ob der Vektor eine Zeilen- oder eine Spaltenmatrix ist, verwenden wir die Schreibweise mit der geschweiften Klammer.)

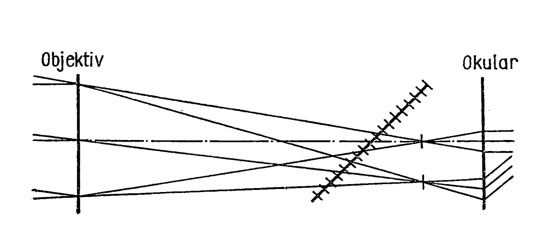


Abb. 5.82
Aufgespalteter Planspiegel im Optik-Schema nach Abb. 5.80

Abb. 5.83
Dreibein am Planspiegel

Die Einheitsvektoren des Objektraumes haben die Komponenten

$$\boldsymbol{e}_x = \{1, 0, 0\}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \{0, 1, 0\}, \qquad \boldsymbol{e}_z = \{0, 0, 1\}.$$

Die drei Rechenschemata des vektoriellen Reflexionsgesetzes sind in der Tab. 5.12 enthalten. Das Ergebnis lautet

$$\boldsymbol{e}'_x = \{1, 0, 0\}, \qquad \boldsymbol{e}'_y = \{0, -\cos 2\alpha, -\sin 2\alpha\}, \qquad \boldsymbol{e}'_z = \{0, -\sin 2\alpha, \cos 2\alpha\}.$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}'_y$ und $\boldsymbol{e}'_z$ sind die Richtungskosinus der Achsen des bildseitigen Koordinatensystems. Die Skalarprodukte zusammengehöriger Einheitsvektoren sind den Kosinus zwischen ihnen gleich. Sie betragen

$$\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}'_x = 1, \quad \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}'_y = -\cos 2\alpha = \cos(180^\circ + 2\alpha), \qquad \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}'_z = \cos 2\alpha.$$

Daraus folgt:
Die x'- und die x-Achse sind parallel zueinander;
die y'-Achse ist gegenüber der y-Achse um den Winkel $180^\circ + 2\alpha$ gedreht, was auch als Umkehr der Achse und Drehung um den Winkel 2α gedeutet werden kann;
die z'-Achse ist gegenüber der z-Achse um den Winkel 2α gedreht (Abb. 5.83).

Die Reflexion an einem Planspiegel stellt eine Drehung und Spiegelung des Koordinatensystems, also eine orthogenale Transformation dar. Die Transformationsdeterminante, deren Elemente die Richtungskosinus des bildseitigen Koordinaten-

systems sind, lautet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix} = -1. \tag{5.178}$$

Die Transformationsdeterminante hat bei einer reinen Drehung den Wert $\Delta = +1$, bei einer Spiegelung den Wert $\Delta = -1$. (Im übrigen stellt die Determinante das Spatprodukt $[e_x' e_y'] \, e_z' = [e_x' e_y' e_z']$ der drei Einheitsvektoren dar.)

Tabelle 5.12
Rechenschemata des vektoriellen Reflexionsgesetzes für ein Dreibein

0	0	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	
0	0	0	0	
0	1	0	0	
0	1	0	0	e_x'
0	0	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	
$\cos\alpha$	0	$-2\cos^2\alpha$	$-2\sin\alpha\cos\alpha$	
0	0	1	0	
$\cos\alpha$	0	$1 - 2\cos^2\alpha$		
	0	$-\cos 2\alpha$	$-\sin 2\alpha$	e_y'
0	0	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	
0	0	$-2\sin\alpha\cos\alpha$	$-2\sin^2\alpha$	
$\sin\alpha$	0	0	1	
$\sin\alpha$	0	$-2\sin\alpha\cos\alpha$	$1 - 2\sin^2\alpha$	
	0	$-\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	e_z'

Bei der Erhaltung des Symmetriecharakters des Koordinatensystems ist $\Delta = +1$ (ein Rechtssystem geht in ein Rechtssystem über).

Ein Wechsel der Symmetrie führt auf $\Delta = -1$ (ein Rechtssystem geht in ein Linkssystem über).

Durch wiederholte Anwendung der Transformation ergibt sich, daß beliebig viele Drehungen keine Symmetrieänderung zur Folge haben. Dasselbe gilt für eine gerade Anzahl von Spiegelungen. Eine ungerade Anzahl von Spiegelungen vertauscht den Charakter des Koordinatensystems. Bei s Spiegelungen gilt

$$\Delta^s = (-1)^s. \tag{5.179}$$

Wir fassen zusammen:

— Wir legen ein rechtshändiges Koordinatensystem so, daß die z-Achse in Richtung der optischen Achse weist. Durch Zeichnen oder Anwenden des vektoriellen Reflexionsgesetzes ermitteln wir die Lage des bildseitigen Dreibeins e_x', e_y', e_z'.

— Bei beliebig vielen Drehungen und s Spiegelungen hat die Transformationsdeterminante den Wert $\Delta = (-1)^s$. Für $\Delta = 1$ liegt bildseitig ein Rechtssystem, für $\Delta = -1$ ein Linkssystem vor.
— An den Skalarprodukten $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}'_y$, $\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}'_z$ ist die gegenseitige Lage zusammengehöriger Einheitsvektoren abzulesen.

Die Richtungsänderungen der optischen Achse sind in der Tab. 5.13, die Spezialfälle für Bildlageänderungen bei $\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}'_z = 1$ in der Tab. 5.14 zusammengestellt.

Tabelle 5.13
Richtungsänderungen der optischen Achse

$\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$	Deutung
1	fluchtende oder parallel versetzte optische Achse ohne Umkehr
0	rechtwinklige Knickung der optischen Achse
-1	fluchtende oder parallel versetzte optische Achse mit Umkehr
$\cos\delta$	Knickung der optischen Achse um den Winkel δ

Tabelle 5.14
Bildlageänderungen an Planspiegelfolgen ($\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}'_z = 1$ vorausgesetzt)

$\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x$	$\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y$	Deutung
1	1	keine Vertauschung
± 1	∓ 1	einseitige Vertauschung
-1	-1	zweiseitige Vertauschung

Zwei komplanare Spiegel. Wir untersuchen die Reflexion an zwei komplanaren Planspiegeln.

> Komplanare Planspiegel haben Normaleneinheitsvektoren, die durch eine Parallelverschiebung in eine Ebene gebracht werden können.

Der Lichtstrahl falle im Hauptschnitt ein. Dieser steht senkrecht auf den Spiegeln (Abb. 5.84). Die Spur des ersten Spiegels bilde mit der objektseitigen Lichtrichtung den Winkel α_1, die Spur des zweiten Spiegels den Winkel α_2.

Die bildseitig des ersten Spiegels vorliegenden Komponenten der Einheitsvektoren sind der Tab. 5.12 zu entnehmen. Die Komponenten von $\boldsymbol{e}_x$ bleiben auch am zweiten Spiegel unverändert, weil $\boldsymbol{e}'_x$ senkrecht auf der Einfallsebene steht. Die Rechenschemata für $\boldsymbol{e}'_y$ und $\boldsymbol{e}'_z$ enthält die Tab. 5.15.

Der Winkel γ, den die Spuren beider Spiegel miteinander bilden, ist durch

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$$

gegeben. Bildseitig des zweiten Spiegels haben die Einheitsvektoren die Komponenten

$$\boldsymbol{e}'_x = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{e}'_y = \{0, \cos 2\gamma, -\sin 2\gamma\}, \quad \boldsymbol{e}'_z = \{0, \sin 2\gamma, \cos 2\gamma\}.$$

Weil zwei Spiegelungen vorliegen, ist $\Delta = 1$. Die Skalarprodukte betragen

$$\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}'_x = 1\,, \quad \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}'_y = \cos 2\gamma\,, \quad \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}'_z = \cos 2\gamma\,. \tag{5.180}$$

Zwei komplanare Planspiegel drehen das Koordinatensystem um den Winkel 2γ. Die Ablenkung eines im Hauptschnitt einfallenden Lichtstrahls hängt nur vom Winkel γ zwischen den Spiegelspuren ab. Sie bleibt unverändert, wenn der Winkelspiegel als Ganzes um eine auf dem Hauptschnitt senkrecht stehende Achse gedreht wird.

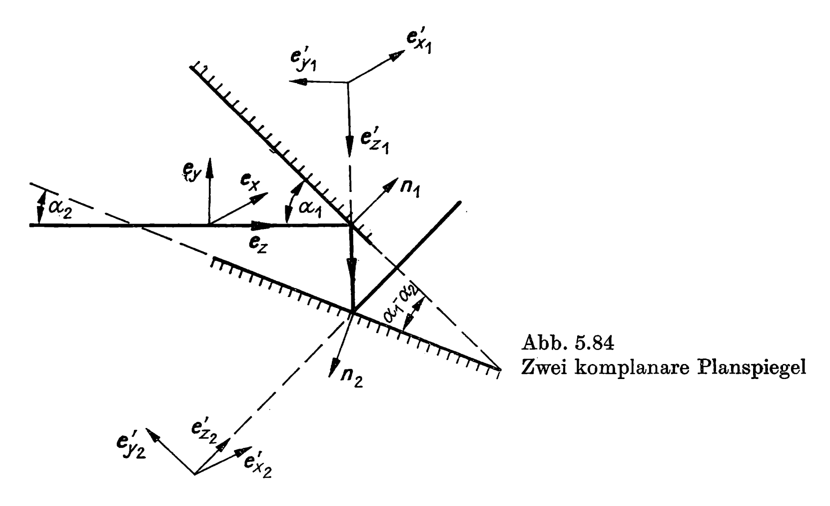


Abb. 5.84
Zwei komplanare Planspiegel

Tabelle 5.15
Durchrechnung eines Dreibeins am zweiten Spiegel zweier komplanarer Planspiegel

0	0	$-\cos\alpha_2$	$-\sin\alpha_2$	
$\cos 2\alpha_1 \cos\alpha_2$ $\sin 2\alpha_1 \sin\alpha_2$	0 0	$2\cos(2\alpha_1 - \alpha_2)\cos\alpha_2$ $-\cos 2\alpha_1$	$2\cos(2\alpha_1 - \alpha_2)\sin\alpha_2$ $-\sin 2\alpha_1$	
$\cos(2\alpha_1 - \alpha_2)$	0	$\cos[2(\alpha_1 - \alpha_2)]$	$-\sin[(\alpha_1 - \alpha_2)]$	$\boldsymbol{e}'_y$
0	0	$-\cos\alpha_2$	$-\sin\alpha_2$	
$\sin 2\alpha_1 \cos\alpha_2$ $-\cos 2\alpha_1 \sin\alpha_2$	0 0	$2\sin(2\alpha_1 - \alpha_2)\cos\alpha_2$ $-\sin 2\alpha_1$	$2\sin(2\alpha_1 - \alpha_2)\sin\alpha_2$ $\cos 2\alpha_1$	
$\sin(2\alpha_1 - \alpha_2)$	0	$\sin[2(\alpha_1 - \alpha_2)]$	$\cos[2(\alpha_1 - \alpha_2)$	$\boldsymbol{e}'_z$

Winkelspiegel. Folgende Spezialfälle seien hervorgehoben:

– Bei $\gamma = 90°$ (90°-Winkelspiegel, Abb. 5.85) ist

$$\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}'_x = 1\,, \qquad \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}'_y = -1\,, \qquad \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}'_z = -1\,.$$

Die Lichtrichtung wird umgekehrt.

— Bei $\gamma = 45°$ (45°-Winkelspiegel, Abb. 5.86) ist

$$e_x e_x' = 1, \quad e_y e_y' = 0, \quad e_z e_z' = 0.$$

Der 45°-Winkelspiegel lenkt um 90° ab.

— Bei $\gamma = 0°$ (Spiegeltreppe, Abb. 5.87) ist

$$e_x e_x' = 1, \quad e_y e_y' = 1, \quad e_z e_z' = 1.$$

Die optische Achse ist parallel versetzt, das Bild unvertauscht.

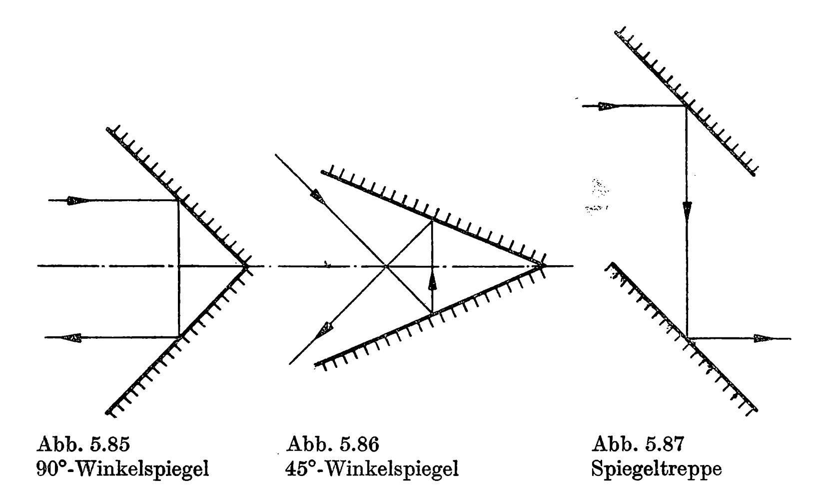


Abb. 5.85 90°-Winkelspiegel

Abb. 5.86 45°-Winkelspiegel

Abb. 5.87 Spiegeltreppe

Beliebig viele komplanare Planspiegel. Die Anwendung des vektoriellen Reflexionsgesetzes ergibt

$$e_x' = \{1, 0, 0\}, \quad e_y' = \{0, (-1)^s \cos\delta, -\sin\delta\}, \quad e_z' = \{0, (-1)^s \sin\delta, \cos\delta\}.$$

Die Ablenkung δ folgt bei s Spiegelungen aus

$$\delta = 2 \sum_{\nu=1}^{s} (-1)^{\nu-1} \alpha_\nu. \tag{5.181}$$

Es ist

$$e_x e_x' = 1, \quad e_y e_y' = (-1)^s \cos\delta, \quad e_z e_z' = \cos\delta. \tag{5.182}$$

Bei ungeradem s gilt $\Delta = -1$, das Spiegelsystem ist drehempfindlich.

Tripelspiegel. Ein Tripelspiegel besteht aus drei Planspiegeln, die senkrecht aufeinanderstehen. Die drei Spiegel bilden eine Würfelecke, und nur jeweils zwei davon sind komplanar (Abb. 5.88).

Bei der in der Abb. 5.88 angenommenen Lage des Koordinatensystems sind die Komponenten der Normaleneinheitsvektoren durch

$$n_1 = \{0, 1, 0\}, \quad n_2 = \{1, 0, 0\}, \quad n_3 = \{0, 0, -1\}$$

gegeben. Die Richtungskosinus des einfallenden Lichtstrahls betragen

$$\boldsymbol{s}_1 = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\}.$$

Das Rechenschema der Tab. 5.16 ergibt

$$\boldsymbol{s}_3' = \{-\cos\alpha_1, -\cos\alpha_2, -\cos\alpha_3\}$$

also

$$\boldsymbol{s}_3' = -\boldsymbol{s}_1.$$

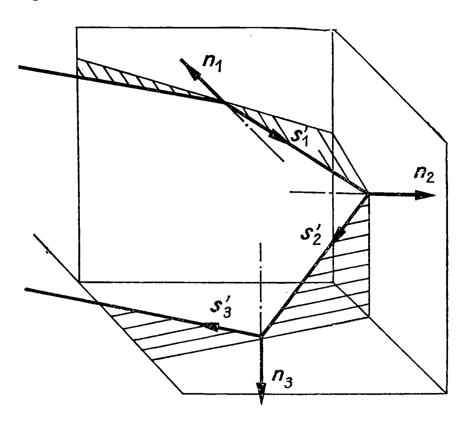


Abb. 5.88
Tripelspiegel

Tabelle 5.16
Durchrechnung eines Strahls am Tripelspiegel

0	0	1	0
$\cos\alpha_2$ 0	0 $\cos\alpha_1$	$-2\cos\alpha_2$ $\cos\alpha_2$	0 $\cos\alpha_3$
$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_1$	$-\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
$\cos\alpha_1$	1	0	0
0 0	$-2\cos\alpha_1$ $\cos\alpha_1$	0 $-\cos\alpha_2$	0 $\cos\alpha_3$
$\cos\alpha_1$	$-\cos\alpha_1$	$-\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
0	0	0	-1
0 $-\cos\alpha_3$	0 $-\cos\alpha_1$	0 $-\cos\alpha_2$	$-2\cos\alpha_3$ $\cos\alpha_3$
$-\cos\alpha_3$	$-\cos\alpha_1$	$-\cos\alpha_2$	$-\cos\alpha_3$

Der Tripelspiegel lenkt einen Lichtstrahl beliebiger Einfallsrichtung um 180° ab. Er reflektiert das Licht unabhängig vom Einfallswinkel entgegen der Einfallsrichtung.

Der Tripelspiegel findet z. B. in Interferometern und in den Elementen der Rückstrahler Verwendung.

Es könnte der Eindruck entstehen, daß ein 90°-Winkelspiegel dieselbe Funktion erfüllen würde. Der 90°-Winkelspiegel reflektiert jedoch nur die Strahlen entgegen der Einfallsrichtung, die im Hauptschnitt verlaufen. Die Flächen 1 und 2 des Tripelspiegels stellen einen 90°-Winkelspiegel dar. Der Strahlvektor $\boldsymbol{s}_2'$ hat nach der Tab. 5.16 die Komponenten

$$\boldsymbol{s}_2' = \{-\cos\alpha_1, \; -\cos\alpha_2, \; \cos\alpha_3\}.$$

Die x- und die y-Komponente sind zwar entgegengesetzt, aber die z-Komponente nicht. Der Strahl ist gewissermaßen verkantet. Nur bei $\alpha_3 = 90°$, also für einen senkrecht zur z-Achse einfallenden Lichtstrahl, ist

$$\boldsymbol{s}_2' = \{-\cos\alpha_1, \; -\cos\alpha_2, \; 0\}$$

und damit

$$\boldsymbol{s}_2' = -\boldsymbol{s}_1.$$

5.5.2. Planparallele Platten

Eine planparallele Platte, wie sie z. B. in der Mikroskopie als Deckglas oder in der Fotografie als Filter vorkommt, beeinflußt die abbildenden Strahlenbündel.

Die planparallele Platte grenze beiderseits an den gleichen Stoff an (Abb. 5.89, S. 448). Ein Lichtstrahl wird zweimal gebrochen. Aus Symmetriegründen wird er dabei um die Strecke v parallel zu sich versetzt. Damit ist die Schnittweitenänderung

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

verbunden. Nach Tab. 5.17 beträgt die Versetzung

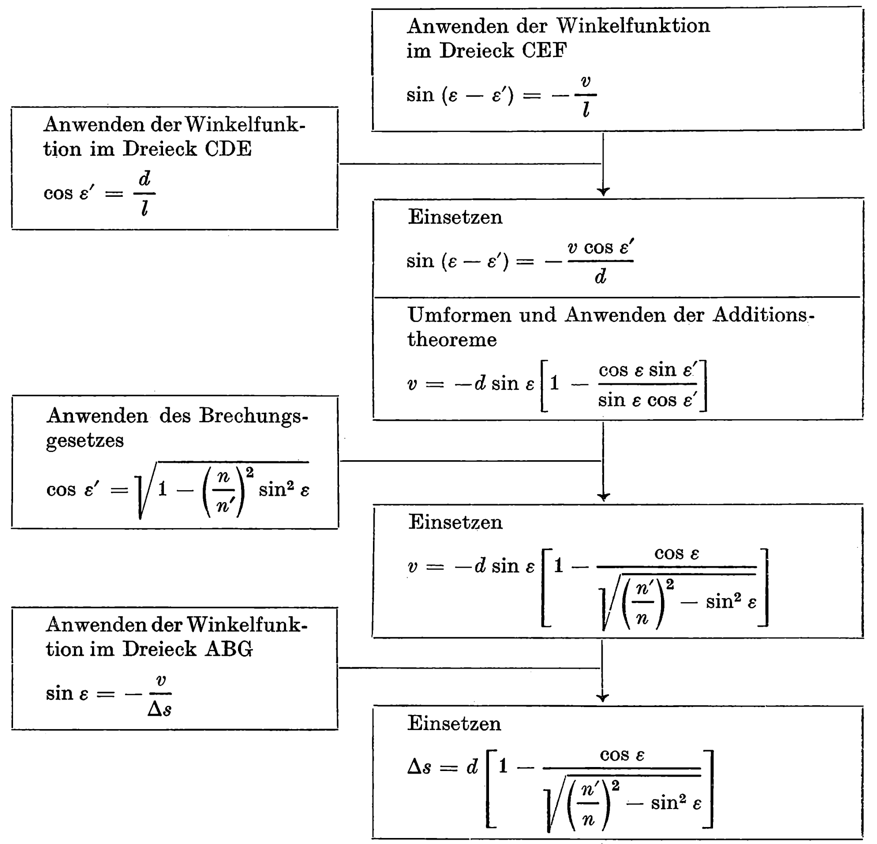
$$v = -d \cdot \sin\varepsilon \left[1 - \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2\varepsilon}}\right] \tag{5.183}$$

und die Schnittweitenänderung

$$\Delta s = d \left[1 - \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2\varepsilon}}\right]. \tag{5.184}$$

Die Schnittweitenänderung ist eine Funktion des Einfallswinkels. Eine planparallele Platte erzeugt kein punktförmiges Bild. Für sehr kleine Einfallswinkel, also im paraxialen Gebiet, gilt bei der senkrecht zur optischen Achse stehenden Platte die

Tabelle 5.17
Ableitung der Gleichungen für die planparallele Platte



Näherungsformel

$$\Delta s = d \frac{\frac{n'}{n} - 1}{\frac{n'}{n}}. \tag{5.185}$$

Bei $n = 1$, $n' = 1{,}5$ ergibt sich z. B. $\Delta s = d/3$.

Auf die Schnittweitenänderung muß beim Einbau einer planparallelen Platte in ein optisches System besonders geachtet werden.

Wenn nur die Abbildung durch das zentrierte optische System untersucht werden soll, kann die reduzierte Plattendicke eingeführt werden.

Die reduzierte Plattendicke $\dot{d}$ ist die Dicke, bei der die Platte in einem abbildenden Strahlenbündel formal keine Schnittweitenänderung und keine Parallelversetzung einführt.

Nach Abb. 5.90 ist

$$\mathring{d} = d - \Delta s$$

also mit Gl. (5.184)

$$\mathring{d} = \frac{d \cos \varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon}}. \tag{5.186}$$

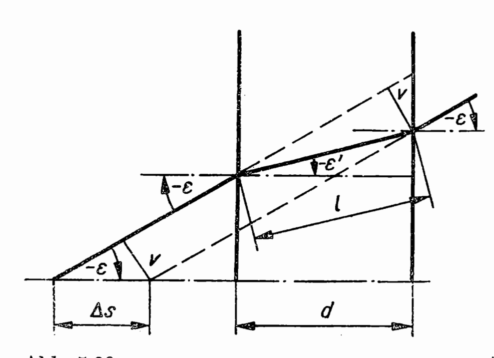


Abb. 5.89
Strahlenverlauf an der planparallelen Platte

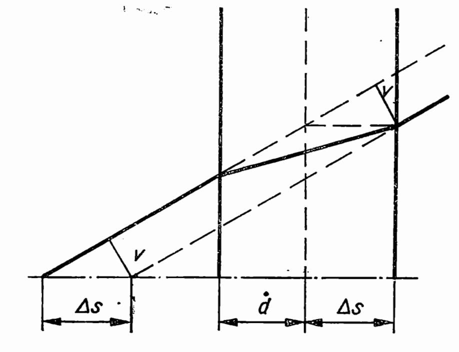


Abb. 5.90
Zur Definition der reduzierten Dicke

Für kleine Einfallswinkel gilt

$$\mathring{d} = \frac{n}{n'} d. \tag{5.187}$$

Mit der reduzierten Plattendicke kann die Schnittweitenänderung durch

$$\Delta s = d - \mathring{d} \tag{5.188}$$

ausgedrückt werden.

> Die Schnittweitenänderung ist die Differenz aus der Plattendicke und der reduzierten Plattendicke.

Eine planparallele Platte, die um eine senkrecht zum Meridionalschnitt stehende Achse drehbar ist, erlaubt kleine Strahlversetzungen. Sie wirkt damit als optisches Mikrometer (Abb. 5.91). Die Empfindlichkeit ist durch den Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon}$$

gegeben.
Aus Gl. (5.183) und Gl. (5.186) folgt zunächst

$$v = (\mathring{d} - d) \sin \varepsilon. \tag{5.189}$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\dot{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \sin\varepsilon + (\dot{d} - d)\cos\varepsilon .$$

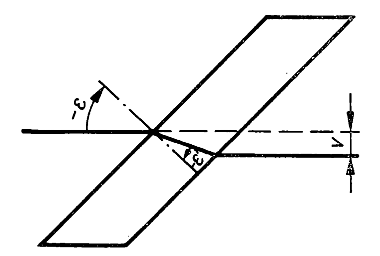


Abb. 5.91
Planplatten-Mikrometer

Weiter gilt

$$\frac{\mathrm{d}\dot{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} = -d \sin\varepsilon \frac{\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - 1\right]\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2\varepsilon}}{\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2\varepsilon\right]^2},$$

also

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon} = d\sin^2\varepsilon \frac{1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}{\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2\varepsilon\right]^{3/2}} + d\cos\varepsilon \left\{\frac{\cos\varepsilon}{\left[\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2\varepsilon\right]^{1/2}} - 1\right\}. \qquad (5.190)$$

Tab. 5.18 enthält für $n'/n = 1{,}5$ Zahlenwerte, die mit Gl. (5.190) berechnet worden sind. Bei einer Platte, die um 45° geneigt im Strahlengang steht und die 5 mm dick ist, ändert eine Drehung um 1° die Versetzung um 0,0525 mm.

Tabelle 5.18
Empfindlichkeit des Planplattenmikrometers

$\pm\varepsilon$	$-\mathrm{d}v/\mathrm{d}\varepsilon$
0°	0,333d
30°	0,446d
45°	0,599d
60°	0,806d
90°	0,894d

5.5.3. Planspiegelplatten

Es gibt Anwendungen von Spiegelflächen, bei denen der Schutz der Metallschicht erwünscht ist. Das Spiegelmetall wird auf die Rückseite der planparallelen Platte

aufgedampft und durch eine Lackschicht geschützt. Auch teildurchlässige Platten bestehen aus einseitig teilverspiegelten Glasplatten.

Rückverspiegelte Platten sind das Analogon zu Spiegellinsen, bei denen eine Fläche brechend, eine Fläche reflektierend ist.

Wir bezeichnen einseitig verspiegelte planparallele Platten als Planspiegelplatten. An diesen wird das Licht zweimal gebrochen und einmal reflektiert (Abb. 5.92). Der Einfallswinkel für die erste Brechung ist gleich dem Brechungswinkel bei der zweiten

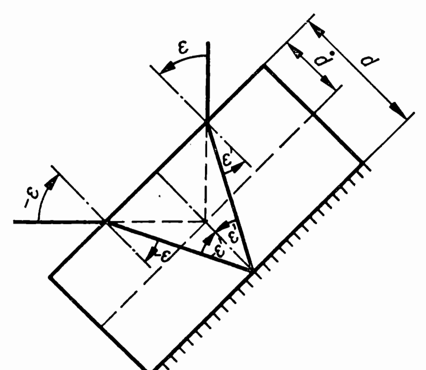


Abb. 5.92
Planspiegelplatte

Brechung. Ein Lichtstrahl wird also so abgelenkt, als würde das Reflexionsgesetz für die Planspiegelplatte als Ganzes gelten, allerdings mit einer seitlichen Versetzung des Lichtstrahls. Das Licht wird scheinbar an einer innerhalb der Platte liegenden Ebene reflektiert (in der Abb. 5.92 gestrichelt eingezeichnet). Die scheinbare Plattendicke $\mathring{d}$ ist gleich der reduzierten Plattendicke einer planparallelen Platte, wie sie in der Gl. (5.186) angegeben ist.

Beim Einbau der Planspiegelplatte in ein zentriertes optisches System muß auf die Schnittweitenänderung geachtet werden. Wir erläutern dies am Beispiel der Abb. 5.93, das dasselbe Fernrohr wie die Abb. 5.80 enthält. In der Abb. 5.94 ist die Planspiegelplatte mit der aufgespalteten Spiegelfläche dargestellt. (Die Platte ist in den Beispielen der Deutlichkeit halber sehr dick gewählt worden.)

Die Planspiegelplatte wirkt wie eine schräg stehende planparallele Platte mit der Plattendicke $2d$. Wir können die Gl. (5.184) für die Schnittweitenänderung an der senkrecht zur optischen Achse stehenden Planparallelplatte anwenden. Wir müssen aber die Schnittweitenänderung senkrecht zur Platte messen und dürfen sie nur für Strahlen angeben, die in der Umgebung der optischen Achse bleiben. Es gilt dann nach Gl. (5.188)

$$\Delta s = 2(d - \mathring{d}) \tag{5.191}$$

bzw. mit Gl. (5.186)

$$\Delta s = 2d \left[1 - \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{n'}{n}\right)^2 - \sin^2 \varepsilon}} \right] \tag{5.192}$$

(ε = Einfallswinkel der optischen Achse). Als Faustregel für den häufig vorkommenden Fall $\varepsilon = 45°$ diene

$$\Delta s \approx d$$

(bei $n = 1$, $n' = 1{,}58$ erfüllt).

Schließlich können wir bei der Untersuchung der Abbildung durch das zentrierte System die Planspiegelplatte mit aufgespalteter Spiegelfläche und reduzierter Dicke zeichnen. Damit fallen sowohl die Brechung wie auch die Schnittweitenänderung formal weg (Abb. 5.95).

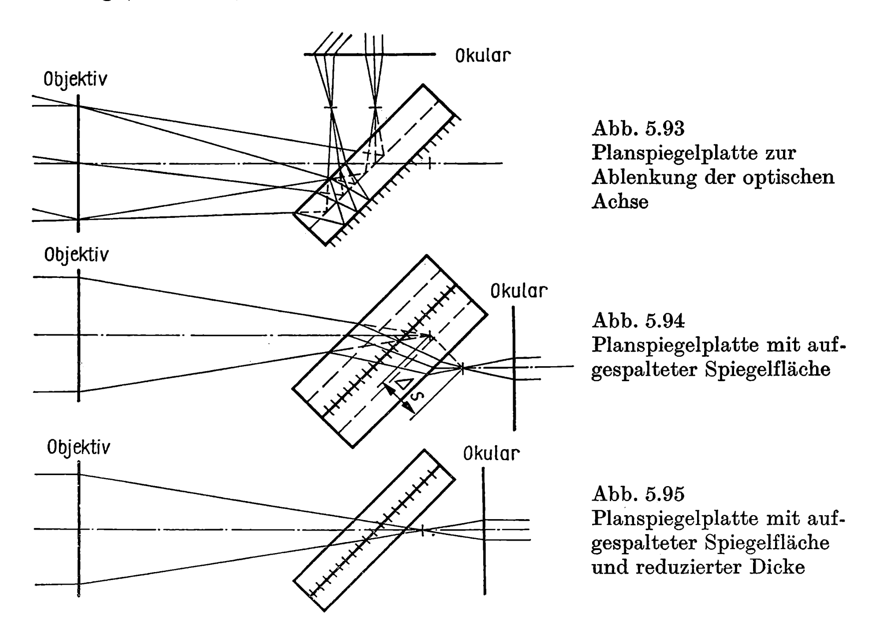


Abb. 5.93
Planspiegelplatte zur Ablenkung der optischen Achse

Abb. 5.94
Planspiegelplatte mit aufgespalteter Spiegelfläche

Abb. 5.95
Planspiegelplatte mit aufgespalteter Spiegelfläche und reduzierter Dicke

Planspiegelplatten haben im wesentlichen folgende Nachteile:

— Ein Teil des Lichtes wird auch an der Vorderfläche reflektiert. Es entstehen ein Vorderreflex und durch Mehrfachreflexionen innerhalb der Platte Nebenreflexe. Die Planspiegelplatte liefert Nebenbilder.

— Mit der zweimaligen Brechung der optischen Achse ist infolge der Dispersion eine Farbaufspaltung verbunden.

— Die Planspiegelplatte verschlechtert die Strahlenvereinigung (Astigmatismus).

— Bei einer metallischen Spiegelfläche hängt das Reflexionsvermögen von der Wellenlänge ab. Die Beständigkeit kann durch Bläschenbildung und Trübungen vermindert werden.

5.5.4. Reflexionsprismen

Eigenschaften von Reflexionsprismen. Die im Abschn. 5.5.3. genannten Nachteile der Planspiegelplatten lassen sich teilweise vermeiden, wenn zur Ablenkung des Lichtes Reflexionsprismen verwendet werden.

Ein Reflexionsprisma ist ein Prisma mit mindestens einer Spiegelfläche. Reflexionsprismen stellen ablenkende optische Bauelemente dar. Mit der Ablenkung kann eine Änderung der Bildlage verbunden sein.

Abb. 5.96 demonstriert schematisch den Übergang von der Planspiegelplatte zum Reflexionsprisma. Die Endflächen des Prismas stehen senkrecht zur optischen Achse. Die an der Planspiegelplatte auftretende Brechung der optischen Achse und die damit verbundenen Nachteile fallen beim Prisma weg.

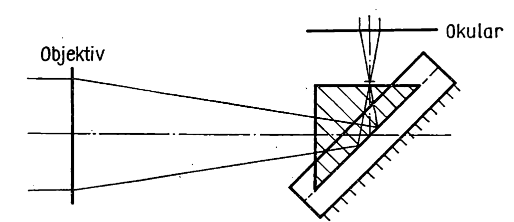


Abb. 5.96
Übergang von der Planspiegelplatte zum Reflexionsprisma

Die Einfallswinkel an der reflektierenden Fläche sind beim Prisma kleiner als bei der Planspiegelplatte. Dadurch läßt sich die Spiegelfläche für Bündel mit nicht zu großem Öffnungswinkel als totalreflektierende Fläche ausbilden. Die metallische Verspiegelung mit ihren Nachteilen entfällt. Wegen der im allgemeinen bei Reflexionsprismen vorhandenen totalreflektierenden Flächen wird manchmal auch von totalreflektierenden Prismen gesprochen, obwohl das nicht für alle Reflexionsprismen zutreffend ist.

Reflexionsprismen haben im wesentlichen folgende Vorteile gegenüber Planspiegeln und Planspiegelplatten:

— Reflexionsprismen haben oft weniger Spiegelmetallflächen als Spiegel, weil die Totalreflexion genutzt wird. Das bringt bei hochtransparenten Prismenwerkstoffen höhere Lichtdurchlässigkeit im gesamten Spektrum, größere Haltbarkeit und einfachere Fertigung der reflektierenden Flächen mit sich.

— Die Eintritts- und die Austrittsfläche lassen sich im allgemeinen so zur optischen Achse orientieren, daß kleine Brechungswinkel und damit geringe Farbaufspaltung auftreten. Sämtliche Nebenreflexe werden weitgehend herabgesetzt.

— Mehrere Spiegelflächen sind beim Reflexionsprisma starr miteinander verbunden. Die Prismenwinkel können so toleriert werden, daß die Ablenkung des Lichtes mit einer entsprechenden Genauigkeit garantiert ist. Das Reflexionsprisma wird als Ganzes justiert, nicht die Einzelflächen zueinander.

Reflexionsprismen haben gegenüber Planspiegeln auch Nachteile, die besonders bei großen Bündeldurchmessern in Erscheinung treten. Die wesentlichen Nachteile sind:

— Reflexionsprismen haben ein größeres Gewicht als Planspiegelplatten. Es ist deshalb wichtig, das für eine bestimmte Aufgabe kleinste Prisma auszuwählen und dessen Mindestabmessungen zu bestimmen.

— Große Prismen sind mit großen Glaswegen des Lichtes verbunden. (Zur abgekürzten Sprechweise verwenden wir ständig den Begriff „Glasweg", obwohl die Prismen auch aus anderen optischen Werkstoffen bestehen können.) Bei großen Glaswegen können Inhomogenitäten des Glases stören. Die Absorption des Lichtes im Glas setzt die spektrale Durchlässigkeit herab, so daß der diesbezügliche Vorteil der Totalreflexion nicht zum Tragen kommt.

Wir beschäftigen uns nun mit den Problemen, die bei der Berechnung eines Reflexionsprismas zu lösen sind. Wir nehmen an, daß das Prisma Bestandteil eines zentrierten optischen Systems sein soll. Es sei bereits so ausgewählt, daß es die geforderte Lichtablenkung realisiert.

Für ein Reflexionsprisma sind

— die paraxiale Schnittweitenänderung des Lichtbündels,

— die Mindestgröße,

— die maximale Strahlneigung, die ohne Verspiegelung möglich ist,

— der Einfluß auf die Bildlage,

— der Einfluß auf die Bildgüte

zu ermitteln.

Der Einfluß auf die Bildgüte wird hier nicht behandelt. Die übrigen Größen bestimmen wir zunächst, indem wir den Strahlenverlauf im zugrunde gelegten optischen System mit den Beziehungen des paraxialen Gebietes berechnen oder zeichnen. Die Methodik erläutern wir am Beispiel eines Halbwürfelprismas (Abb. 5.97).

Die paraxiale Schnittweitenänderung des Bündels tritt ein, weil das Reflexionsprisma wie eine planparallele Platte wirkt. Wir erkennen dies, wenn wir die Spiegelfläche aufspalten (Abb. 5.98). Die Dicke der planparallelen Platte hängt vom Glasweg der optischen Achse ab. Dieser ist durch die Größe des Prismas festgelegt. Zur Bestimmung des Glasweges gehen wir davon aus, daß die Größe des Prismas nur durch die Lichtbündel festgelegt ist. Fassungszugaben berücksichtigen wir nicht. Der in der Abb. 5.97 gestrichelt eingezeichnete Strahl hat denselben Glasweg wie die optische Achse. Bei ihm ist einfach abzulesen, daß

$$d = D$$

ist. Die paraxiale Schnittweitenänderung beträgt nach Gl. (5.185)

$$\Delta s = d\,\frac{n-1}{n}. \tag{5.193}$$

(In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit n die relative Brechzahl der Prismen gegen Luft. Es gilt dann in Gl. (5.185) der Übergang $n'/n \to n$.)

Die Mindestgröße bestimmen wir im allgemeinen zeichnerisch. Dazu wird das Prisma mit aufgespalteter Spiegelfläche und reduzierter Dicke $\dot{d}$ gezeichnet. Wegen

$$\Delta s = d - \dot{d} \tag{5.194}$$

gehen dann sämtliche Lichtstrahlen ungebrochen durch das Prisma hindurch (Abb. 5.99). Da jedoch nach Gl. (5.186) für einen beliebigen Lichtstrahl

$$\dot{d} = \frac{d \cos \varepsilon}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}}$$

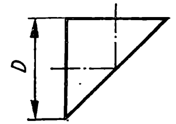


Abb. 5.97
Halbwürfel mit einer Reflexion

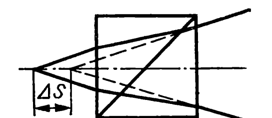


Abb. 5.98
Halbwürfel mit aufgespalteter Spiegelfläche

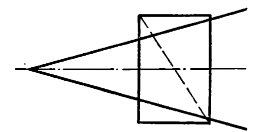


Abb. 5.99
Halbwürfel als Planparallelplatte mit reduzierter Dicke

ist, müßte die reduzierte Dicke für jeden Lichtstrahl anders eingezeichnet werden. Die Mindestgröße wird jedoch für nicht zu große Einfallswinkel ausreichend genau bestimmt, wenn wir mit der reduzierten Dicke für die optische Achse rechnen. Im Falle des Halbwürfels mit $\varepsilon_0 = 0$ gilt also

$$\dot{d} = \frac{d}{n}.$$

Die Lichteintrittsfläche des Prismas bleibt beim Übergang zur reduzierten Dicke an derselben Stelle.

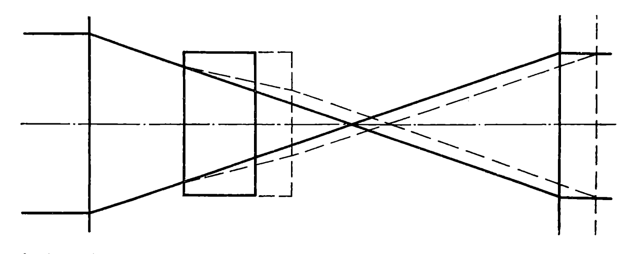


Abb. 5.100
Planplattenwirkung im konvergenten Bündel

Nach Abb. 5.100 ist diese Feststellung trivial, wenn das Prisma im konvergenten Strahlengang steht.

Bei divergentem Strahlengang (Abb. 5.101) gilt nach Abb. 5.102 für die äquivalente planparallele Platte

$$h_2 = h_1 - d \cdot \tan \varepsilon',$$

woraus mit dem Brechungsgesetz und der Definition der reduzierten Dicke

$$h_2 = h_1 - \dot{d} \cdot \tan \varepsilon$$

hervorgeht.

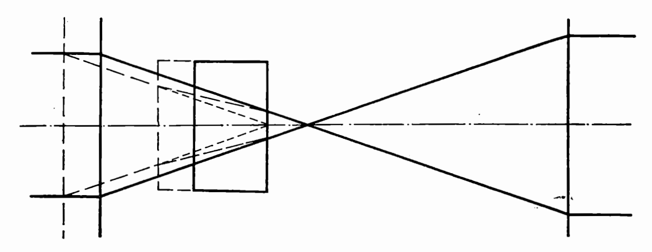


Abb. 5.101
Planplattenwirkung im divergenten Bündel

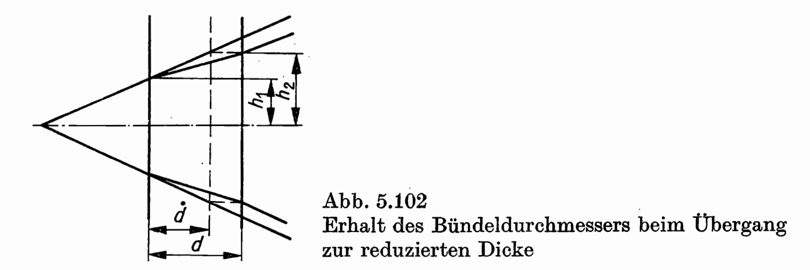


Abb. 5.102
Erhalt des Bündeldurchmessers beim Übergang zur reduzierten Dicke

Für die Platte mit der reduzierten Dicke ergibt sich nach Abb. 5.102 für den durchgehenden Strahlenverlauf ebenfalls

$$h_2 = h_1 - \dot{d} \cdot \tan \varepsilon.$$

Die Durchstoßhöhe in der Austrittsfläche der Platte mit der reduzierten Dicke ist also dieselbe wie bei der Platte mit der Dicke d. Damit ist die Behauptung, daß die Lichteintrittsfläche an derselben Stelle bleiben muß, auch für divergenten Strahlengang bewiesen. Stehen die Endflächen senkrecht zur optischen Achse, dann gilt angenähert

$$h_2 = h_1 - \frac{d}{n} \varepsilon.$$

Bei der Bestimmung der Mindestgröße des Prismas müssen auch die schrägen Bündel berücksichtigt werden.

In der Abb. 5.103 würde der mittlere Teil der Platte nur das Bündel vollständig hindurchlassen, das den Achsenpunkt abbildet. Die Vergrößerung der Platte bis

zum Hauptstrahl garantiert, daß der Rand des Feldes mit einem Bündel abgebildet wird, das den Hauptstrahl enthält.

Die Hinzunahme des gesamten getönten Teils ergibt ein Prisma, das nicht bündelbegrenzend wirkt. Dieser Fall ist manchmal nur mit einem wesentlich größeren Prisma erreichbar als der Fall der Abschattung bis zum halben meridionalen Bündeldurchmesser für den Feldrand. Deshalb wird gelegentlich die Wirkung des Prismas als Abschattblende in Kauf genommen, um an Gewicht zu sparen.

Rechnerische Bestimmung der Mindestgröße. Die Entfernung Zwischenbild — nächstgelegene Prismenfläche e' wählen wir stets positiv.

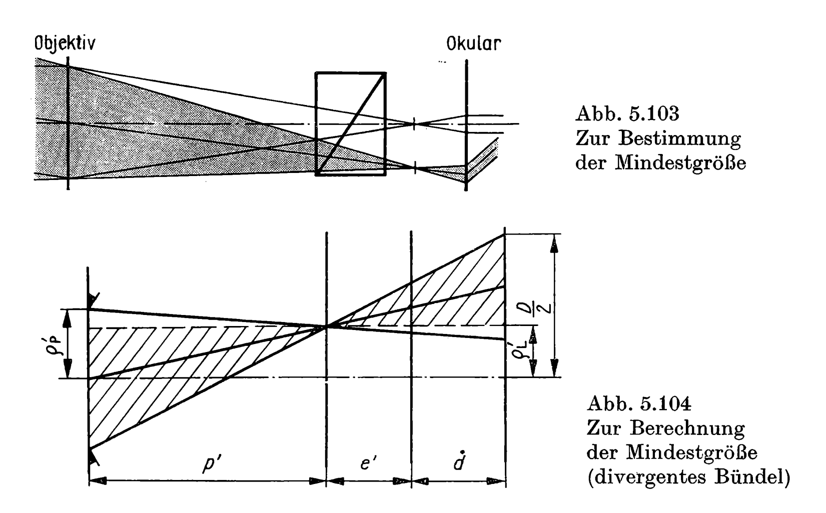


Abb. 5.103
Zur Bestimmung
der Mindestgröße

Abb. 5.104
Zur Berechnung
der Mindestgröße
(divergentes Bündel)

In der Abb. 5.104 bestimmt die dem Zwischenbild abgewandte Prismenfläche die Prismengröße. In den ähnlichen Dreiecken, die in der Abb. 5.104 hervorgehoben sind, gilt

$$\frac{\frac{D}{2} - \varrho_L'}{\varrho_P' + \varrho_L'} = \frac{e' + \dot{d}}{p'}. \tag{5.195}$$

Die reduzierte Dicke des Prismas ist dem Durchmesser der Austrittsfläche proportional. Außerdem kann sie durch weitere Glaswege im Prisma vergrößert sein. So ist z. B. beim Halbwürfel

$$\dot{d} = \frac{D}{n},$$

beim Rhomboidprisma

$$\dot{d} = \frac{D}{n} + \frac{v}{n}.$$

Allgemein setzen wir

$$\mathring{d} = c_1 D + c_2, \tag{5.196}$$

wobei die Konstanten c_1 und c_2 vom Prismentyp und vom Prismenwerkstoff abhängen. Einsetzen von $\mathring{d}$ in Gl. (5.195) und auflösen nach D ergibt

$$D = 2\,\frac{(e' + c_2)\,(\varrho_p' + \varrho_L') + \varrho_L' p'}{p' - 2c_1(\varrho_p' + \varrho_L')}. \tag{5.197}$$

Bei Randabschattung bis zum Hauptstrahl (halbes meridionales Büschel abgeblendet) ist formal $\varrho_p' = 0$ zu setzen, so daß

$$D = \frac{\varrho_L'(p' + e' + c_2)}{p' - 2c_1\varrho_L'} \tag{5.198}$$

wird.

In der Abb. 5.105 wird die Prismengröße durch den Bündeldurchmesser in der dem Zwischenbild zugewandten Prismenfläche bestimmt. In den in der Abb. 5.105 hervorgehobenen ähnlichen Dreiecken ist

$$\frac{\varrho_L' - \varrho_p'}{\varrho_L' - \dfrac{D}{2}} = \frac{p'}{e'}. \tag{5.199}$$

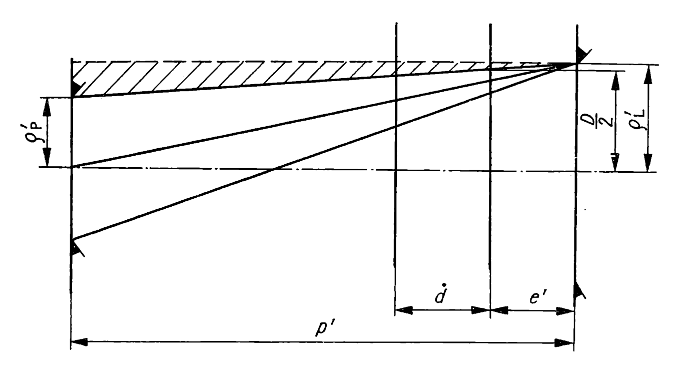


Abb. 5.105
Zur Berechnung der Mindestgröße (konvergentes Bündel)

Daraus folgt

$$D = 2\varrho_L'\left(1 - \frac{e'}{p'}\right) + \frac{2e'\varrho_p'}{p'}. \tag{5.200}$$

Bei Randabschattung bis zum Hauptstrahl ($\varrho_p' = 0$) gilt

$$D = 2\varrho_L'\left(1 - \frac{e'}{p'}\right). \tag{5.201}$$

Zu beachten ist, daß beim Einführen von Randabschattung ein Wechsel der die Größe bestimmenden Fläche eintreten kann. War es ohne Randabschattung die dem Zwischenbild abgewandte Fläche, dann kann es mit Randabschattung die zugewandte Fläche werden.

Beispiel. Ein Fernrohr mit der Objektbrennweite $f'_{\mathrm{Ob}} = 840$ mm und der Okularbrennweite $f'_{\mathrm{Ok}} = 50$ mm soll mit einem Zenitprisma ausgerüstet werden. Dieses hat die Aufgabe, die optische Achse um 90° zu knicken, damit hochstehende Sterne bequemer beobachtet werden können. Die Austrittspupille des Objektivs fällt mit der Hauptebene H' des Objektivs zusammen und hat den Durchmesser $2\varrho'_{\mathrm{P}} = 63$ mm. Die Feldblende steht in der bildseitigen Brennebene des Objektivs und hat den Durchmesser $2\varrho'_{\mathrm{L}} = 20$ mm. Die Aufgabe ist mit einem Halbwürfelprisma zu lösen. Es hat von den um 90° ablenkenden Prismen die kleinsten Abmessungen und ist relativ leicht zu fertigen. Andererseits braucht der Ablenkungswinkel von 90° nicht so genau eingehalten zu werden, so daß ein drehunempfindliches Prisma, wie z. B. das Pentaprisma, nicht notwendig ist.

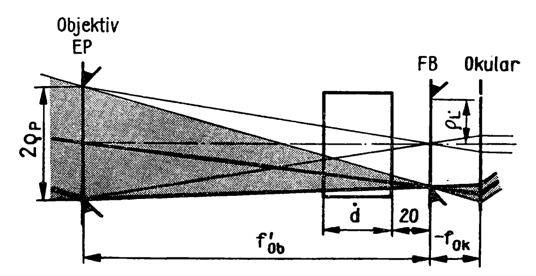


Abb. 5.106
Zum Zahlenbeispiel

Das Prisma soll aus Glas mit der Brechzahl $n = 1{,}516$ hergestellt werden. Seine Austrittsfläche liegt 20 mm vor dem Zwischenbild. (Abb. 5.106).

— Randabschattung bis zum Hauptstrahl. In diesem Fall bestimmt die Austrittsfläche des Prismas dessen Durchmesser. Es ist $p' = 840$ mm, $e' = 20$ mm, also nach Gl. (5.201)

$$D = 19{,}52 \text{ mm}.$$

Die Schnittweitenänderung folgt aus

$$\Delta s = d - \dot{d} \quad \text{mit} \quad \dot{d} = \frac{d}{n} \quad \text{und} \quad d = D.$$

Sie beträgt

$$\Delta s = 6{,}64 \text{ mm}.$$

— Ohne Randabschattung. In diesem Fall bestimmt die Eintrittsfläche des Prismas dessen Durchmesser. Für den Halbwürfel ist

$$c_1 = \frac{1}{n}, \qquad c_2 = 0,$$

also nach Gl. (5.197)

$$D = 21{,}76 \text{ mm}.$$

Die Schnittweitenänderung beträgt

$$\Delta s = 7{,}41 \text{ mm}.$$

Sicherung der Totalreflexion. Die Forderung nach einer totalreflektierenden Fläche im Prisma begrenzt die maximal zulässige Strahlneigung an der Eintrittsfläche. Nach Abb. 5.107 gilt

$$\varepsilon_1 = \sigma, \qquad \beta = \varepsilon_1' - \varepsilon_2.$$

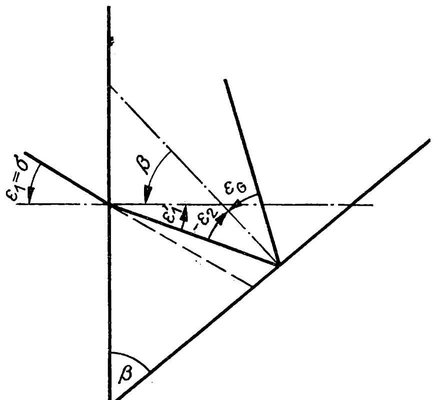


Abb. 5.107
Sicherung der Totalreflexion

Wir setzen für $|\varepsilon_2|$ den zulässigen Maximalwert ein:

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_G \quad (\varepsilon_G \text{ positiv angenommen}),$$

und erhalten aus dem Brechungsgesetz

$$\sin \sigma_M = n \sin (\beta - \varepsilon_G). \tag{5.202}$$

Für $\beta = 45°$ (Halbwürfel) gilt z. B.

$$\sigma_M = 5{,}3° \quad \text{bei} \quad n = 1{,}51,$$

$$\sigma_M = 15{,}4° \quad \text{bei} \quad n = 1{,}7.$$

Bildlage. Für die Bildlage gelten bei Reflexionsprismen dieselben Regeln wie bei Planspiegelfolgen. Bei den meisten Reflexionsprismen stehen die Eintritts- und die Austrittsfläche senkrecht zur optischen Achse, so daß diese Flächen die Bildlage nicht beeinflussen. Aber auch Brechungen der optischen Achse bewirken nur eine Drehung des Koordinatensystems, so daß keine Seitenvertauschung im Bild entsteht. Für Brechungen ist stets $\varDelta = 1$. Der Halbwürfel wirkt wie ein Planspiegel. Es ist $\varDelta = -1$, $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x' = 1$, $\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y' = 0$, $\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z' = 0$, das Bild einseitig vertauscht. Zur Über-

sicht ordnen wir jedem Prisma ein Symbol zu. Es enthält in spitzen Klammern die Anzahl der Reflexionen s sowie das Zahlentripel $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x'$, $\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y'$, $\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z'$.

Es lautet also

$$\langle s \mid \boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x', \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y', \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z'\rangle.$$

Bei $\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z' = \pm 1$ kann die optische Achse fluchtend oder parallel versetzt sein. Bei parallelem Austritt der optischen Achse schreiben wir $\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z' = \pm\bar{1}$. Der Halbwürfel mit einer Reflexion hat das Symbol

$$\langle 1 \mid 1, 0, 0\rangle.$$

Einfache Reflexionsprismen. Wir geben einen Überblick über die wichtigsten einfachen Reflexionsprismen. Darunter verstehen wir Prismen, die aus einem Stück gefertigt werden und bei denen in jedem Punkt der reflektierenden Flächen von jedem abbildenden Bündel nur ein Lichtstrahl auftrifft. Die angegebenen Abmessungen sind die optische Mindestgröße für achsparallele Bündel. Bei konvergenten oder divergenten Bündeln sind im allgemeinen noch unbenutzte Teile abzuschleifen. Fassungszugaben oder andere konstruktiv bedingte Änderungen sind von Fall zu Fall verschieden und können nicht generell berücksichtigt werden.

Halbwürfel mit einer Reflexion (Abb. 5.108), $\langle 1 \mid 1, 0, 0\rangle$. Der Halbwürfel wurde bereits den vorangehenden Ausführungen zugrunde gelegt. Die Kantenlänge ist gleich dem Bündeldurchmesser D, ebenso der Glasweg. Das Bündel wird einmal reflektiert und um 90° abgelenkt. Das Bild ist einseitig vertauscht. Der Halbwürfel mit einer Reflexion entspricht einem Planspiegel.

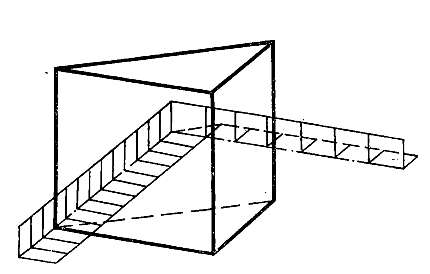


Abb. 5.108
Halbwürfel mit einer Reflexion

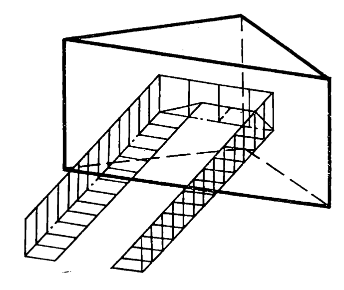


Abb. 5.109
Halbwürfel mit zwei Reflexionen

Halbwürfel mit zwei Reflexionen (Abb. 5.109), $\langle 2 \mid 1, -1, -\bar{1}\rangle$. Wenn wir die halbe Hypotenusenfläche des Halbwürfels als Lichteinfallsfläche benutzen, dann wird das Bündel durch zwei Reflexionen um 180° abgelenkt. Die Hypotenuse muß doppelt so lang sein wie der Durchmesser des Bündels. Der Glasweg beträgt $d = 2D$. Der Halbwürfel mit zwei Reflexionen entspricht einem 90°-Winkelspiegel.

Zwei Halbwürfel zur Seitenversetzung (Abb. 5.110), $\langle 2 \mid 1, 1, \bar{1}\rangle$. Mit zwei Halbwürfeln in der Anordnung nach Abb. 5.110 wird eine Spiegeltreppe realisiert. Die Achse des Bündels wird um den Betrag v versetzt. Es tritt keine Seitenvertauschung ein. Der Glasweg beträgt $d = 2D$.

Rhomboidprisma (Abb. 5.111), $\langle 2 \mid 1, 1, \bar{1} \rangle$. Für nicht zu große Versetzungen v ist es hinsichtlich der Justierung und der Reflexe günstiger, die zwei Halbwürfel mit einem Glasstück zu verbinden. Es entsteht ein Rhomboidprisma mit dem Glasweg $d = D + v$.

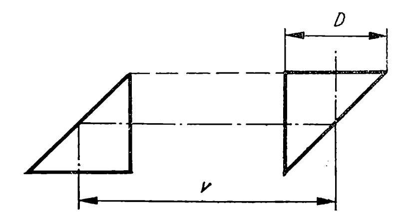


Abb. 5.110
Zwei Halbwürfel zur Versetzung der Achse

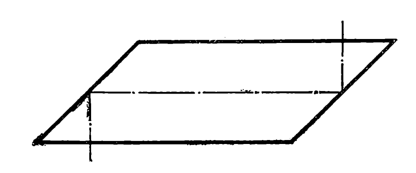


Abb. 5.111
Rhomboidprisma

Umkehrprisma (Abb. 5.112), $\langle 1 \mid 1, -\cos\delta, \cos\delta \rangle$. Der Halbwürfel kann so abgewandelt werden, daß ein Prisma entsteht, bei dem die Basis und eine Seitenfläche einen beliebigen Winkel miteinander bilden. Es gilt

$$d = D \cot\frac{\delta}{2}, \qquad L = \frac{D}{\sin\frac{\delta}{2}}, \qquad \delta = 180^\circ - 2\beta. \tag{5.203}$$

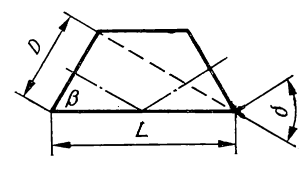


Abb. 5.112
Umkehrprisma

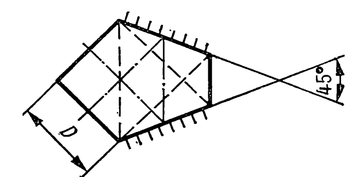


Abb. 5.113
Pentaprisma

Es muß aber $\delta \leqq 90^\circ$ sein. Die Seitenvertauschung des Halbwürfels bleibt erhalten, wir sprechen deshalb von einem Umkehrprisma. Der Halbwürfel ist der Sonderfall mit $\beta = 45^\circ$, $\delta = 90^\circ$.

Pentaprisma (Abb. 5.113), $\langle 2 \mid 1, 0, 0 \rangle$. Das Pentaprisma ersetzt einen 45°-Winkelspiegel, lenkt also um 90° ab. Es hat den Vorteil des Winkelspiegels, daß eine kleine Drehung um eine zum Hauptschnitt senkrechte Achse keine Änderung des Ablenkungswinkels bewirkt. Die gegenseitige Justierung der Spiegelflächen fällt jedoch weg. Der Glasweg beträgt

$$d = 2D + D\sqrt{2} = 3{,}41D.$$

Der Einfallswinkel eines Achsenstrahls an den reflektierenden Flächen von 22,5° erfordert eine Verspiegelung. Seitenvertauschung tritt nicht ein. Abb. 5.114 zeigt das Pentaprisma mit aufgespaltenen Spiegelflächen. Es ist die äquivalente planparallele Platte zu erkennen.

Bauernfeind-Prisma (Abb. 5.115), ⟨2 | 1, cos 45°, cos 45°⟩. Das Bauernfeind-Prisma dient z. B. dazu, die senkrechte Lichtrichtung im Mikroskop um 45° abzulenken, damit man im Sitzen bequemer beobachten kann. Der Glasweg beträgt $d = 1{,}71D$. Das Stück $0{,}71D$ der Austrittsfläche ist nicht genutzt und kann abgeschliffen werden. Der Einfallswinkel der optischen Achse an der zweiten reflektierenden Fläche beträgt 22,5°, Verspiegelung ist demnach notwendig. Die Abb. 5.116 enthält das Bauernfeind-Prisma mit aufgespalteten Spiegelflächen.

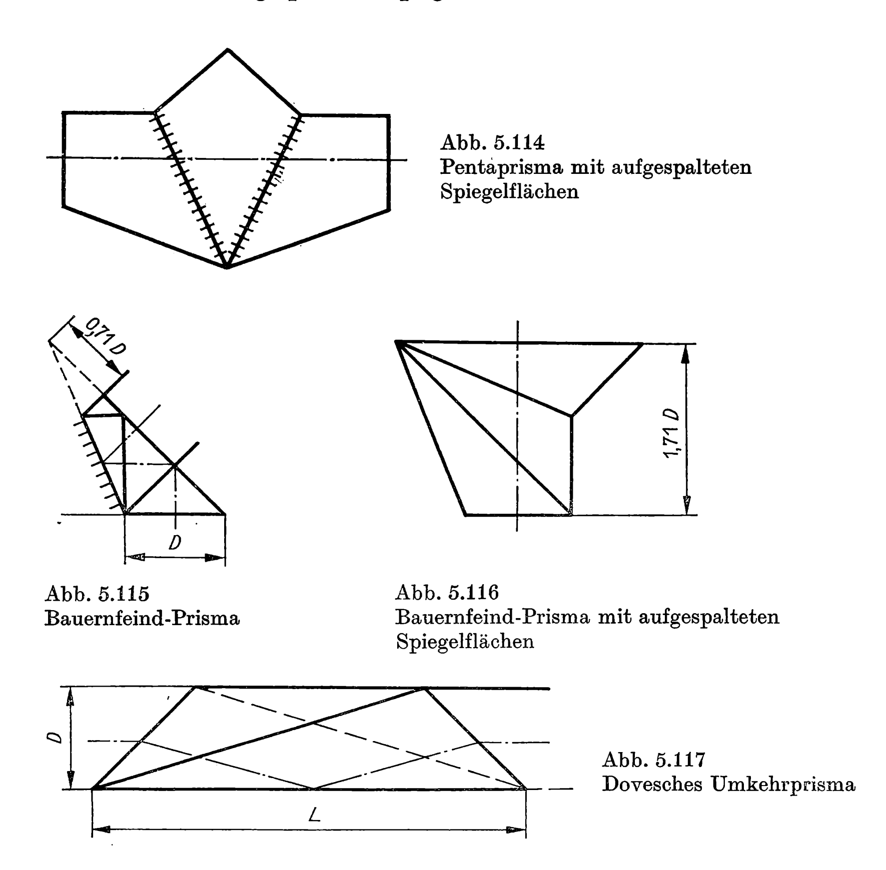


Abb. 5.114
Pentaprisma mit aufgespalteten Spiegelflächen

Abb. 5.115
Bauernfeind-Prisma

Abb. 5.116
Bauernfeind-Prisma mit aufgespalteten Spiegelflächen

Abb. 5.117
Dovesches Umkehrprisma

Dovesches Umkehrprisma (Abb. 5.117), ⟨1 | 1, −1, 1⟩. Beim Doveschen Umkehrprisma wird die optische Achse an der Eintritts- und an der Austrittsfläche so gebrochen, daß sie das Prisma fluchtend verläßt. Die Länge der Basisfläche L und der Glasweg l hängen von der Brechzahl ab:

$$L = 2D \frac{\cos \varepsilon'}{\sin \varepsilon' + \cos \varepsilon'}, \qquad l = \sqrt{2}\, D \frac{1}{\sin \varepsilon' + \cos \varepsilon'} \qquad (5.204\text{a, b})$$

Bei $n = 1{,}5$ ist $\varepsilon' = -28{,}1°$, $L = 4{,}29D$ und $l = 3{,}44D$; bei $n = 1{,}581$ ist $\varepsilon' = -26{,}6°$, $L = 4D$ und $l = 3{,}16D$. Die optische Achse steht nicht senkrecht auf der

Ein- und Austrittsfläche. Das Dovesche Umkehrprisma wirkt wie eine schräg im Strahlengang stehende planparallele Platte (Abb. 5.118). Darauf müssen wir besonders bei der Berechnung der Schnittweitenänderung und der reduzierten Dicke (Abb. 5.119) achten. Die äquivalente Plattendicke ist nicht mit dem Glasweg identisch. Sie folgt aus

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,L. \tag{5.205}$$

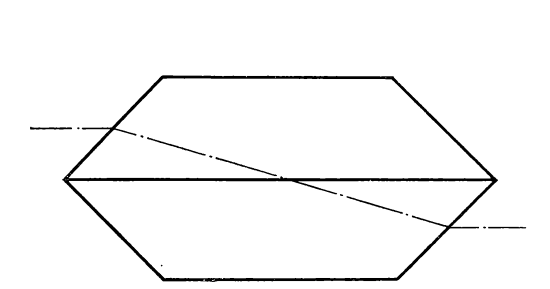


Abb. 5.118
Dovesches Umkehrprisma mit aufgespalteter Spiegelfläche

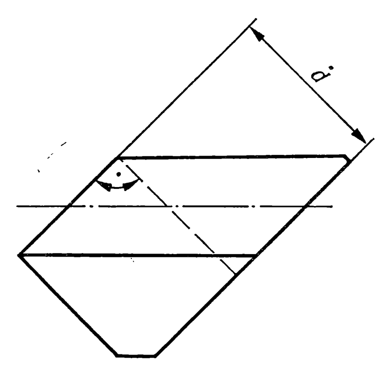


Abb. 5.119
Dovesches Umkehrprisma mit reduzierter Dicke

Weiter gilt nach Gl. (5.184) und Gl. (5.186)

$$\Delta s = d\left[1 - \frac{\cos 45°}{\sqrt{n^2 - \sin^2 45°}}\right], \qquad \dot{\boldsymbol{d}} = \frac{d\cos 45°}{\sqrt{n^2 - \sin^2 45°}}. \tag{5.206a, b}$$

Bei $n = 1{,}5$ erhalten wir $d = 3{,}05D$, $\Delta s \approx 0{,}46d$ und $\dot{\boldsymbol{d}} = 0{,}54d$ gegenüber $\Delta s = 0{,}33d$ und $\dot{\boldsymbol{d}} = 0{,}67d$ bei $\varepsilon_0 = 0°$. Bei $n = 1{,}581$ ist $d = 2{,}83D$, $\Delta s = 0{,}5d$ und $\dot{\boldsymbol{d}} = 0{,}5d$. Die schrägstehende Planparallelplatte verschlechtert die Bildschärfe (Astigmatismus), wenn sie im konvergenten oder divergenten Bündel steht. Das Dovesche Umkehrprisma muß möglichst bei parallelen Strahlenbündeln verwendet werden.

Tripelprisma (Abb. 5.120), $\langle 3 \mid -1, -1, -1\rangle$. Die drei Flächen des Tripelspiegels können an ein Prisma angeschliffen werden. Es entsteht ein Tripelprisma, das manchmal auch als Tripelstreifen ausgebildet wird.

Dachkante. Eine Dachkante entsteht durch Falten einer reflektierenden Prismenfläche, so daß daraus ein 90°-Winkelspiegel entsteht. Im allgemeinen wird aber der Winkelspiegel nicht im Hauptschnitt verwendet. Abb. 5.121 demonstriert den Übergang von der einfachen reflektierenden Prismenfläche zur Dachkante. Jede Hälfte der Dachkante wird doppelt genutzt; in jedem Punkt, außer der Kante selbst, werden aus jedem Bündel zwei Strahlen reflektiert. Ein Lichtbündel wird von der

Dachkante in zwei Hälften aufgeteilt, die sich in der Reihenfolge der Reflexionen an beiden Dachkantflächen unterscheiden. Durch die zweimalige Reflexion an senkrecht zueinander stehenden Flächen vertauscht die Dachkante zweiseitig. Wir erreichen also eine Höhen- und Seitenvertauschung mit einer Prismenfläche der Grundform (Abb. 5.122).

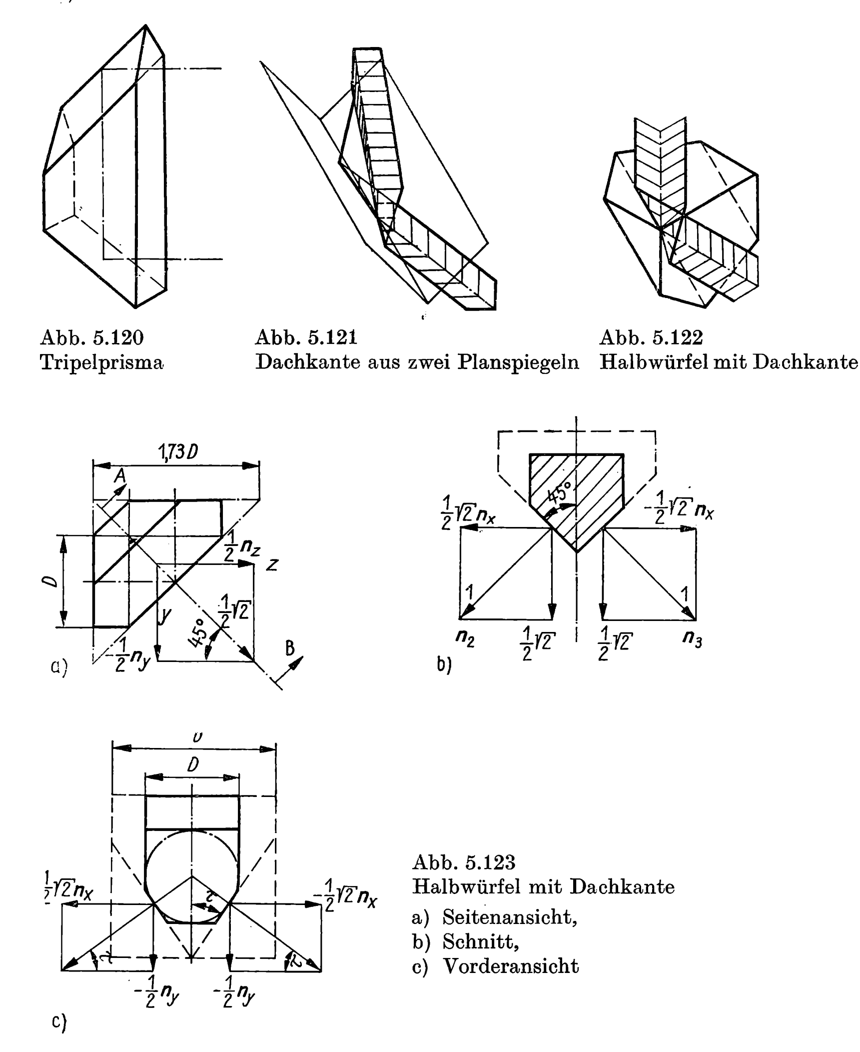


Abb. 5.120
Tripelprisma

Abb. 5.121
Dachkante aus zwei Planspiegeln

Abb. 5.122
Halbwürfel mit Dachkante

Abb. 5.123
Halbwürfel mit Dachkante
a) Seitenansicht,
b) Schnitt,
c) Vorderansicht

Durchrechnung eines Dreibeins. Wir legen einen Halbwürfel mit Dachkante zugrunde (Abb. 5.123). Zunächst sind die Komponenten der Normaleneinheitsvektoren der Dachkantflächen zu bestimmen. In der Abb. 5.123a weisen die Normaleneinheitsvektoren unter 45° zur Zeichenebene; der eine nach vorn, der andere nach hinten.

Im Schnittbild Abb. 5.123c ist zu erkennen, daß

$$n_{x1} = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad n_{x2} = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist. Die Projektion der Einheitsvektoren auf die y-z-Ebene hat die Länge $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Durch nochmalige Zerlegung dieser Projektion (Abb. 5.123a) ergeben sich die y-Komponenten

$$n_{y1} = n_{y2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}$$

und die z-Komponenten

$$n_{z1} = n_{z2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos 45^\circ = \frac{1}{2}.$$

Die Normaleneinheitsvektoren lauten also

$$\boldsymbol{n}_2 = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \qquad \boldsymbol{n}_3 = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}. \tag{5.207a, b}$$

Die bildseitigen Einheitsvektoren eines objektseitigen Dreibeins werden in der Tab. 5.19 berechnet. Wir erhalten

$$\boldsymbol{e}_x' = \{-1, 0, 0\}, \qquad \boldsymbol{e}_y' = \{0, 0, 1\}, \qquad \boldsymbol{e}_z' = \{0, 1, 0\} \tag{5.208}$$

und

$$\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x' = -1, \qquad \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y' = 0, \qquad \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z' = 0, \qquad \Delta = 1. \tag{5.209}$$

Da $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x' = -1$ ist und $\boldsymbol{e}_z'$ in Lichtrichtung bleibt, muß bei $\Delta = 1$ auch $\boldsymbol{e}_y'$ gegenüber $\boldsymbol{e}_y$ vertauscht sein. Wir erhalten also zweiseitige Vertauschung.

Bestimmung der Kantenlänge des Halbwürfels. Würden wir an einen vorgegebenen Halbwürfel die Dachkante anschleifen, dann könnte der ursprünglich mögliche Bündeldurchmesser nicht mehr realisiert werden. Es fiele ja ein Teil der Eintrittsfläche weg (Abb. 5.123b). Der Halbwürfel mit Dachkante muß also eine größere Eintrittsfläche haben als der einfache Halbwürfel, für den $d = D$ gilt. Wir berechnen die Kantenlänge b an Hand der Abb. 5.123b. Es ist

$$\cot\tau = \sqrt{2}, \qquad \tau = 35^\circ\,16'. \tag{5.210}$$

Weiter gilt

$$\sin\tau = \frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{2}b},$$

also

$$b = \frac{D}{\sin\tau}. \tag{5.211}$$

Tabele 5.19
Durchrechnung eines Dreibeins an der Dachkante

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
0	-1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	
0	1	0	0	$-\frac{1}{4}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	
$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0	0	e'_x
0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
0	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	e'_y
0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	e'_z

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{\sin \tau} = \sqrt{1 + \cot^2 \tau}$$

und Gl. (5.210) erhalten wir

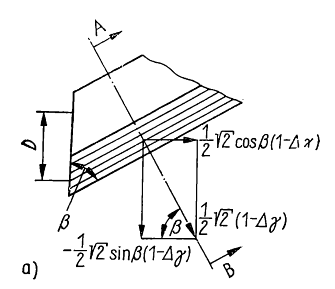
$$b = \sqrt{3}\, D = 1{,}73 D. \qquad (5.212)$$

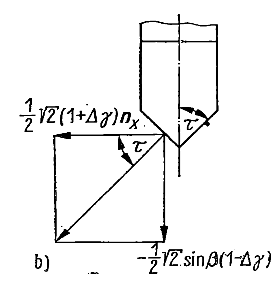
Der Abb. 5.123b entnehmen wir außerdem, welche unbenutzten Teile des Halbwürfels zur Gewichtsverringerung weggelassen werden können.

Dachkante mit Winkelfehler. Der rechte Winkel zwischen den beiden Teilflächen der Dachkante muß sehr genau eingehalten werden, sonst ergeben die Prismen Doppelbilder.

Wir rechnen zunächst einen Strahleinheitsvektor durch ein Umkehrprisma mit Dachkante durch (Abb. 5.124). Die Dachkante habe den Winkelfehler $2\Delta\gamma$, der so klein sein soll, daß $\sin\Delta\gamma \approx \Delta\gamma$ und $\cos\Delta\gamma = 1$ gesetzt werden kann. Im Schnittbild Abb. 5.124c lesen wir die x-Komponenten der Normaleneinheitsvektoren ab:

$$n_{x2} = \cos(45° - \Delta\gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \Delta\gamma), \qquad n_{x3} = -\cos(45° - \Delta\gamma)$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \Delta\gamma).$$





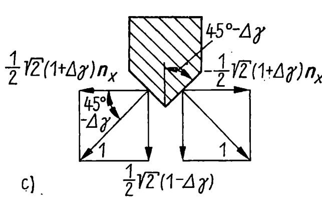


Abb. 5.124
Umkehrprisma mit Dachkante
a) Seitenansicht,
b) Vorderansicht,
c) Schnitt

Die zweite Komponente der Normaleneinheitsvektoren im Schnittbild Abb. 5.124c, die die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 - \Delta\gamma)$ hat, stellt die Projektion in die y-z-Ebene dar. Ihre weitere Zerlegung ergibt die y- und die z-Komponenten (Abb. 5.124a). Die Komponentendarstellung der Normaleneinheitsvektoren lautet ($\boldsymbol{n}_1$ und $\boldsymbol{n}_4$ sind der Abb. 5.124a unmittelbar zu entnehmen):

$$\boldsymbol{n}_1 = \{0, 0, 1\}, \tag{5.213}$$

$$\boldsymbol{n}_2 = \left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \Delta\gamma),\quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta\,(1 - \Delta\gamma),\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos\beta(1 - \Delta\gamma)\right\}, \tag{5.214}$$

$$\boldsymbol{n}_3 = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + \Delta\gamma),\quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta(1 - \Delta\gamma),\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos\beta(1 - \Delta\gamma)\right\}. \tag{5.215}$$

$$\boldsymbol{n}_4 = \{0, \sin 2\beta, \cos 2\beta\}. \tag{5.216}$$

An der ersten Fläche ist

$$\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}_1' = \{0, 0, 1\}. \tag{5.217}$$

Das Rechenschema für s_2' und s_3' enthält die Tab. 5.20 (Quadratische Glieder in $\Delta\gamma$ sind bereits vernachlässigt worden. Das obere Vorzeichen gilt für einen Lichtstrahl, der erst auf die Fläche 2, dann auf die Fläche 3 trifft; das untere Vorzeichen gilt für den umgekehrten Verlauf.)

Die Brechung an der vierten Fläche kann ohne vektorielle Schreibweise direkt mit dem Brechungsgesetz behandelt werden. Beide Strahlen, die durch die Aufspaltung an der fehlerbehafteten Dachkante entstehen, bleiben in einer Ebene (Abb. 5.125). Mit dem Brechungsgesetz für kleine Winkel $n\varepsilon = \varepsilon'$ ergibt sich mit s_{x4} nach Tab. 5.20:

$$2\varepsilon' = 8n \cos\beta \cdot \Delta\gamma. \tag{5.218}$$

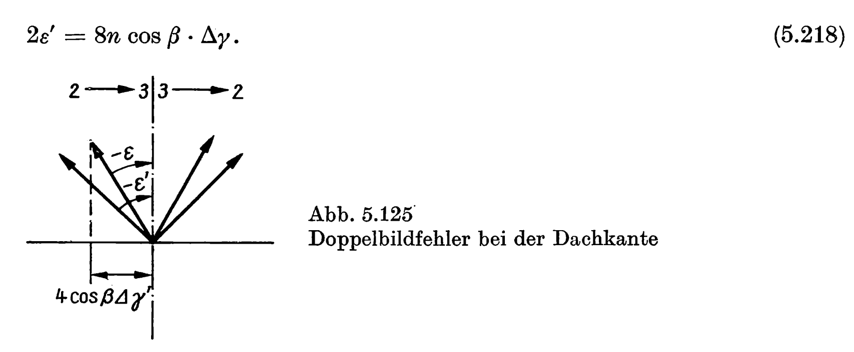


Abb. 5.125
Doppelbildfehler bei der Dachkante

Tabelle 5.20
Durchrechnung eines Dreibeins an der Dachkante mit Winkelfehler

0	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\Delta\gamma)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta(1-\Delta\gamma)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta(1-\Delta\gamma)$
0 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta(1-\Delta\gamma)$	$\mp\cos\beta$ 0	$\sin\beta\cos\beta(1-2\Delta\gamma)$ 0	$-\cos^2\beta(1-2\Delta\gamma)$ 1
$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta(1-\Delta\gamma)$	$\mp\cos\beta$	$\sin\beta\cos\beta(1-2\Delta\gamma)$	$1-\cos^2\beta(1-2\Delta\gamma)$
$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta(1-\Delta\gamma)$	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\Delta\gamma)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta(1-\Delta\gamma)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta(1-\Delta\gamma)$
$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin^2\beta\cos\beta$ $\times(1-3\Delta\gamma)$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta[\sin^2\beta$ $-\Delta\gamma(1-3\cos^2\beta)]$	$\pm\cos\beta(1+4\Delta\gamma)$ $\mp\cos\beta$	$\sin\beta\cos\beta(1+2\Delta\gamma)$ $\sin\beta\cos\beta(1-2\Delta\gamma)$	$-\cos^2\beta(1+2\Delta\gamma)$ $1-\cos^2\beta(1-2\Delta\gamma)$
$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta(1+3\Delta\gamma)$	$\pm 4\cos\beta\cdot\Delta\gamma$	$2\sin\beta\cos\beta$	$1-2\cos^2\beta$
	$\pm 4\cos\beta\cdot\Delta\gamma$	$\sin 2\beta$	$\cos 2\beta$

Für die fehlerfreie Dachkante ist $\Delta\gamma = 0$ zu setzen, so daß sich nach Gl. (5.214) und Gl. (5.215)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_2 &= \left\{\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta\right\}, \\ \boldsymbol{n}_3 &= \left\{-\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\beta\right\} \end{aligned} \qquad (5.219\,\mathrm{a,\,b})$$

ergibt. Aus Abb. 5.124b ist

$$\cot\tau = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta} \qquad (5.220)$$

zu entnehmen. Nach Gl. (5.211) beträgt also die Kantenlänge des Umkehrprismas

$$b = D\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2\beta}} \qquad (5.221)$$

Die Forderung nach Einhaltung des rechten Winkels zwischen den Dachkantflächen ist sehr streng einzuhalten. Soll z. B. bei einem Halbwürfel $2\varepsilon'$ unterhalb des physiologischen Grenzwinkels bleiben, dann ergibt sich nach Gl. (5.218) für $n = 1{,}5$ die Aussage $\Delta\gamma < 6{,}8''$. Der Winkel der Dachkante darf höchstens um $\pm 2\Delta\gamma = \pm 13{,}6''$ von 90° abweichen.

Eine nachfolgende winkelmäßige Vergrößerung, z. B. durch ein Okular, verringert die Toleranz noch um den Faktor $1/\Gamma'$ (Γ' = Vergrößerung). Bei totalreflektierenden Dachkantflächen tritt als Folge der in beiden Teilbündeln unterschiedlichen elliptischen Polarisation eine verminderte Bildqualität auf. Dieser Effekt wurde 1943 von Joos beschrieben. Die Dachkante teilt das Bündel in zwei Teile, in denen das Licht wegen der entgegengesetzten Reihenfolge der Reflexionen an den Dachkantflächen verschieden polarisiert ist. Die Überlagerung beider Teilbündel führt zu Interferenzerscheinungen, durch die die Bildschärfe leidet. Diese Erscheinung wird in der Praxis dadurch vermindert, daß die Dachkante auch verspiegelt wird, wenn die Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion sind.

Einfache Prismen mit Dachkante. Grundsätzlich könnte jede reflektierende Fläche eines Prismas als Dachkante ausgebildet werden. Für einige Prismen, bei denen Dachkanten besonders häufig vorkommen, stellen wir hier die Daten zusammen. Im Prismensymbol kennzeichnen wir die Dachkante durch ein Häkchen über der Anzahl der Reflexionen. Bei dem Prisma mit dem Symbol $\langle \hat{6} \mid -1, -1, 1\rangle$ erfolgen also von den sechs Reflexionen zwei an einer Dachkante.

Halbwürfel mit einer Reflexion (Abb. 5.122, Abb. 5.123), $\langle \hat{2} \mid -1, 0, 0\rangle$. Dieses Prisma wurde bereits ausführlich behandelt.

Amici-Prisma (Abb. 5.124, Abb. 5.126, Abb. 5.127), $\langle \hat{2} \mid -1, \; -\cos\delta, \; \cos\delta \rangle$. Das Amici-Prisma ist ein Umkehrprisma mit Dachkante. Hinsichtlich der Abmessungen müssen wir die Fälle

$$\sin\beta \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \sin\beta \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

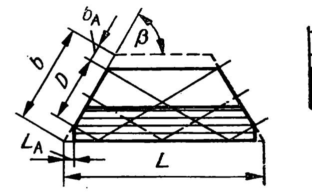
unterscheiden.

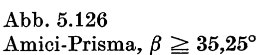
$\beta \geqq 35{,}25°$. Abb. 5.126 zeigt ein Amici-Prisma, bei dem die Forderung $\beta = 35{,}25°$ erfüllt ist. Die Kantenlänge b der Eintrittsfläche des Prismas richtet sich nur danach, daß die Dachkante das Bündel nicht beschneidet. Wir erhalten nach Gl. (5.221)

$$b = D\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2\beta}}$$

und nach Abb. 5.126

$$L = \frac{b}{\cos\beta}. \qquad (5.222)$$




Abb. 5.126
Amici-Prisma, $\beta \geqq 35{,}25°$

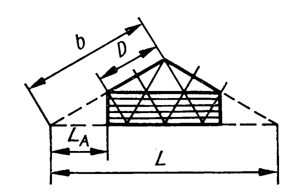


Abb. 5.127
Amici-Prisma, $\beta \leqq 35{,}25°$

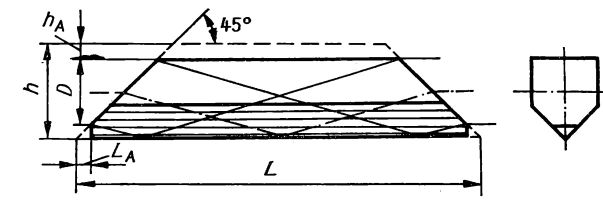


Abb. 5.128
Dove-Prisma mit Dachkante

Die Teile

$$b_A = \frac{1}{2}(b - D) \quad \text{und} \quad L_A = \frac{1}{2}(b - D)\cos\beta \qquad (5.223\text{a, b})$$

sind ungenutzt. Der Glasweg beträgt

$$d = b\tan\beta. \qquad (5.224)$$

Die Ablenkung ergibt sich nach Gl. (5.203) aus

$$\delta = 180° - 2\beta.$$

$\beta \leqq 35{,}25°$. Bei $\beta = 35{,}25°$ wird das Licht gerade so abgelenkt, daß sich ein- und austretendes Bündel am oberen Rand des Prismas berühren. Bei Winkeln $\beta < 35{,}25°$ sind die Mindestabmessungen ausschließlich durch die Forderung festgelegt, daß sich ein- und austretendes Bündel nicht überschneiden. An Hand der Abb. 5.127 leiten wir

$$b = \frac{D}{2\sin^2\beta}, \qquad L = 2b\cos\beta, \qquad L_A = (b - D)\cos\beta,$$

$$d = b\sin 2\beta \qquad (5.225\,\text{a}\cdots\text{d})$$

ab. Durch die Dachkante vertauscht das Amici-Prisma zweiseitig.

Dovesches Prisma mit Dachkante (Abb. 5.128), $\langle\hat{2} \mid -1, -1, 1\rangle$. Mit dem Doveschen Umkehrprisma erhalten wir durch eine Dachkante zweiseitige Vertauschung bei fluchtender optischer Achse. Wegen der zur Dachkante parallelen optischen Achse des einfallenden Bündels erhalten wir die Höhe des Prismas aus Gl. (5.221) mit $\beta = 90°$.

$$h = \sqrt{2}\,D. \qquad (5.226)$$

Die übrigen Größen leiten sich daraus ab.

$$L = 2\sqrt{2}\,D\,\frac{\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon' + \cos\varepsilon'}, \qquad l = \sqrt{2}\,D\,\frac{1}{\sin\varepsilon' + \cos\varepsilon'}, \qquad (5.227\,\text{a, b})$$

$$b = 2D, \qquad d = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,L, \qquad (5.228\,\text{a, b})$$

$$b_A = L_A = 0{,}21D. \qquad (5.229)$$

Pentaprisma mit Dachkante (Abb. 5.129) $\langle\hat{3} \mid -1, 0, 0\rangle$. Eine der beiden reflektierenden Flächen des Pentaprismas soll als Dachkante ausgebildet werden. Der Winkel zwischen der Dachkante und der Eintrittsfläche beträgt $\beta = 112{,}5°$, so daß aus (Gl. 5.221)

$$b = 1{,}47D \qquad (5.230\,\text{a})$$

folgt. Davon kann das Stück $b_A = 0{,}24D$ abgeschnitten werden. Der Glasweg beträgt dann

$$d = 4{,}22D. \qquad (5.230\,\text{b})$$

Es liegen drei Reflexionen vor, es ist $\Delta = -1$, die Abbildung wird linkswendig.

Einfaches Schmidt-Prisma (Abb. 5.130), $\langle\hat{4} \mid -1, -\cos 45° \cos 45°\rangle$. Die Abmessungen des Schmidt-Prismas sind der Abb. 5.130 zu entnehmen. Der Glasweg beträgt $d = 3{,}66D$.

Leman-Prisma (Abb. 5.131), $\langle\hat{4} \mid -1, -1, \bar{1}\rangle$. Mit dem Leman-Prisma wird die optische Achse um $v = 2{,}62D$ parallel versetzt. Die Abmessungen sind in die Abb. 5.131 eingetragen.

Huet-Prisma (Abb. 5.132), $\langle \hat{6} \mid -1, -1, \bar{1} \rangle$. Das Huet-Prisma hat denselben Aufbau wie das Leman-Prisma. Die Parallelversetzung der optischen Achse wird jedoch durch das Zwischenschalten von zwei Reflexionen auf $v = 5{,}86D$ erhöht. Der Glasweg vergrößert sich auf $d = 8{,}29D$.

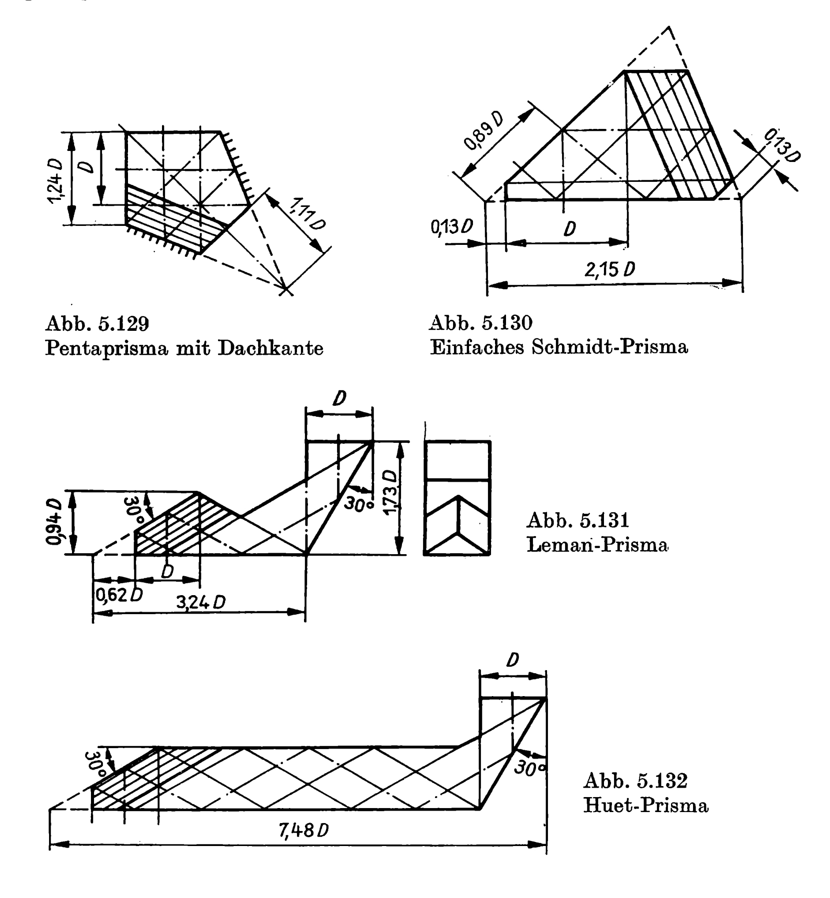


Abb. 5.129
Pentaprisma mit Dachkante

Abb. 5.130
Einfaches Schmidt-Prisma

Abb. 5.131
Leman-Prisma

Abb. 5.132
Huet-Prisma

Beispiele zusammengesetzter Prismen

Zusammengesetzte Prismen gibt es mit und ohne Dachkante. Wir greifen aus der Fülle der möglichen Kombinationen einige heraus.

Porro-Prismen 1. Art (Abb. 5.133), $\langle 4 \mid -1, -1, \bar{1} \rangle$. Beim Porroschen Prismensatz handelt es sich um zwei Halbwürfel mit je zwei Reflexionen, die um 90° verdreht zueinander angeordnet sind. Beide Prismen können miteinander verkittet sein. Die Porro-Prismen dienen bevorzugt in Feldstechern der Höhen- und Seitenvertauschung des vom Keplerschen Fernrohr erzeugten Bildes. Dies wird ohne Dachkante erreicht, so daß die Gefahr der Doppelbilder nicht besteht. Die Lichtstrahlen sind auf einem Teilstück des Weges rückläufig, die Baulänge wird dadurch herab-

gesetzt. Die Schnittweitenänderung, wegen des Glasweges $d = 4D$ vom Betrage

$$\Delta s = 4D \frac{n-1}{n},$$

vergrößert allerdings den Abstand Objektiv—Okular wieder. Die optische Achse wird um $v = 2D$ parallel versetzt.

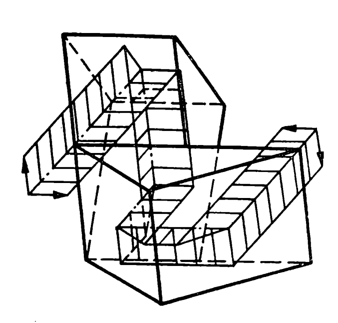


Abb. 5.133
Porro-Prismen 1. Art

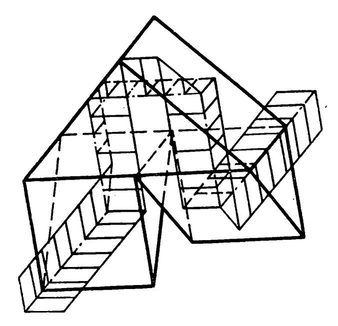


Abb. 5.134
Porro-Prismen 2. Art

Porro-Prismen 2. Art (Abb. 5.134), $\langle 4 \mid -1, -1, \bar{1} \rangle$. Die gleiche Wirkung wie bei den Porro-Prismen 1. Art erhalten wir, wenn wir zwei Halbwürfel auf die Hypotenusenfläche eines dritten Halbwürfels aufkitten. Mit dem Porro-Prismensatz 2. Art wird die optische Achse um $v = D$ versetzt.

Daubresse-Prisma 1. Art (Abb. 5.135), $\langle \hat{4} \mid -1, -1, \bar{1} \rangle$. Das Daubresse-Prisma 1. Art ist aus einem Pentaprisma mit Dachkante und einem Halbwürfel zusammengesetzt. Nachdem unbenutzte Teile weggelassen sind, beträgt der Glasweg $d = 5{,}22D$. Die optische Achse wird um $v = D$ parallel versetzt.

Daubresse-Prisma 2. Art (Abb. 5.136), $\langle \hat{4} \mid -1, -1, \bar{1} \rangle$. Beim Daubresse-Prisma 2. Art ist die Dachkante an den Halbwürfel angeschliffen. Der Glasweg beträgt $d = 5{,}14D$, die Achsenversetzung $v = 1{,}37D$.

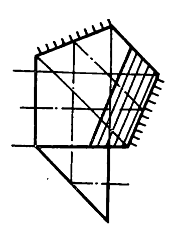


Abb. 5.135
Daubresse-Prisma 1. Art

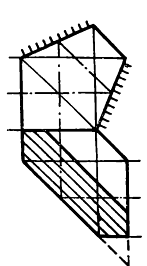


Abb. 5.136
Daubresse-Prisma 2. Art

König-, Abbe- und Dialytprisma (Abb. 5.137 bis Abb. 5.139), $\langle \hat{4} \mid -1, -1, 1 \rangle$. König-, Abbe- und Dialytprisma haben gleiche Wirkung. Sie unterscheiden sich

nur in der Art der Zusammensetzung. Die Prismen werden in Feldstechern zur Höhen- und Seitenvertauschung eingesetzt. Ihr Vorteil ist die fluchtende optische Achse. Der Glasweg beträgt $d = 5{,}2D$.

Schmidt-Prisma (Abb. 5.140), $\langle\hat{6} \mid -1, -1, 1\rangle$. Das zusammengesetzte Schmidt-Prisma besteht aus einem einfachen Schmidt-Prisma und einem Bauernfeind-Prisma.

Tabelle 5.21
Übersicht über die behandelten Reflexionsprismen

Prisma	Symbol	Glasweg	Abbildung
einfache Reflexionsprismen			
Halbwürfel	$\langle 1 \mid 1, 0, 0\rangle$	D	(5.108)
Halbwürfel, zwei Reflexionen	$\langle 2 \mid 1, -1, -\bar{1}\rangle$	$2D$	(5.109)
Rhomboidprisma	$\langle 2 \mid 1, 1, \bar{1}\rangle$	$D + v$	(5.111)
Pentaprisma	$\langle 2 \mid 1, 0, 0\rangle$	$3{,}41D$	(5.113)
Bauernfeind-Prisma	$\langle 2 \mid 1, \cos 45°, \cos 45°\rangle$	$1{,}71D$	(5.115)
Umkehrprisma	$\langle 1 \mid 1, -\cos\delta, \cos\delta\rangle$	$D \cot \delta/2$	(5.112)
Dovesches Prisma	$\langle 1 \mid 1, -1, 1\rangle$	$\dfrac{2D}{\cos\varepsilon' + \sin\varepsilon'}$	(5.117)
Tripelprisma	$\langle 3 \mid -1, -1, -\bar{1}\rangle$	je nach Länge	(5.120)
Prismen mit Dachkante			
Halbwürfel	$\langle\hat{2} \mid -1, 0, 0\rangle$	$1{,}73D$	(5.122)
Pentaprisma	$\langle\hat{3} \mid -1, 0, 0\rangle$	$4{,}22D$	(5.129)
Amici-Prisma $\beta \geqq 35{,}25°$	$\langle\hat{2} \mid -1, -\cos\delta, \cos\delta\rangle$	$b \tan\beta$	(5.126)
Amici-Prisma $\beta \leqq 35{,}25°$	$\langle\hat{2} \mid -1, -\cos\delta, \cos\delta\rangle$	$b \sin 2\beta$	(5.127)
Dove-Prisma	$\langle\hat{2} \mid -1, -1, 1\rangle$	$\dfrac{2D}{\cos\varepsilon' + \sin\varepsilon'}$	(5.128)
Schmidt-Prisma	$\langle\hat{4} \mid -1, -\cos 45°, \cos 45°\rangle$	$3{,}66D$	(5.130)
Leman-Prisma	$\langle\hat{4} \mid -1, 1, \bar{1}\rangle$	$4{,}53D$	(5.131)
Huet-Prisma	$\langle\hat{6} \mid -1, -1, \bar{1}\rangle$	$8{,}29D$	(5.132)
Zusammengesetzte Prismen			
Porro-Prisma	$\langle 4 \mid -1, -1, \bar{1}\rangle$	$4D$	(5.133, 5.134)
Daubresse-Prisma 1. Art	$\langle\hat{4} \mid -1, -1, \bar{1}\rangle$	$5{,}22D$	(5.135)
Daubresse-Prisma 2. Art	$\langle\hat{4} \mid -1, -1, \bar{1}\rangle$	$5{,}14D$	(5.136)
Schmidt-Prisma	$\langle\hat{6} \mid -1, -1, 1\rangle$	$5{,}27D$	(5.140)
König-, Abbe- und Dialytprisma	$\langle\hat{4} \mid -1, -1, 1\rangle$	$5{,}2D$	(5.137) bis (5.139)

Zwischen beiden Prismen befindet sich ein feiner Luftspalt, durch den die Totalreflexion gesichert ist. Es wird eine fluchtende optische Achse bei kurzer Baulänge erreicht. Der Glasweg beträgt $d = 5{,}27D$.

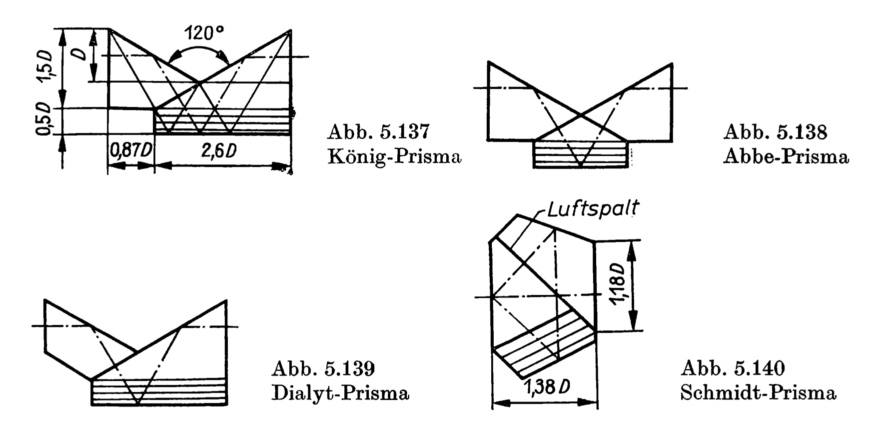


Abb. 5.137
König-Prisma

Abb. 5.138
Abbe-Prisma

Abb. 5.139
Dialyt-Prisma

Abb. 5.140
Schmidt-Prisma

In der Tab. 5.21 sind die behandelten Reflexionsprismen mit ihren wesentlichen Merkmalen enthalten.

5.5.5. Keile, Kristallplatten und -prismen

Keile. Ein Prisma mit zwei brechenden Flächen und kleinem brechenden Winkel γ wird als Keil bezeichnet (Abb. 5.141). Mit einem Keil läßt sich eine kleine Ablenkung δ realisieren. Nach Gl. (5.56) gilt für die Ablenkung durch ein Dispersionsprisma

$$\delta = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2' + \gamma. \qquad (5.231)$$

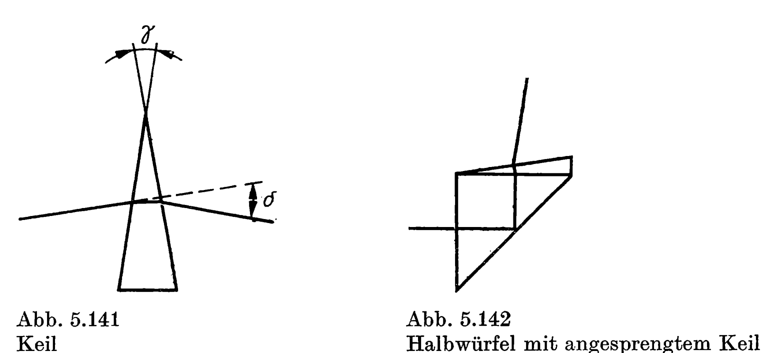


Abb. 5.141
Keil

Abb. 5.142
Halbwürfel mit angesprengtem Keil

Das Brechungsgesetz für die zweite Fläche lautet bei kleinen Winkeln $\varepsilon_2' = n\varepsilon_2$. Daraus folgt mit Gl. (5.54) und $\varepsilon_1 = n\varepsilon_1'$

$$\varepsilon_2' = n\gamma + \varepsilon_1. \qquad (5.232)$$

Einsetzen von Gl. (5.232) in Gl. (5.231) ergibt

$$\delta = (n - 1)\,\gamma. \tag{5.233}$$

Ein Anwendungsbeispiel zeigt die Abb. 5.142. Durch das Ansprengen eines Keils wird die Ablenkung des Halbwürfels von 90° um einen kleinen Winkel δ geändert. Es ist also nicht notwendig, ein nicht standardisiertes Prisma einzusetzen.

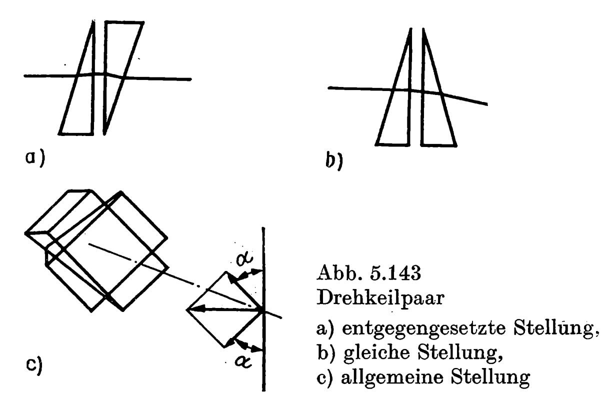


Abb. 5.143
Drehkeilpaar
a) entgegengesetzte Stellung,
b) gleiche Stellung,
c) allgemeine Stellung

Drehkeilpaar. Bei zwei gleichen Keilen hebt sich die Ablenkung in entgegengesetzter Stellung auf (Abb. 5.143a), in gleicher Stellung wird die Ablenkung verdoppelt (Abb. 5.143b). Mit zwei Keilen, die kontinuierlich zueinander verdreht werden können, ist damit die Ablenkung zwischen $\delta = 0°$ und $\delta = 2(n - 1)\,\gamma$ stufenlos einstellbar (Abb. 5.143c). Bei der Verdrehung jedes Keils um den Winkel α aus der Stellung mit $\delta = 0$ heraus beträgt die Ablenkung

$$\delta = 2(n - 1)\,\gamma \cdot \sin\alpha. \tag{5.234}$$

Dichromatischer Keil. Wegen der Brechung des Lichtes ist die Ablenkung des Keils wellenlängenabhängig. Ein dichromatischer Keil läßt sich herstellen, wenn dieser aus zwei Keilen unterschiedlichen Dispersionsverhaltens zusammengesetzt wird (Abb. 5.144). Für die Ablenkung gilt

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (n_1 - 1)\,\gamma_1 + (n_2 - 1)\,\gamma_2. \tag{5.235}$$

Sie ist für die Spektrallinien F′ und C′ gleich, wenn

$$\delta_{F'} = \delta_{C'},$$

also

$$(n_{F'_1} - 1)\,\gamma_1 + (n_{F'_2} - 1)\,\gamma_2 = (n_{C'_1} - 1)\,\gamma_1 + (n_{C'_2} - 1)\,\gamma_2 \tag{5.236}$$

ist. Aus Gl. (5.236) folgt mit der Abbeschen Zahl

$$\nu = \frac{n - 1}{n_{F'} - n_{C'}}$$

$$\frac{n_1 - 1}{\nu_1}\,\gamma_1 = -\frac{n_2 - 1}{\nu_2}\,\gamma_2. \tag{5.237}$$

Einsetzen von γ_2 aus Gl. (5.237) in die Gl. (5.235) und Auflösen nach γ_1 ergibt

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{(n_1 - 1)\left(1 - \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)}. \tag{5.238a}$$

Analog erhält man

$$\gamma_2 = -\frac{\delta}{(n_2 - 1)\left(1 - \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1}. \tag{5.238b}$$

Die beiden Keile müssen aus Gläsern hergestellt werden, die möglichst stark unterschiedliche Abbesche Zahlen haben. Es ist also ein Keil aus Flintglas mit einem Keil aus Kronglas zu paaren.

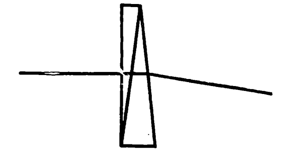


Abb. 5.144
Dichromatischer Keil

Kristallplatten. Wir beschränken unsere Beispiele auf optisch einachsige Kristalle. Deren Eigenschaften wurden im Abschnitt 2.2.5. behandelt.

Eine planparallele Kristallplatte, bei der die optische Achse schräg zu den Endflächen steht, versetzt das außerordentliche Bündel parallel zu sich selbst. Das ordentliche Bündel geht unabgelenkt durch die Platte hindurch (Abb. 5.145). Läßt man linear polarisiertes Licht auftreffen, dann hängen die Amplituden in beiden Teil-

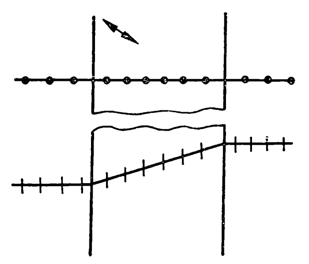


Abb. 5.145
Parallelversetzende Planplatte

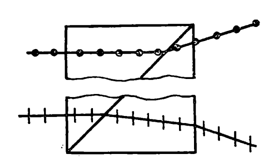


Abb. 5.146
Ablenkendes Prisma (Wollaston-Prisma)

bündeln von der Lage der Schwingungsebene gegenüber dem Hauptschnitt des Kristalls ab. Daraus ergeben sich zwei Anwendungsfälle.

— Die Drehung der Kristallplatte um das einfallende Strahlenbündel ermöglicht die Erzeugung zweier parallel versetzter Bündel mit variablen Amplitudenverhältnissen.

— Senkrecht und parallel zum Hauptschnitt schwingende Wellen lassen sich trennen und zu unterschiedlichen Positionen führen.

Wollaston-Prismen haben wir als polarisierende Funktionselemente kennengelernt. Sie sind aber auch ähnlich wie die planparallele Platte zur Ablenkung des Lichtes geeignet. Der Unterschied zur planparallelen Kristallplatte besteht lediglich in der winkelmäßigen Aufspaltung (Abb. 5.146).

Elektrooptische Schalter können auf der Basis des Pockels-Effektes aufgebaut werden. Dieser longitudinale elektrooptische Effekt bewirkt in einem Kristall das Auseinanderrücken der Strahlenflächen. Damit tritt für die ursprünglich längs der optischen Achse verlaufende Welle, die sich wie im isotropen Stoff verhält, die Aufspaltung in zwei Wellen unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit und senkrecht stehender Polarisation ein. Der Effekt ist linear von der an die Endflächen angelegten Spannung abhängig. Abb. 5.147a zeigt den Kristall ohne, Abb. 5.147b mit angelegter Spannung, wobei die Dicke so gewählt ist, daß die Phasendifferenz zwischen den Teilwellen π ist. Beim Anlegen der Spannung „schaltet" der Kristall die Schwingungsebene um 90°.

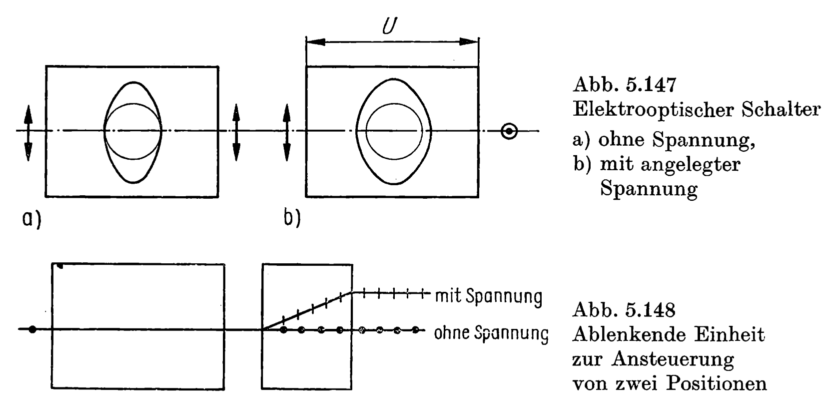


Abb. 5.147
Elektrooptischer Schalter
a) ohne Spannung,
b) mit angelegter Spannung

Abb. 5.148
Ablenkende Einheit zur Ansteuerung von zwei Positionen

Die Kombination von elektrooptischen Schaltern mit planparallelen Kristallplatten oder Wollaston-Prismen ermöglicht Ansteuern unterschiedlicher Positionen. Abb. 5.148 zeigt das für eine Einheit eines Ablenkelements. Anordnungen aus optischen Ablenkeinheiten sind von Bedeutung für die Entwicklung von digitalen optischen Speichern.

5.6. Apertur- und lichtstromändernde Funktionselemente

5.6.1. Neutralfilter

Gelegentlich besteht die Aufgabe, den Lichtstrom für alle interessierenden Wellenlängen gleich stark zu schwächen. Dazu dienen die Neutralfilter.

Neutralfilter verringern den Lichtstrom in einem breiten Wellenlängenintervall unabhängig von der Wellenlänge.

Im weiteren Sinne könnten zu den Neutralfiltern auch Einrichtungen gezählt werden, die den Lichtstrom nicht durch Absorption schwächen. Dazu gehören rotierende Sektorenscheiben und einstellbare Blenden. Sie wirken sich allerdings auch auf die geometrischen Verhältnisse im Strahlengang aus.

Neutralfilter bestehen entweder aus gleichmäßig absorbierenden Gläsern (Rauchgläser) oder aus Glas- bzw. Quarzplatten, auf die dünne Metallschichten aufgedampft sind. Als Metall kommt z. B. bei hochwertigen Filtern Platin in Frage. Für bestimmte Fälle sind auch Interferenzfilter entwickelt worden. Wir unterscheiden:

— Graufilter mit konstanter Durchlässigkeit über die gesamte Filterfläche hinweg und
— Graukeile mit linearer, logarithmischer oder stufenförmiger Änderung der Durchlässigkeit entweder in einer Richtung (gerader Keil) oder radial (Kreiskeil).

Als Keilkonstante wird die Änderung der Intensität pro Querkoordinatenänderung bezeichnet.

Eine spezielle Ausführungsform ist der Goldberg-Keil, bei dem sich ein homogener grauer Stoff zwischen zwei Platten befindet, deren Keilwinkel einstellbar ist.

Von sämtlichen Graukeilen lassen sich für geringere Ansprüche fotografische Kopien herstellen.

Neutralfilter mit konstanter Durchlässigkeit für alle vorkommenden Wellenlängen sind nicht immer geeignet, bei visuellen Untersuchungen den neutral grauen Eindruck zu vermitteln. Bei Sonnenschutzgläsern wirken z. B. Neutralfilter blaustichig und kontrastmindernd. Bei ihnen ist ein Anstieg der Durchlässigkeit nach dem langwelligen Gebiet hin vorteilhaft.

Neutralfilter werden z. B. angewendet
— in der Spektralanalyse mittels fotografischer Registrierung der Spektren zur Schwächung sehr heller Linien neben schwachen Linien,
— zur Lichtschwächung in der Mikroskopie ohne Änderung des Farborts und der numerischen Apertur der Beleuchtung,
— zur Bestimmung der Empfindlichkeitskurve von fotografischen Schichten durch Aufbelichten von Graukeilen und bei der objektiven Fotometrie.

5.6.2. Bündelteilung

Bei den Funktionselementen zur Bündelteilung tritt die Apertur- oder Lichtstromänderung als Nebenfunktion auf. Wir geben zunächst zwei Beispiele an.

— Im Mikroskop mit binokularem Tubus soll das Bild beiden Augen dargeboten werden, obwohl nur ein Objektiv benutzt wird. Das Bündel ist in zwei Teilbündel aufzuspalten, so daß durch zwei Okulare beobachtet werden kann (Abb. 5.149).
— In Mikroskopen für Auflichtbeobachtung wird das Objekt durch das Objektiv hindurch beleuchtet. Eine Teilerplatte vereinigt den Beleuchtungs- und den Abbildungsstrahlengang. Hierbei wird jeweils nur ein Teilbündel genutzt (Abb. 5.150).

Damit ist für die beiden Grundaufgaben der Bündelteilung je ein Beispiel gegeben. Es gilt:

> Bündelteilung wird zur Aufteilung von Strahlenbündeln oder zum Überlagern von Strahlengängen angewendet.

Wir unterscheiden physikalische und geometrische Bündelteilung.

Die physikalische Bündelteilung wird mit teildurchlässigen Flächen ausgeführt.

> Bei der physikalischen Bündelteilung bleibt der Bündelquerschnitt und damit der Lichtleitwert in beiden Teilbündeln so groß wie im einfallenden Bündel. Der Lichtstrom wird aufgeteilt, wodurch sich auch die Leuchtdichte ändert.

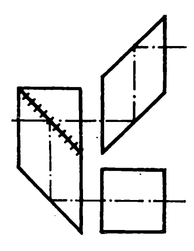


Abb. 5.149
Binokularer Tubus

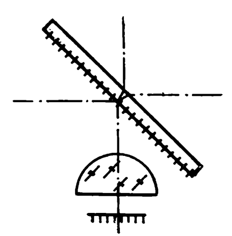


Abb. 5.150
Vereinigung zweier Teilbündel

Planparallele Platten reflektieren auch ohne besondere Behandlung einen Teil des Lichtes. Bei $n = 1{,}5$ werden bei senkrechtem Lichtdurchgang ca. 8% des Lichtstroms reflektiert, 92% hindurchgelassen. Für einen Einfallswinkel von $\varepsilon = 45°$ ist zu beachten, daß die Werte von der Schwingungsrichtung des Lichtes abhängen. Es ist bei $n = 1{,}5$, $R_s = 0{,}092$, $R_p = 0{,}008$ und damit für einfallendes natürliches Licht $R = 0{,}05$, $D = 0{,}95$. Als Nachteil ergibt sich der seitlich versetzte Nebenreflex, dessen Intensität nahezu mit dem Hauptreflex gleich ist. Für Silberschichten auf Glas mit verschiedenen nichtabsorbierenden Schichten gibt ANDERS [4] für $\lambda_0 = 550$ nm und senkrechten Lichteinfall die Meßwerte der Tab. 5.22 an.

Tabelle 5.22
Reflexionsvermögen und Durchlässigkeit von Silberschichten und bedampften Silberschichten

	R	D
unbelegte Silberschicht	0,915	0,06
geschützt mit $\lambda/2$-Schicht niedriger Brechzahl	0,925	0,055
reflexionserhöht mit $\lambda/4$-Schicht niedriger Brechzahl und $\lambda/4$-Schicht hoher Brechzahl	0,971	0,021
reflexionserhöht mit zwei weiteren $\lambda/4$-Schichten	0,985	0,008

Mit ausschließlich absorptionsfreien Schichten lassen sich noch höhere Reflexionsvermögen erzielen. Mit 8 hochbrechenden und 7 niedrigbrechenden Schichten ergibt sich z. B. $R = 0{,}992$ und $D = 0{,}003$, wobei die Werte zwischen $\lambda = 650$ nm und $\lambda = 750$ nm nahezu konstant sind [4]. Solche Teilerplatten eignen sich z. B. für Laser-Resonatoren.

Bei Einfallswinkeln von 45° sind die unterschiedlichen Werte für senkrecht und parallel zur Einfallsebene schwingendes Licht zu beachten. Für eine Anordnung nach Abb. 5.151 vergleicht ANDERS [4] die Werte bei drei verschiedenen Teilerschichten:
$\lambda_0/4$-Schicht; absorptionsfreie Schicht mit $D = R$ und $R_s = 3R_p$; Chromschicht mit $D_s = 0{,}25$, $D_p = 0{,}40$, $R_s = 0{,}4$, $R_p = 0{,}2$ (Übergang Luft—Schicht) bzw. $R_s = 0{,}2$, $R_p = 0{,}1$ (Übergang Schicht—Luft). In der Tab. 5.23 sind die gesamte Durchlässigkeit D für unpolarisiert einfallendes Licht und die relative Intensität des ersten Nebenreflexes D_N angegeben.

Tab. 5.23
Durchlässigkeit von Teilerschichten

	D	D_N	D/D_N
$\lambda/4$-Schicht	0,196	0,0056	35,0
absorptionsfreie Schicht	0,188	0,0063	29,8
Chromschicht	0,08	0,00074	108,0

Ein weiteres Beispiel stellt die Teilerplatte eines Michelson-Interferometers dar, bei der beide Teilbündel für beide Schwingungsrichtungen gleiche Intensität haben sollen (Abb. 5.152). Hierbei ergibt sich mit einer $\lambda_0/4$-Schicht $I_s = 0{,}25$ und $I_p = 0{,}141$, während mit einer Chromschicht die Aufgabe nicht lösbar ist, weil $I_{s1} = I_{p1} = 0{,}08$, $I_{s2} = I_{p2} = 0{,}04$ ist.

Beim Einbau einer Teilerplatte in ein optisches System sind die geometrisch-optischen Gesichtspunkte zu beachten, die bei den planparallelen Platten und Planspiegelplatten behandelt wurden (z. B. Schnittweitenänderung, Bildlage usw.).

Der Teilerwürfel wird besonders häufig angewendet. Er besteht aus zwei Halbwürfeln, die mit den Hypotenusenflächen aufeinandergekittet sind (Abb. 5.153). Dazwischen befindet sich eine teildurchlässige Schicht. Beide Teilbündel haben den gleichen Glasweg, und die Schicht ist geschützt. Die optische Achse durchsetzt die Glasoberflächen senkrecht, so daß Reflexe weitgehend vermieden werden. Im Strahlengang ist der Teilungswürfel wie der Halbwürfel zu behandeln.

Auch bei Teilerwürfeln hängt die Durchlässigkeit von der Schwingungsrichtung des Lichtes ab. Für unpolarisiert einfallendes Licht kann z. B. bei Chrom der reflektierte Anteil $R = 0{,}25$, der hindurchgelassene Anteil $D = 0{,}20$ betragen; bei Silber können die Werte $R = 0{,}40$, $D = 0{,}47$ erzielt werden.

Wegen der wellenlängenabhängigen Absorption in den Metallschichten erscheint oft das Licht gefärbt.

An Stelle der Metallschichten können nichtleitende Schichten mit abwechselnd hoher und niedriger Brechzahl verwendet werden. ANDERS [4] gibt ein Beispiel mit fünf Schichten an, bei dem $R = D \approx 0{,}45$ ist.

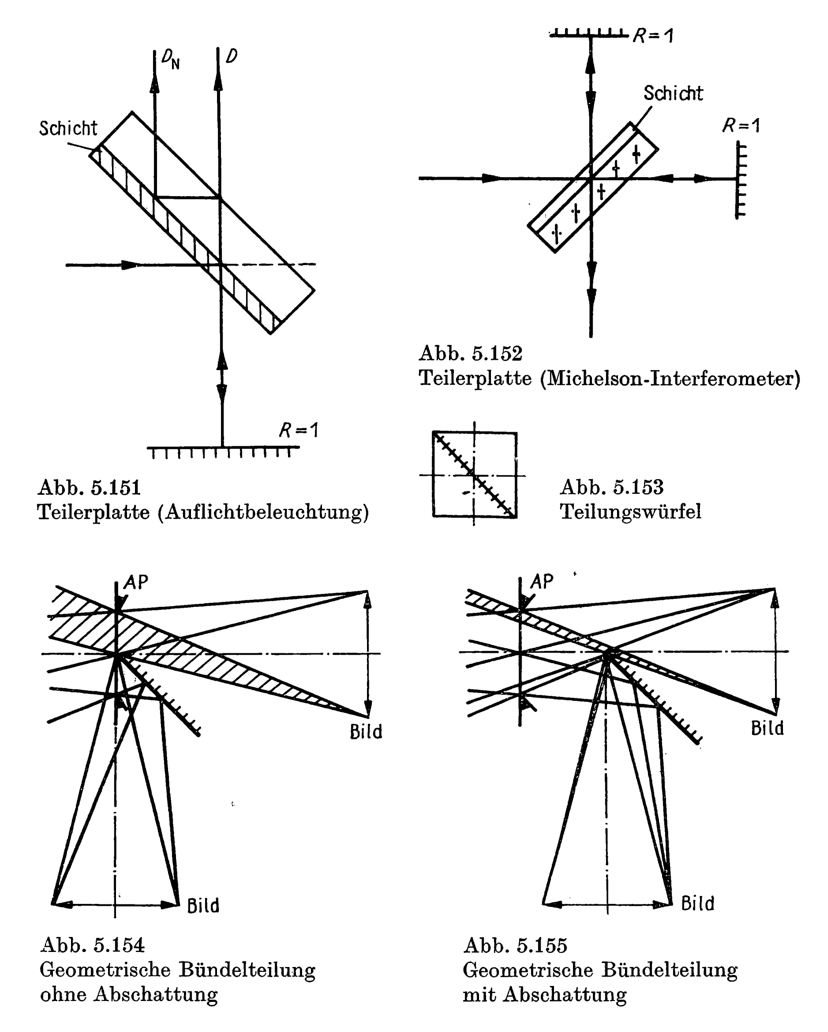


Abb. 5.151
Teilerplatte (Auflichtbeleuchtung)

Abb. 5.152
Teilerplatte (Michelson-Interferometer)

Abb. 5.153
Teilungswürfel

Abb. 5.154
Geometrische Bündelteilung ohne Abschattung

Abb. 5.155
Geometrische Bündelteilung mit Abschattung

Zur geometrischen Bündelteilung wird ein Teil des Bündels mit einem Spiegel oder einem Prisma abgezweigt.

Bei der geometrischen Bündelteilung bleibt die Leuchtdichte konstant, aber der Lichtleitwert ändert sich. Damit das gesamte Feld in beiden Teilbündeln gleichmäßig ausgeleuchtet ist, muß die Teilerfläche dicht bei der Öffnungsblende oder einer ihr konjugierten Ebene stehen (Abb. 5.154). Bei jeder anderen Lage schattet die Teilerfläche das Feld ab (Abb. 5.155).

5.6.3. Mattscheiben

Mattscheiben werden in optischen Geräten zum Auffangen reeller Bilder, zur Erzeugung diffusen oder inkohärenten Lichtes verwendet. Mattscheiben unterbrechen den regulären Strahlenverlauf, so daß hinter ihnen die Apertur der Bündel vergrößert ist. Im Gesamtstrahlengang bleibt die Leuchtdichte nicht erhalten.

> Mattscheiben sind schwach absorbierende Platten, deren Oberfläche das Licht streut.

Im allgemeinen werden planparallele Glasplatten verwendet, deren Oberfläche aufgerauht ist. Die Mattierung kann mechanisch durch Schleifen, chemisch durch Ätzen mit Flußsäure oder die Kombination beider Verfahren vorgenommen werden.

Die Korngröße des Schleifmittels bestimmt im wesentlichen die Rauhtiefe der Mattscheibe. Ein sehr feiner Schliff erzeugt eine Oberflächenstruktur, die wie eine Anordnung aus Linsen unterschiedlichen Durchmessers und gleicher Krümmungsradien wirkt.

Die mit der Rauhtiefe verbundene Körnigkeit der Mattscheibe kann sich auf das Auflösungsvermögen des Bildes auswirken. An den verschieden geneigten Teilen der aufgerauhten Oberfläche wird das Licht teilweise reflektiert, teilweise gebrochen und dadurch gestreut. Die Streuung wächst mit dem Grad der Mattierung, bleibt aber bei Mattscheiben insgesamt gering.

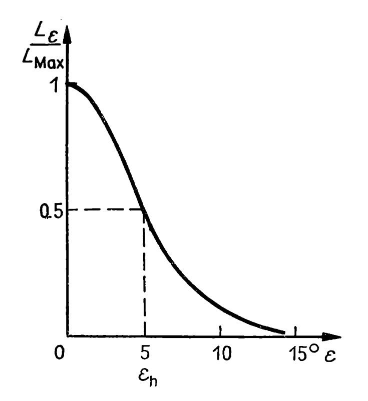


Abb. 5.156
Zur Halbwertsbreite einer Mattscheibe

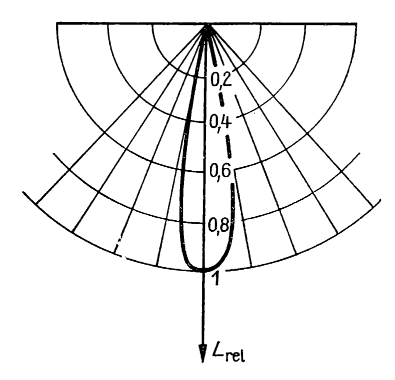


Abb. 5.157
Leuchtdichteindikatrix einer Mattscheibe

Stoffe mit geringer Streuung werden durch den Halbwertswinkel ε_h charakterisiert. Bis zu diesem sinkt die Leuchtdichte der Mattscheibe auf die Hälfte des Maximalwertes (Abb. 5.156). Bei Mattscheiben erreicht ε_h nur einige Grad. Abb. 5.157 zeigt die Leuchtdichteindikatrix einer Mattscheibe. Infolge der geringen Streuung

sind die lichttechnischen Größen hinter der Mattscheibe stark richtungsabhängig. Ein Mattscheibenbild erscheint deshalb am Rande dunkler als in der Mitte (Abb. 5.157).

Die Durchlässigkeit der Mattscheiben üblicher Dicke 1,8···3,1 mm schwankt zwischen 63% und 89%, die Absorption zwischen 3% und 17%. Neuerdings sind auch mattierte Plastefolien im Gebrauch. Auch Oberflächen von optischen Bauelementen, wie z. B. die Planfläche einer Plankonvexlinse, können mattiert sein.

6. Optische Instrumente und Systeme

6.1. Vergrößerung und Abbildungsmaßstab

6.1.1. Vergrößerung

Scheinbare Größe. Die scheinbare Größe eines mit dem menschlichen Auge betrachteten Gegenstandes hängt ausschließlich von der **Bildgröße** auf der Netzhaut ab.

> Gegenstände, deren Netzhautbilder gleich groß sind, werden als gleich groß empfunden.

In der Abb. 6.1 ist w_s der Sehwinkel und a_s die Sehweite. Bei den praktischen vorkommenden Sehwinkeln kann

$$\tan w_s \approx w_s$$

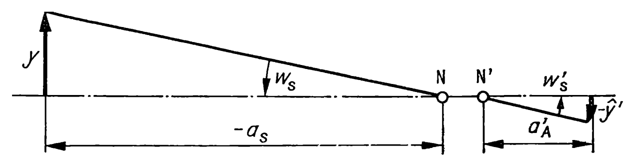


Abb. 6.1
Zur scheinbaren Größe (N und N' sind die Knotenpunkte des Auges)

gesetzt werden. Es gilt dann nach Abb. 6.1

$$\tan w_s = -\frac{y}{a_s} = -\frac{\hat{y}'}{a_A'} \tag{6.1}$$

beziehungsweise

$$\hat{y}' = a_A' \frac{y}{a_s} = -a_A' \tan w_s. \tag{6.2}$$

Der Abstand a_A' des Knotenpunktes N' von der Netzhaut wird im allgemeinen als konstante Größe angenommen. Es gilt deshalb:

> Gegenstände, für die der Tangens des Sehwinkels den gleichen Wert hat, werden gleich groß wahrgenommen.

Der Ausdruck

$$\tan w_s = -\frac{y}{a_s} \tag{6.3}$$

ist die scheinbare Größe eines Gegenstandes.

Deutliche Sehweite. Die scheinbare Größe eines vorgegebenen Gegenstandes hat den größten Wert, wenn die Sehweite a_s so klein wie möglich gewählt wird. Für a_s gibt es jedoch eine vom Alter des Menschen abhängige Grenze. Unterhalb dieser Grenze reicht die maximale Akkommodation des Auges nicht aus, um ein scharfes Bild zu erzeugen. Die jeweils kleinstmögliche Sehweite ist durch den Nahpunkt des Auges gegeben. Ständige maximale Akkommodation ist jedoch so ermüdend, daß ein Gegenstand vom Auge weiter entfernt als im Nahpunkt betrachtet werden sollte. Aus diesen Gründen ist man übereingekommen, eine deutliche Sehweite festzulegen, bei der ein Gegenstand im Durchschnitt von normalsichtigen Menschen ohne anstrengende Akkommodation mit der maximal möglichen scheinbaren Größe wahrgenommen wird.

Als deutliche Sehweite gilt $a_d = -250$ mm. (6.4)

Die deutliche Sehweite ist eine konventionell vorgegebene Bezugsgröße. Diejenige Sehweite, in der ohne anstrengende Akkommodation die maximal mögliche scheinbare Größe faktisch erreicht wird, kann im Einzelfall davon abweichen.

Der physiologische Grenzwinkel. Das menschliche Auge hat infolge der Netzhautstruktur ein begrenztes Auflösungsvermögen. Bei angestrengtem Sehen werden zwei Objektpunkte getrennt wahrgenommen, wenn ihr Winkelabstand mindestens $w_G = 1' \triangleq 0{,}00029$ rad ist. Etwa der doppelte Wert wird bei „bequemem“ Sehen aufgelöst.

Die kleinste auflösbare scheinbare Größe punktförmig begrenzter Strecken hat den Wert

$w_G = 1' \triangleq 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ rad.

Der Winkel w_G heißt physiologischer Grenzwinkel.

Benachbarte feine Linien werden noch getrennt bei einem Winkelabstand $w_N = 10'' \triangleq 0{,}00005$ rad oder bei einer Versetzung um den gleichen Betrag (Abb. 6.2).

Die kleinste wahrnehmbare Versetzung feiner Linien, die Noniussehschärfe, hat den Betrag
$w_N = 10'' \triangleq 5 \cdot 10^{-5}$ rad.

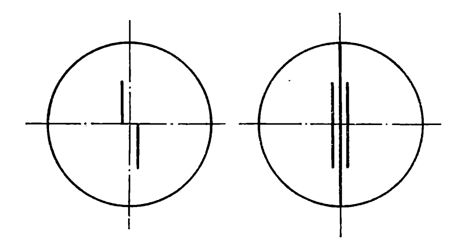


Abb. 6.2
Beispiele zur Noniussehschärfe

Vergrößerung. Die Vergrößerung der scheinbaren Größe einer Struktur mit optischen Hilfsmitteln ist notwendig, wenn der physiologische Grenzwinkel beim direkten Sehen nicht erreicht wird.

Wir definieren:

> Die Vergrößerung Γ' eines mit dem Auge gemeinsam benutzten optischen Systems ist das Verhältnis der scheinbaren Größe $\tan w'_s$ des von ihm entworfenen Bildes zur scheinbaren Größe $\tan w_s$, die der Gegenstand in einer vorgegebenen Entfernung hat.

Allgemein gilt also für die Vergrößerung

$$\Gamma' = \frac{\tan w'_s}{\tan w_s}. \tag{6.5}$$

Der physiologische Grenzwinkel kann beim direkten Sehen durch zwei grundsätzlich verschiedene Ursachen unterschritten werden.

— Der physiologische Grenzwinkel wird unterschritten, wenn die Objektstruktur eine so geringe lineare Größe hat, daß sie trotz Annäherung des Gegenstandes auf die deutliche Sehweite nicht aufgelöst wird. Das trifft zum Beispiel bei den Bakterien oder Viren zu. In diesem Falle ist ein optisches System notwendig, eine Lupe oder ein Mikroskop, das ein vergrößertes Bild erzeugt. Die scheinbare Größe $\tan w'_s$ beim Beobachten der Objektstruktur mit dem optischen System muß größer sein als die scheinbare Größe der Objektstruktur $\tan w_s$ in der deutlichen Sehweite. Die Sehweite mit dem optischen System kann gleich der deutlichen Sehweite oder betragsmäßig größer als diese sein.

Für ein im Endlichen liegendes Bild beträgt die Vergrößerung (Abb. 6.3)

$$\Gamma' = \frac{y' a_d}{a'_s y} \tag{6.6}$$

Abb. 6.3 Zur Berechnung der Vergrößerung

oder

$$\Gamma' = -\beta' \frac{250}{a'_s/\text{mm}}. \tag{6.7}$$

Eine Vergrößerung $|\Gamma'| > 1$ tritt nur ein, wenn

$$|\beta'| > \left|\frac{a'_s/\text{mm}}{250}\right| \text{ ist.}$$

Die Abbildung des Gegenstandes ins Unendliche ergibt die Vergrößerung

$$\Gamma' = -\frac{a_d}{y} \tan w'_s \tag{6.8}$$

beziehungsweise

$$\Gamma' = \frac{250}{y/\text{mm}} \tan w'_s. \tag{6.9}$$

— Der physiologische Grenzwinkel wird unterschritten, wenn die Objektstruktur nicht zugänglich ist — also nicht in die deutliche Sehweite gebracht werden kann — und eine so große Entfernung vom Beobachter hat, daß sie nicht auflösbar ist. Das ist z. B. bei den Oberflächenstrukturen der Planeten der Fall. Die Saturnringe beispielsweise sind zwar große Objekte, aber ihre Entfernung verhindert die Auflösung ihrer Struktur beim direkten Sehen. Das anzuwendende optische System, ein Fernrohr, muß ein Bild der Objektstruktur erzeugen, dessen scheinbare Größe $\tan w'_s$ größer ist, als die scheinbare Größe $\tan w_s$ des Gegenstandes in der richtigen Sehweite. Die lineare Bildgröße y' kann kleiner sein als die Objektgröße y, wenn nur a'_s entsprechend kleiner ist als a_s. Bei unendlichen Sehweiten für Objekt und Bild ist die allgemeine Gl. (6.5) zur Berechnung der Vergrößerung zu verwenden. Liegen Objekt und Bild im Endlichen, dann gilt

$$\Gamma' = \frac{y' a_s}{a'_s y}$$

(Abb. 6.3 mit $-a_s$ an Stelle von $-a_d$) oder

$$\Gamma' = \beta' \frac{a_s}{a'_s}. \tag{6.10}$$

Entsprechend gilt bei unendlicher Objektweite und endlicher Bildweite

$$\Gamma' = -\frac{y'}{a'_s \tan w_s} \tag{6.11}$$

bzw. bei endlicher Objektweite und unendlicher Bildweite

$$\Gamma' = -\frac{a_s}{y} \tan w'_s. \tag{6.12}$$

Die hier angegebenen Beziehungen sind in der Tab. 6.1 übersichtlich zusammengefaßt worden.

Tabelle 6.1
Spezialfälle der Gleichung für die Vergrößerung

Objektweite ↓	Bildweite →	Endlich	Unendlich
Endlich	Mikroskop	$\Gamma' = -250 \frac{\beta'}{a'_s/\text{mm}}$	$\Gamma' = \frac{250}{y/\text{mm}} \tan w'_s$
	Fernrohr	$\Gamma' = a_s \frac{\beta'}{a'_s}$	$\Gamma' = -\frac{a_s}{y} \tan w'_s$
Unendlich	Mikroskop	entfällt	entfällt
	Fernrohr	$\Gamma' = -\frac{1}{\tan w_s} \frac{y'}{a'_s}$	$\Gamma' = \frac{1}{\tan w_s} \tan w'_s$

Einfaches Mikroskop. Eine einzelne Sammellinse werde dicht vor das Auge gehalten und habe eine so kleine freie Öffnung, daß diese als Öffnungsblende wirkt. Diese Anordnung bezeichnet man als einfaches Mikroskop. Die Linse bildet den Gegenstand ins Unendliche ab, wenn dieser in der Brennebene liegt (Abb. 6.4). Nach Gl. (6.9) gilt mit

$$\tan w_s' = -\frac{y}{f} = \frac{y}{f'} \tag{6.13}$$

für die Vergrößerung (Γ_N' = Normalvergrößerung)

$$\Gamma_N' = \frac{250}{f'/\text{mm}} \quad (a_s' = \infty,\ a_s = -250\ \text{mm}). \tag{6.14}$$

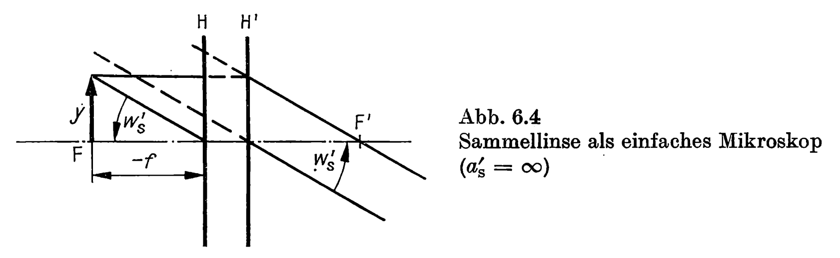


Abb. 6.4
Sammellinse als einfaches Mikroskop
($a_s' = \infty$)

Das Bild kann höchstens auf die deutliche Sehweite angenähert werden, wobei sich die Vergrößerung nach Gl. (6.7) mit $a_s' = -250$ mm erhöht auf

$$\Gamma' = \beta' = \frac{a_s'}{a} = a_s'\left[\frac{1}{a_s'} - \frac{1}{f'}\right] \tag{6.15}$$

(Abb. 6.5) bzw. auf

$$\Gamma' = \frac{250}{f'/\text{mm}} + 1 \quad (a_s' = -250\ \text{mm},\ a_s = -250\ \text{mm}). \tag{6.16}$$

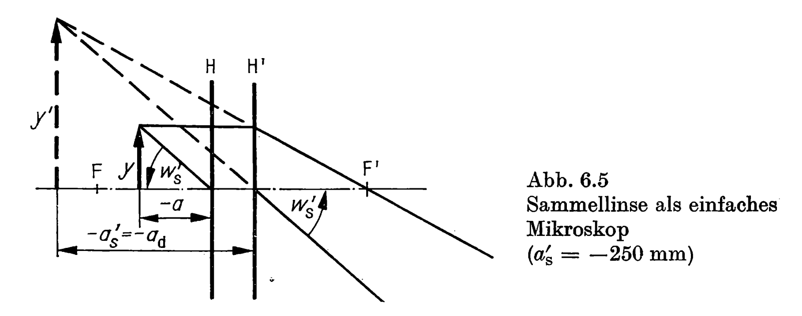


Abb. 6.5
Sammellinse als einfaches Mikroskop
($a_s' = -250$ mm)

In Tab. 6.2 sind zwei weitere einstufig vergrößernde optische Instrumente für die Vergrößerung naher Objekte geringer linearer Größe aufgeführt. Lupe, Leseglas und einfaches Mikroskop unterscheiden sich durch den Gebrauch bzw. durch die

Öffnungs- und Feldbegrenzung. Für den Fall $a'_s = \infty$ und $a_s = -250$ mm gilt für Lupe, Leseglas und einfaches Mikroskop die gleiche Vergrößerungsbeziehung Gl. (6.14).

Tabelle 6.2
Eigenschaften von Lupe, Leseglas und einfachem Mikroskop

	Lupe	Leseglas	einfaches Mikroskop
Ort des Auges	nahe des Systems	weit weg vom System	dicht hinter dem System
Bewegung des Auges	starres Auge	blickendes Auge	schauendes Auge (Bewegung des Kopfes)
Öffnungs-begrenzung	Augenpupille $\triangleq$ AP	Augenpupille $\triangleq$ AP	freie Öffnung des Systems $\triangleq$ EP
Feld-begrenzung	freie Öffnung $\triangleq$ EL (1)	freie Öffnung $\triangleq$ EL (2)	Augenpupille $\triangleq$ AL (3)

(1) Voraussetzung: Sehfeld des Auges größer als das Bildfeld der Lupe (Füll- oder Sehfeldperspektive)
(2) Blickfeld des Auges mitbestimmend für das Feld (Hauptperspektive oder Blickfeldperspektive)
(3) „Schlüsselloch-Beobachtung" (Schlüsselloch-Perspektive)

Einfaches Fernrohr. Bei der Anwendung einer Sammellinse als einfaches Fernrohr ist die Objektschnittweite groß gegenüber der Brennweite, so daß ein reelles Bild entsteht. Dieses Luftbild wird mit dem Auge betrachtet. Die scheinbare Größe des Gegenstandes soll vom Hauptpunkt H der Linse aus beurteilt werden. Das Bild liegt in der Entfernung der deutlichen Sehweite.

Bei unendlich fernem Gegenstand ist nach Abb. 6.6a

$$\tan w_s = -\frac{y'}{f'} \quad \text{und} \quad a'_s = a_d$$

zu setzen, womit aus Gl. (6.11)

$$\Gamma'_N = \frac{f'}{a_d} = -\frac{f'/\text{mm}}{250} \quad (a_s = -\infty,\ a'_s \text{ endlich}) \tag{6.17}$$

hervorgeht.

Das negative Vorzeichen zeigt an, daß das Bild zweiseitig vertauscht ist.

Für die Beobachtung eines im Endlichen liegenden Gegenstandes gilt nach Gl. (6.10)

$$\Gamma' = \beta' \frac{a_s}{a'_s}.$$

Es ist $a'_s = a_d$, $a_s = a$ und $\beta' = \dfrac{a'}{a}$ (Abb. 6.6b), also

$$\Gamma' = \frac{a'}{a_d}. \tag{6.18}$$

Anwenden der Abbildungsgleichung ergibt

$$\Gamma' = \frac{f'}{a_\text{d}\left(1 + \dfrac{f'}{a}\right)}. \tag{6.19}$$

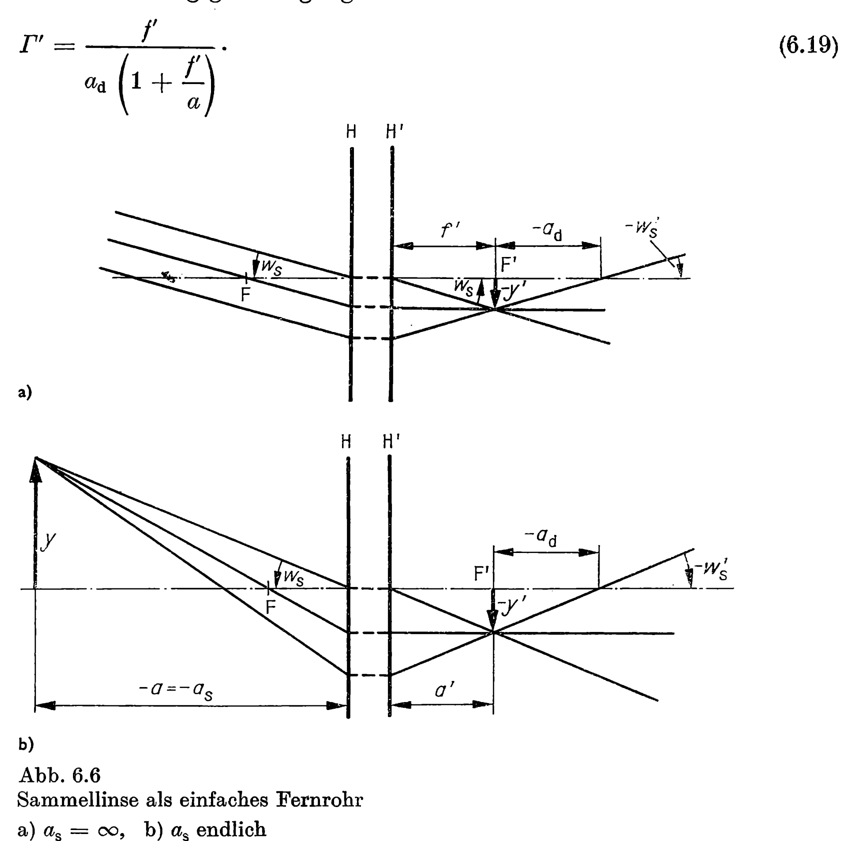


Abb. 6.6
Sammellinse als einfaches Fernrohr
a) $a_\text{s} = \infty$, b) a_s endlich

Bei $|a| \gg f'$ ist angenähert

$$\Gamma' = -\frac{f'/\text{mm}}{250}\left(1 - \frac{f'}{a}\right) \quad (a_\text{s} \text{ und } a_\text{s}' \text{ endlich}). \tag{6.20}$$

Wegen $a < 0$ und $|a| \gg f'$ ist $|\Gamma'|$ geringfügig größer als $|\Gamma_\text{N}'|$.

Wir erkennen beim Vergleich der Gl. (6.14) mit Gl. (6.17) einen wesentlichen Unterschied zwischen einfachem Mikroskop und einfachem Fernrohr.

> Die Normalvergrößerung des einfachen Mikroskops ist dessen Brennweite umgekehrt proportional.
> Die Normalvergrößerung des einfachen Fernrohrs ist dessen Brennweite proportional.

Tab. 6.3 enthält die Formeln für die Vergrößerungen des einfachen Mikroskops und des einfachen Fernrohrs.

Tabelle 6.3
Vergrößerung einfacher optischer Instrumente

Objektweite ↓	Bildweite →	Endlich	Unendlich
Endlich	einfaches Mikroskop	$\Gamma' = \frac{250}{f'/\text{mm}} + 1$	$\Gamma'_{\text{N}} = \frac{250}{f'/\text{mm}}$
	einfaches Fernrohr	$\Gamma' = -\frac{f'/\text{mm}}{250}\left(1 - \frac{f'}{a}\right)$	entfällt
Unendlich	einfaches Mikroskop	entfällt	entfällt
	einfaches Fernrohr	$\Gamma'_{\text{N}} = -\frac{f'/\text{mm}}{250}$	entfällt

6.1.2. Abbildungsmaßstab

Bei optischen Systemen, die nicht unmittelbar mit dem Auge zusammen benutzt werden, bestimmt der Abbildungsmaßstab

$$\beta' = \frac{y'}{y} \tag{6.21}$$

das Größenverhältnis zwischen Bild und Objekt. Im folgenden soll stets $f = -f'$ angenommen werden. Bei zentrierten optischen Systemen gilt im paraxialen Gebiet für das Brennpunkt-Koordinaten-System

$$\beta' = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'} \tag{6.22}$$

und für das Hauptpunktkoordinatensystem

$$\beta' = \frac{a'}{a}. \tag{6.23}$$

Für $a = -\infty$ wird $\beta' = 0$ und $y = \infty$. Die Objektgröße läßt sich nur im Winkelmaß ausdrücken.

Es ist

$$y' = f \tan w_{\text{s}}. \tag{6.24}$$

Die Brennweite tritt hier als Maß für das Verhältnis aus der linearen Bildgröße und der scheinbaren Objektgröße auf. Für $a' = \infty$ ist $\beta' = \infty$, so daß die Größenbeziehungen zwischen Objekt und Bild mittels

$$y = f' \tan w'_{\text{s}} \tag{6.25}$$

darzustellen ist.

Bei unendlich fernem Gegenstand ist die Bildgröße der scheinbaren Objektgröße proportional.
Bei unendlich fernem Bild ist die scheinbare Bildgröße der Objektgröße proportional.
Der Proportionalitätsfaktor ist im ersten Fall die objektseitige, im zweiten Fall die bildseitige Brennweite.

Bei erfüllter Sinusbedingung ist der Maßstab für die Abbildung achsnaher Flächenelemente mit weit geöffneten Bündeln zu berechnen aus

$$\beta' = \frac{n \sin \hat{\sigma}}{n' \sin \hat{\sigma}'}. \tag{6.26}$$

Bei der Projektion werden die Bilder auf einem Schirm aufgefangen, und erst das Schirmbild wird betrachtet. Die scheinbare Größe des Schirmbildes beträgt nach Gl. (6.3)

$$\tan w_s' = -\frac{y'}{a_s'}, \tag{6.27}$$

wobei $y' = y\beta'$ die lineare Größe des Projektionsbildes und a_s' die Betrachtungsentfernung ist. Gleichung (6.27) kann

$$\tan w_s' = \frac{\beta' y}{a_s'} \tag{6.28}$$

geschrieben werden.

Auch die Mattscheibe im Sucher einer Spiegelreflexkamera oder in einer Plattenkamera unterbricht die objektive Abbildung. Eine visuelle Beobachtung des Mattscheibenbildes schließt sich an. Dieses hat bei der Betrachtung aus der deutlichen Sehweite die scheinbare Größe

$$\tan w_s' = -\frac{y'}{a_d} = \frac{y'/\text{mm}}{250}. \tag{6.29}$$

Das auf „unendlich eingestellte“ Fotoobjektiv ergibt nach Gl. (6.29) mit Gl. (6.24) die scheinbare Mattscheibenbildgröße

$$\tan w_s' = -\frac{f'/\text{mm}}{250} \tan w_s. \tag{6.30a}$$

Das Fotoobjektiv, als Sucher benutzt, wirkt wie ein einfaches Fernrohr mit der Vergrößerung

$$\Gamma' = -\frac{f'/\text{mm}}{250}. \tag{6.30b}$$

Erst bei Objektivbrennweiten $f' > 250\,\text{mm}$ ist eine Vergrößerung $|\Gamma'| > 1$ zu bemerken.

6.1.3. Optische Instrumente und Geräte

Optisches Instrument. Der Begriff des optischen Instruments ist historisch entstanden. Es gibt Meinungen, nach denen er heute überflüssig wäre. Wir verwenden ihn als einen Begriff, der eine bestimmte Kategorie von optischen Systemen kennzeichnet. Wir definieren:

> Ein optisches Instrument ist eine Anordnung aus optischen Funktionselementen und -gruppen, mit der auf lichtoptischem Wege ein Bild erzeugt wird. Optische Instrumente erweitern mit optischen Mitteln die Leistungsfähigkeit des menschlichen Auges.

Die Einteilung der optischen Instrumente richtet sich danach, ob das Auge in die Abbildungsfolge unmittelbar einbezogen ist oder ob die Abbildung vor dem Betrachten des Bildes unterbrochen wird.

Bei subjektiven optischen Instrumenten gehört das Auge direkt dem Strahlengang des optischen Systems an. Insbesondere wird das Bild nicht aufgefangen, bevor es dem Auge dargeboten wird. Entscheidend für die Wirkungsweise ist die Beschaffenheit des reellen Endbildes auf der Netzhaut. Subjektive Instrumente dienen der Vergrößerung des Sehwinkels. Sie erweitern also die Leistungsfähigkeit des Auges in der Richtung, daß das Auflösungsvermögen erhöht wird, bzw. hinsichtlich eines deutlichen Sehens. Deshalb wurde früher für solche Instrumente der Begriff des „verdeutlichenden Instruments“ benutzt.

Die unmittelbare Bindung des Instruments an das menschliche Auge schließt eine wiederholte Beobachtung ohne das gleiche Objekt aus.

Die subjektiven optischen Instrumente sind z. B. die Lupe, das visuell benutzte Mikroskop und das visuell benutzte Fernrohr.

Objektive optische Instrumente entwerfen zunächst unabhängig vom menschlichen Auge ein Bild des Gegenstandes. Dieses Bild wird zum Beispiel auf einem Schirm, einer Mattscheibe oder einer konservierenden Schicht aufgefangen. Erst nachträglich schließt sich die Betrachtung an. Zwischen der Abbildung und der Betrachtung liegen teilweise längere Übertragungsketten oder -zeiten, die den Informationsgehalt des Bildes ändern. Man denke zum Beispiel an den Prozeß vom Belichten des Films bis zur Vorführung der fertigen Kopie, bei dem weitere optische Systeme mitwirken, oder an den Weg einer Fernsehaufnahme bis zum Beobachten auf dem Bildschirm. Häufig ist das von objektiven Instrumenten erzeugte Bild konserviert, so daß es wiederholt angesehen werden kann. Die Informationen über das Objekt sind dann gespeichert. Deshalb ist auch der Begriff des „reproduzierenden Instruments“ im Gebrauch.

Die Erweiterung der Leistung des Auges liegt vor allem darin, daß objektive optische Instrumente ein Bild erzeugen, das ohne sofortiges Einbeziehen des Auges in den Abbildungsvorgang, also zu einer anderen Zeit oder an einem anderen Ort auswertbar ist. Größenbeziehungen zwischen Objekt und Bild werden zunächst durch den Abbildungsmaßstab oder die linearen Abmessungen und die scheinbare Größe vermittelt.

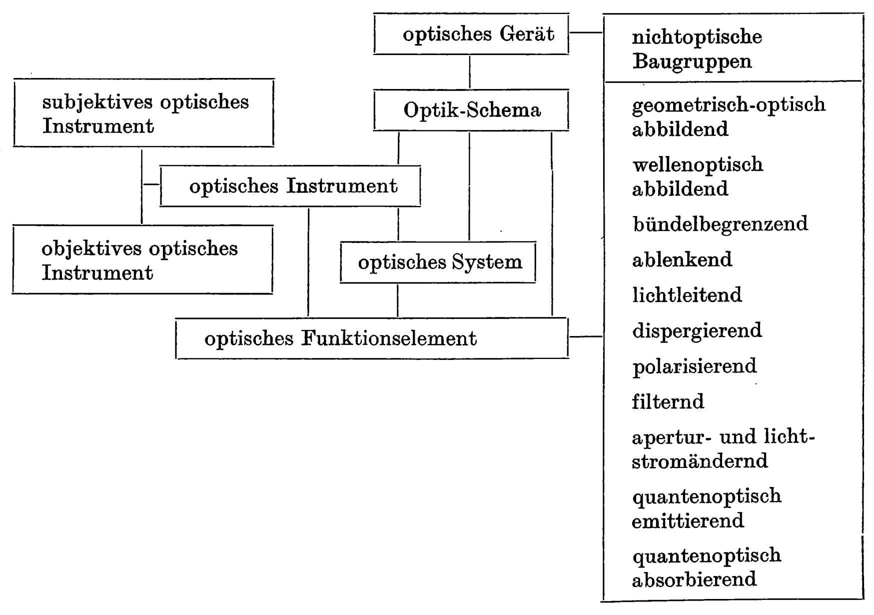
Objektive optische Instrumente sind z. B. Fotoobjektive, Projektionssysteme, Scheinwerferoptiken, aber auch optische Anordnungen zur Mikrofotografie, Mikroprojektion und zur Astrofotografie.

Optisches Gerät. Ein optisches Gerät stellt ein komplexes technisches Gebilde dar, in dem Baugruppen verschiedener technischer Disziplinen vereint sind. Die Hauptfunktion des Gerätes beruht auf den Gesetzen der Optik.

Mit einem optischen Gerät werden Informationen aufgenommen, übertragen, gewandelt und ausgewertet, wobei das Licht als Energieträger dient. Die Gesamtheit der optischen Funktionselemente, die teilweise oder vollständig zu optischen Systemen und Instrumenten zusammengefaßt sein können, bilden das Optik-Schema des optischen Gerätes.

Die klassischen optischen Geräte, wie z. B. die Mikroskope, sind vorwiegend feinmechanisch-optische Geräte. Sie bestehen aus einem optischen Instrument, weiteren optischen Funktionselementen und feinmechanischen Funktionsgruppen. In dieser

Tabelle 6.4
Schematische Einteilung technisch-optischer Gebilde



Beziehung verstehen wir unter einem Mikroskop einerseits ein optisches Instrument, wenn nur die für die Hauptfunktion notwendigen optischen Systeme und Funktionselemente gemeint sind, und andererseits ein optisches Gerät, wenn sämtliche Funktionsgruppen betrachtet werden, also zum Beispiel auch die Triebe, Tische, Stative und so weiter. In den modernen optischen Geräten können mehr oder weniger sämtliche technischen Disziplinen angewendet sein. In besonders starkem Maße tritt die Elektrotechnik, speziell die Elektronik, an die Seite der Optik. Die elektronischen Baugruppen ersetzen aber nicht die optischen Funktionselemente, deren Umfang

weitgehend erhalten bleibt. Sie erweitern und ergänzen die optischen Geräte hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit, indem sie das optische Signal umwandeln, steuern, registrieren und auswerten. Andererseits wird die Optik in Bereiche eindringen, die bisher nur der Elektronik vorbehalten waren. Das trifft zum Beispiel für bestimmte Funktionen in Datenverarbeitungsanlagen zu. Tabelle 6.4 enthält eine schematische Einteilung technisch-optischer Gebilde. Das Optik-Schema kann aus optischen Instrumenten, optischen Systemen und optischen Funktionselementen nebeneinander oder in einem Strahlengang bestehen. Ein optisches Instrument enthält entweder nur optische Funktionselemente oder auch zu optischen Systemen zusammengefaßte Funktionselemente.

6.2. Lupe und Mikroskop

6.2.1. Lupe

In der Tab. 6.2 wurden einige Eigenschaften von Lupe, Leseglas und einfachem Mikroskop gegenübergestellt. Die beim einfachen Mikroskop mit unendlicher Bildweite geltende Normalvergrößerung und die Vergrößerung für ein in der deutlichen Sehweite entstehendes Bild wurden im Abschnitt 6.1.1. berechnet.

Für eine Lupe, die dicht vor ein normalsichtiges Auge gehalten wird, gelten dieselben Gleichungen wie für das einfache Mikroskop. Die Normalvergrößerung der Lupe beträgt also nach Gl. (6.14)

$$\Gamma'_N = \frac{250}{f'/\text{mm}} \quad (a'_s = \infty,\ a_s = -250\ \text{mm}). \tag{6.31}$$

Nach der Akkommodation auf die deutliche Sehweite gilt nach Gl. (6.16)

$$\Gamma' = \Gamma'_N + 1 \quad (a'_s = -250\ \text{mm},\ a_s = -250\ \text{mm}). \tag{6.32}$$

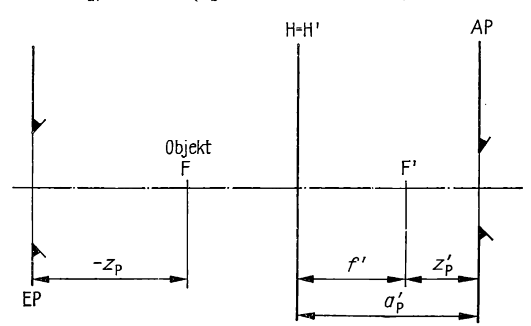


Abb. 6.7
Zur Pupillenabbildung bei der Lupe

Bündelbegrenzung und Perspektive. Bei der Lupenbeobachtung wirkt die Augenpupille als Austrittspupille. Die Eintrittspupille hat die Entfernung

$$z_p = -\frac{f'^2}{z'_p} \tag{6.33}$$

vom objektseitigen Brennpunkt der Lupe (Abb. 6.7). Die gegenseitige Lage von Eintrittspupille und Objekt bestimmt die Perspektive. Für ein in der objektseitigen

Brennebene stehendes Objekt gilt

bei $z'_p = 0$ ist $z_p = \infty$, es liegt telezentrische Perspektive vor;

bei $z'_p < 0$ ist $z_p > 0$, es liegt entozentrische Perspektive vor;

bei $z'_p > 0$ ist $z_p < 0$, es liegt hyperzentrische Perspektive vor.

Wir berechnen die Austrittspupillen-Entfernung von der Lupe a'_p für natürliche Perspektive (also im wesentlichen den Augenort). Mit

$$a'_p = z'_p + f' \tag{6.34}$$

und Gl. (6.31), (6.33) erhalten wir

$$a'_p/\text{mm} = \frac{250}{\Gamma'_N} - \frac{62500}{\Gamma'^2_N z_p/\text{mm}}. \tag{6.35}$$

Die natürliche Perspektive ist diejenige, die beim direkten Sehen des Objektes aus der deutlichen Sehweite heraus vorliegt. Es muß also auch bei der Lupenbeobachtung $z_p = 250$ mm gesetzt werden, womit sich aus Gl. (6.35)

$$a'_p/\text{mm} = \frac{250}{\Gamma'_N} - \frac{250}{\Gamma'^2_N} \tag{6.36}$$

ergibt. Abbildung 6.8 enthält a'_p als Funktion von Γ'_N. Bei hohen Vergrößerungen erfordert die natürliche Perspektive einen relativ geringen Abstand des Auges von der Lupe.

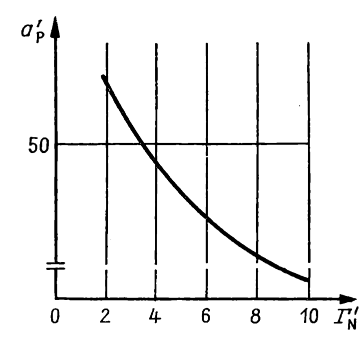


Abb. 6.8
Austrittspupillenlage als Funktion der Normalvergrößerung bei natürlicher Perspektive

Die freie Linsenöffnung wirkt als Feldblende. Da sie nicht mit der Objektebene zusammenfällt, liegt Randabschattung durch die Feldblende vor.

Vergrößerung bei akkommodiertem oder fehlsichtigem Auge. Bei einer Lupe, die mit einem fehlsichtigen oder mit einem akkommodierenden Auge benutzt wird, hängt die Vergrößerung auch von der Entfernung Auge—Lupe ab.

Wir gehen davon aus, daß die lineare Größe des Netzhautbildes die scheinbare Größe des Objektes bestimmt. Für die Änderung der Vergrößerung gegenüber der Normalvergrößerung ist deshalb die Änderung der Bildgröße auf der Netzhaut ent-

scheidend. Der Abbildungsmaßstab von Lupen- und Augenabbildung betrage beim fehlsichtigen Auge β', beim normalsichtigen und entspannten Auge β'_{N}. Die Vergrößerung ergibt sich dann aus

$$\Gamma' = \Gamma'_{\mathrm{N}} \frac{\beta'}{\beta'_{\mathrm{N}}}. \tag{6.37}$$

Der Abbildungsmaßstab läßt sich zusammensetzen aus demjenigen der Lupe und demjenigen des Auges:

$$\beta'_{\mathrm{L}} = -\frac{z'_{\mathrm{L}}}{f'_{\mathrm{L}}}. \tag{6.38}$$

Nach Abb. 6.9 ist

$$z'_{\mathrm{L}} = a'_{\mathrm{L}} - f'_{\mathrm{L}} \quad \text{und} \quad a'_{\mathrm{L}} = a_{\mathrm{A}} + e',$$

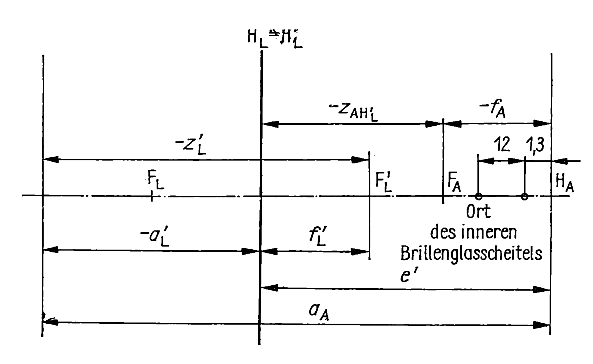


Abb. 6.9
Vom Auge weggerückte Lupe

also

$$z'_{\mathrm{L}} = a_{\mathrm{A}} + e' - f'_{\mathrm{L}} \tag{6.39}$$

und

$$\beta'_{\mathrm{L}} = \frac{f'_{\mathrm{L}} - e' - a_{\mathrm{A}}}{f'_{\mathrm{L}}}. \tag{6.40}$$

Entsprechend folgt aus

$$\beta'_{\mathrm{A}} = -\frac{f_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{A}}}$$

mit $z_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{A}} - f_{\mathrm{A}}$ für den Abbildungsmaßstab des Auges

$$\beta'_{\mathrm{A}} = -\frac{f_{\mathrm{A}}}{a_{\mathrm{A}} - f_{\mathrm{A}}}. \tag{6.41}$$

Insgesamt beträgt der Abbildungsmaßstab

$$\beta' = -\frac{(f'_{\mathrm{L}} - e' - a_{\mathrm{A}})\, f_{\mathrm{A}}}{f'_{\mathrm{L}}(a_{\mathrm{A}} - f_{\mathrm{A}})}. \tag{6.42}$$

Bei $a_A = -\infty$ (entspanntes normalsichtiges Auge) gilt

$$\beta'_N = \frac{f_A}{f'_L}. \tag{6.43}$$

Mit $f'_L/\text{mm} = 250/\Gamma'_N$ sowie Gl. (6.37), (6.42), (6.43) ergibt sich die Vergrößerung

$$\Gamma' = -\Gamma'_N \frac{\dfrac{250}{\Gamma'_N} - e'/\text{mm} - a_A/\text{mm}}{a_A/\text{mm} - f_A/\text{mm}}. \tag{6.44}$$

Wir setzen (Abb. 6.9)

$$e' = -f_A - z_{AH'_L} \tag{6.45}$$

und erhalten

$$\Gamma' = \Gamma'_N \left(1 + \frac{\dfrac{250}{\Gamma'_N}}{f_A/\text{mm} - a_A/\text{mm}} + \frac{z_{AH'_L}}{f_A/\text{mm} - a_A/\text{mm}}\right). \tag{6.46}$$

Die Entfernung, auf die ein fehlsichtiges oder akkommodiertes Auge eingestellt ist, wird von dem 13,3 mm vor dem objektseitigen Hauptpunkt liegenden Punkt aus gemessen. Sie ist gleich der Brennweite, die der in Dioptrien angegebenen Fehlsichtigkeit zugeordnet ist. Es wird also

$$a_D/\text{mm} = \frac{1000}{D/\text{dpt}} \quad \text{und} \quad a_A/\text{mm} = \frac{1000}{D/\text{dpt}} - 13{,}3. \tag{6.47, 6.48}$$

(Der Zähler 1000 entsteht durch die Umrechnung von 1 dpt $= 1\,\text{m}^{-1}$ in mm^{-1}. Der genannte Bezugspunkt liegt 12 mm vor dem vorderen Scheitel der Hornhaut und wird als Ort des inneren Scheitels eines Brillenglases angenommen.)

Akkommodation und Kurzsichtigkeit liegen bei $D < 0$, Weitsichtigkeit bei $D > 0$ vor.

Da die Brennweite des entspannten Auges $f_A = -17{,}1$ mm beträgt, gilt

$$f_A - a_A = -\frac{1000}{D/\text{dpt}} - 3{,}8. \tag{6.49}$$

Damit ergibt sich aus Gl. (6.46)

$$\Gamma' = \Gamma'_N \left(1 - \frac{250}{\Gamma'_N} \frac{1}{\dfrac{1000}{D/\text{dpt}} + 3{,}8} - \frac{z_{AH'_L}}{\dfrac{1000}{D/\text{dpt}} + 3{,}8}\right). \tag{6.50}$$

Praktisch ist stets

$$\left|\frac{1000}{D/\text{dpt}}\right| \gg 3{,}8,$$

so daß mit ausreichender Näherung

$$\Gamma' = \Gamma'_{\mathrm{N}} \left(1 - \frac{D/\mathrm{dpt}}{4\Gamma'_{\mathrm{N}}} - \frac{D/\mathrm{dpt} \cdot z_{\mathrm{AH'_L}}/\mathrm{mm}}{1000}\right). \tag{6.51}$$

gesetzt werden kann.

Akkommodation auf die deutliche Sehweite. Akkommodation auf $a_{\mathrm{D}} = a_{\mathrm{d}} = -250$ mm entspricht einer Brechkraft $D = -4$ dpt. Die Vergrößerung beträgt

$$\Gamma' = \Gamma'_{\mathrm{N}} \left(1 + \frac{1}{\Gamma'_{\mathrm{N}}} + \frac{z_{\mathrm{AH'_L}}/\mathrm{mm}}{250}\right). \tag{6.52}$$

Bei $z_{\mathrm{AH'_L}} = 0$ ergibt sich die bereits abgeleitete Gl. (6.32): $\Gamma' = \Gamma'_{\mathrm{N}} + 1$. Dazu muß also die Lupe so dicht vor das Auge gehalten werden, daß ihr bildseitiger Hauptpunkt mit dem objektseitigen Brennpunkt des Auges zusammenfällt.

Die Vergrößerung nimmt ab, wenn die Lupe weiter vom Auge entfernt gehalten wird. So ist z. B. bei $z_{\mathrm{AH'_L}} = -125$ mm

$$\Gamma' = \frac{1}{2}\,\Gamma'_{\mathrm{N}} + 1.$$

(Bei $\Gamma'_{\mathrm{N}} = 8$ ist also nur noch $\Gamma' \doteq 5$.) Abbildung 6.10 enthält die Abhängigkeit der Vergrößerung von $z_{\mathrm{AH'_L}}$ für eine Lupe mit $\Gamma'_{\mathrm{N}} = 5$, $f'_{\mathrm{L}} = 50$ mm bei Akkommodation mit $D = -4$ dpt und bei Weitsichtigkeit mit $D = 4$ dpt.

Ausführungsformen. Bei Lupen mit schwacher Vergrößerung kann wegen der kleinen Austrittspupille die Korrektion des Öffnungsfehlers und die Erfüllung der Sinusbedingung untergeordnete Bedeutung haben. Das große Feld erfordert die Korrektion der Koma, des Astigmatismus, der Verzeichnung und des Farbfehlers des Hauptstrahls. Die Bildfeldwölbung kann teilweise durch die Akkommodation auf die gekrümmte Bildschale ausgeglichen werden.

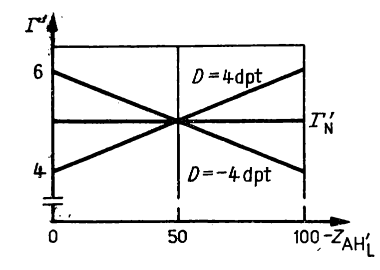


Abb. 6.10
Vergrößerung der Lupe als Funktion des Abstandes Auge—Lupe

Abbildung 6.11 enthält einige Ausführungsformen von Lupen. Für geringere Ansprüche genügt bis zu $\Gamma' = 6$ eine Plankonvexlinse, deren Planfläche dem Auge zuzukehren ist (geringer Astigmatismus, Abb. 6.11a). Die Verantlupe erfüllt höhere Ansprüche hinsichtlich der Bildqualität bis zu Vergrößerungen $\Gamma' = 4$, weil bei ihr der Astigmatismus, die Bildfeldwölbung, die Verzeichnung und der Farbfehler

des Hauptstrahls korrigiert sind (Abb. 6.11b). Bei höheren Vergrößerungen müssen auch der Öffnungsfehler korrigiert und die Sinusbedingung erfüllt sein (aplanatische Lupe, $\Gamma' = 6 \cdots 15$, Abb. 6.11c). Schließlich lassen sich mit erhöhtem Aufwand für stärkere Vergrößerungen anastigmatische Lupen berechnen, bei denen alle Abbildungsfehler ausreichend korrigiert sind (Abb. 6.11d).

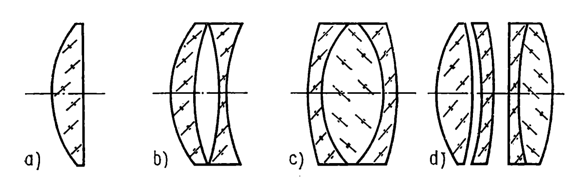


Abb. 6.11
a) Plankonvexlinse als Lupe,
b) Verantlupe,
c) Aplanatische Lupe,
d) Anastigmatische Lupe

6.2.2. Optikschema des zusammengesetzten Mikroskops

Das Optikschema des zusammengesetzten Mikroskops enthält das Objektiv und das Okular, so daß eine zweistufige Abbildung realisiert wird. Das Objektiv erzeugt das reelle Zwischenbild, das mit dem Okular wie mit einer Lupe betrachtet wird.

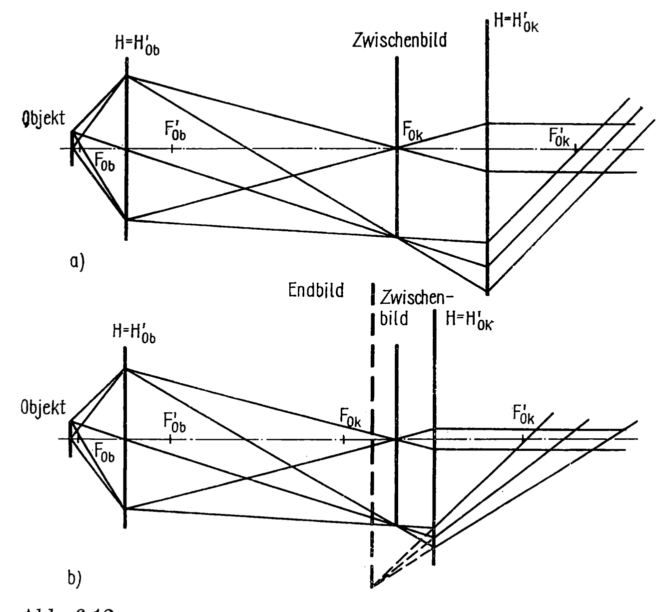


Abb. 6.12
Abbildung im zusammengesetzten Mikroskop
a) Bildweite unendlich, b) Bild in der deutlichen Sehweite

Im Normalfall befindet sich das Endbild im Unendlichen, das Okular wird mit der Normalvergrößerung benutzt. Abbildung 6.12a enthält für diesen Fall den Abbildungsstrahlengang. Das Endbild kann bis auf maximal $a_d = -250$ mm an

das Auge herangeführt werden, wobei die Vergrößerung geringfügig anwächst (Abb. 6.12b). Wir nennen die Vorteile des zusammengesetzten Mikroskops gegenüber dem einfachen Mikroskop.

1. Die zweistufige Abbildung ermöglicht eine kleine Gesamtbrennweite des Mikroskops bei größeren Einzelbrennweiten von Objektiv und Okular. Dadurch sind höhere Vergrößerungen zu erreichen. Aus

$$f' = -\frac{f'_{\mathrm{Ob}} f'_{\mathrm{Ok}}}{t} \tag{6.53}$$

folgt mit einer entsprechend großen optischen Tubuslänge t eine kleine Gesamtbrennweite.

Abbildung 6.13 zeigt ein Beispiel, bei dem $f'_{\mathrm{Ob}} = 4$ mm, $f'_{\mathrm{Ok}} = 20$ mm, $t = 160$ mm, $f' = -0{,}5$ mm, $\Gamma' = -500$ ist.

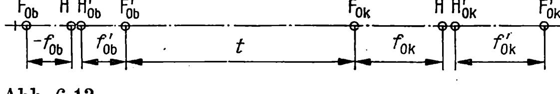


Abb. 6.13
Grundpunkte des Mikroskops

2. Zwei Forderungen sind mit dem optischen System des Mikroskops zu erfüllen:
- Das Objektfeld soll einen gegenüber der Gesamtbrennweite großen Durchmesser haben.
- Die numerische Apertur soll möglichst groß sein, damit das Auflösungsvermögen gewährleistet ist.

Mit einer einstufigen Abbildung sind beide Forderungen kaum zu realisieren, weil die Korrektion optischer Systeme für große Felder und große Öffnungen schwierig ist. Beim zusammengesetzten Mikroskop ist jedoch die Abbildung so auf Objektiv und Okular aufgeteilt, daß diese je eine der Forderungen erfüllen.

Das Objektiv bildet ein gegenüber seiner Brennweite kleines Objektfeld mit weit geöffneten Bündeln, also mit großer numerischer Apertur, ab. Bei einem Mikroobjektiv ist die Sinusbedingung erfüllt. Diese lautet mit $n' = 1$, $\beta' = y'/y$, $A = n \sin u$

$$\sin u' = \frac{A}{\beta'}. \tag{6.54}$$

Da im allgemeinen bei Mikroobjektiven mit größerem Abbildungsmaßstab auch eine größere numerische Apertur vorliegt, gilt für alle Objektive angenähert $u' = 1° \cdots 3°$. Für das Okular ist demnach die numerische Apertur sehr klein. Es bildet ein großes Objektfeld mit engen Bündeln ab.

3. Im allgemeinen ist es günstig, objektseitig telezentrischen Strahlengang vorzusehen. Die Öffnungsblende liegt dann in der bildseitigen Brennebene des Objektivs oder in einer dazu konjugierten Ebene.

Die optimale Verknüpfung der Strahlenbündel zwischen Mikroskop und Auge wird erreicht, wenn die Augenpupille am Ort der Austrittspupille des Gesamtsystems steht. Diese muß also dem Auge zugänglich sein. Das Okular hat deshalb unabhängig von seiner Vergrößerung die Aufgabe, die Öffnungsblende reell abzubilden und damit bildseitig konvergenten Hauptstrahlenverlauf zu verwirklichen (Abb. 6.14).

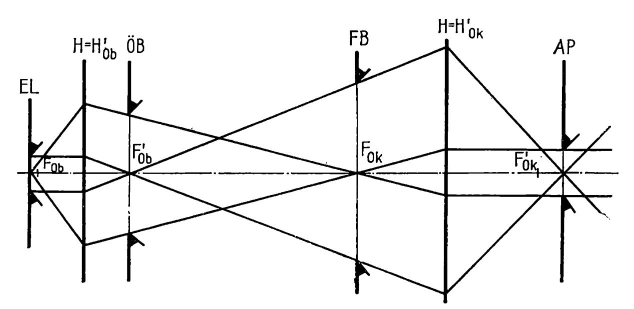


Abb. 6.14
Hauptstrahlenverlauf im zusammengesetzten Mikroskop

4. Gegenüber dem einfachen Mikroskop hat das zusammengesetzte Mikroskop die Vorteile eines größeren freien Arbeitsabstandes, einer größeren Entfernung Objekt—Auge und des einfachen Vergrößerungswechsels.

5. Betrachtet man das Objekt als eine beugende Struktur, die mit Parallelbündeln beleuchtet wird, dann erzeugt das Objektiv in seiner bildseitigen Brennebene ein Beugungsbild. In dieses lassen sich Eingriffe vornehmen, die zu verschiedenen Mikroskopierverfahren führen. Dieser Vorteil ist nur beim zusammengesetzten Mikroskop gegeben.

Abgleich. Der Mikroskoptubus ist ein Rohr zur Aufnahme des Objektivs, des Okulars, von Reflexionsprismen oder Spiegeln und weiterer Bauelemente, die die Strahlenbündel beeinflussen. Das Objektiv wird entweder direkt an das Tubus oder an einen Objektivrevolver angeschraubt. Das Okular wird in den Tubus eingesteckt.

Tabelle 6.5
Abgleichlängen beim Mikroskop

Hersteller	mechanische Tubuslänge	Abgleichlänge		Abstand Objekt—Zwischenbild	Anwendung
		Objektiv	Okular		
VEB Carl Zeiss JENA	160	45	13	192	Durchlicht
		45	13		Auflicht
		75	13		großer Arbeitsabstand
Opton	160	45	10	192	
		33	10	183	
Leitz	170	45	18	197	Durchlicht
		45	18		Auflicht
		37	18	189	Durchlicht

Objektiv und Okular werden „abgeglichen", d. h., ein Objektiv- und Okularwechsel erfordert keine Verstellung des Tubus. Dazu ist es notwendig, daß die Bildweite des Objektivs und die Objektweite des Okulars konstant bleiben. Die mechanische Tubuslänge ist bei den einzelnen Herstellern konstant. Tabelle 6.5 enthält einige Beispiele für die Abgleichlängen (Abb. 6.15).

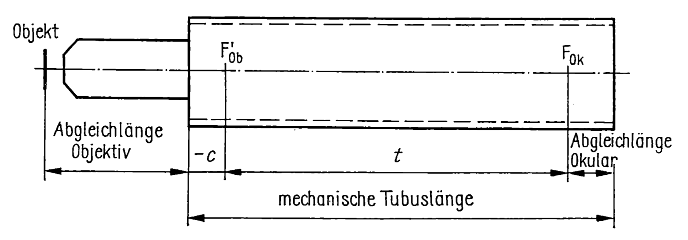


Abb. 6.15
Abgleichlängen am Mikroskoptubus

Folgende Gesichtspunkte bestimmen die Abgleichlängen:

— Tubuslänge. Der Abbildungsmaßstab des Objektivs wächst bei konstanter Objektivbrennweite mit der Tubuslänge. Andererseits darf das Mikroskop insgesamt nicht zu hoch werden.
— Objektiv. Die gesamte Objektivpalette unterschiedlicher Länge muß abgleichbar sein. Zu große Abgleichlängen bringen Probleme bei der Zentrierung mit sich.
— Okular. Starke Okulare haben eine kleine Brennweite, deshalb sollte die Abgleichlänge der Okulare möglichst klein sein.

Für die Entfernung vom Objekt bis zum Zwischenbild gilt:
Entfernung Objekt bis Zwischenbild = (mechanische Tubuslänge) + (Abgleichlänge Objektiv) — (Abgleichlänge Okular).
Für die optische Tubuslänge gilt (Abb. 6.15):
t/mm = (mech. Tubuslänge)/mm — (Abgleichlänge Okular)/mm + c/mm.
Bei schwachen Objektiven ist c klein; bei starken Objektiven ist $c \approx$ Abgleichlänge Okular.

6.2.3. Vergrößerung und Auflösungsvermögen

Vergrößerung. Wir legen ein Mikroskop zugrunde, bei dem die Bildweite unendlich ist. Nach Gl. (6.8) gilt für die Vergrößerung bei unendlicher Bildweite und bei der deutlichen Sehweite als Bezugsentfernung

$$\Gamma' = -\frac{a_d}{y} \tan w_s'.$$

In der Tab. 6.6 wird diese Beziehung auf die spezifischen Verhältnisse des zusammengesetzten Mikroskops angewendet (Abb. 6.16). Das Ergebnis lautet

$$\Gamma' = \beta'_{Ob} \Gamma'_{Ok} \tag{6.55}$$

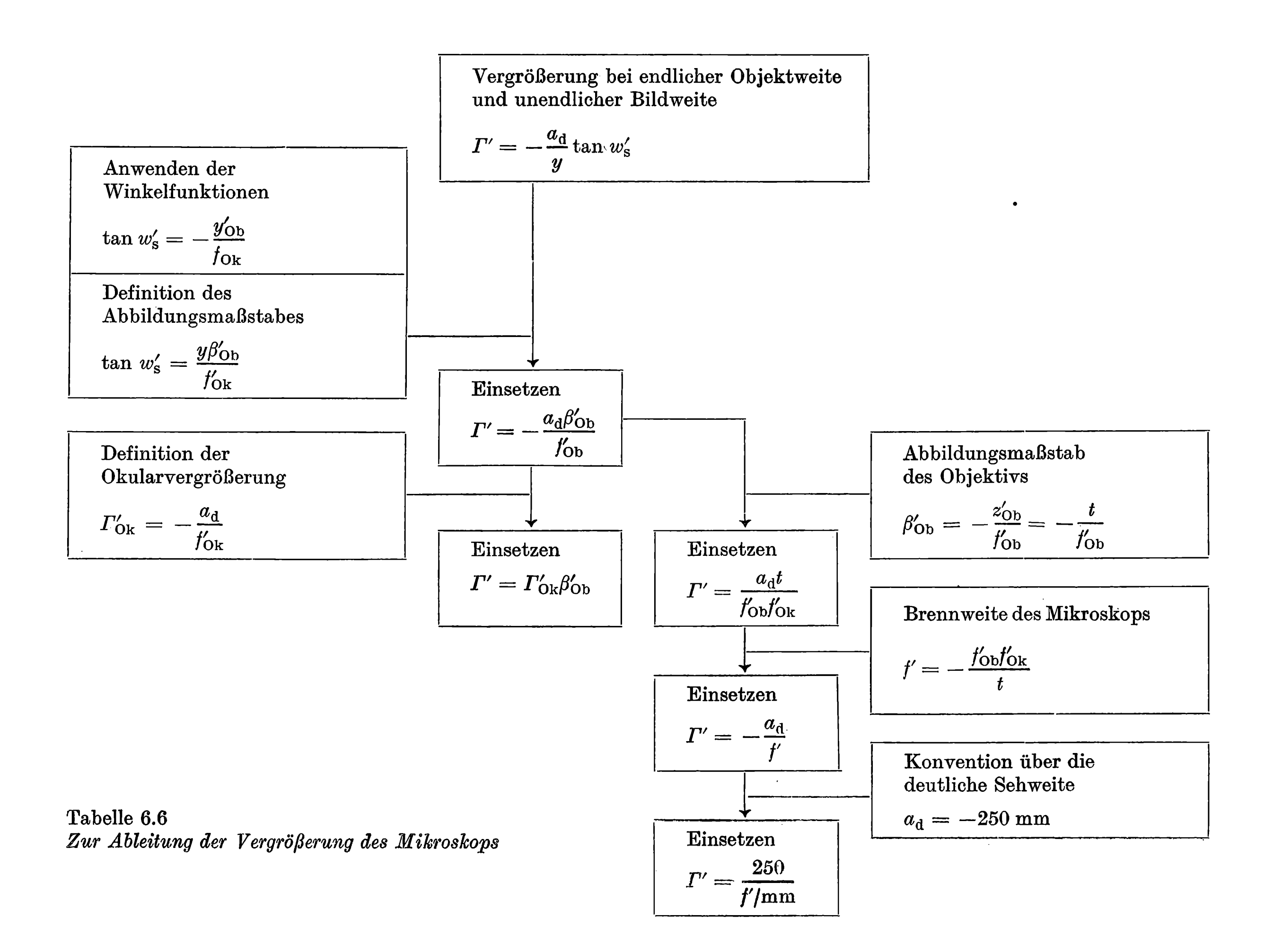


Tabelle 6.6
Zur Ableitung der Vergrößerung des Mikroskops

und

$$\Gamma' = \frac{250}{f'/\text{mm}}. \tag{6.56}$$

In Worten:

— Die Vergrößerung des Mikroskops ist das Produkt aus dem Abbildungsmaßstab des Objektivs und der Vergrößerung des Okulars.
— Die Vergrößerung des Mikroskops läßt sich mit der Formel für die Vergrößerung der Lupe berechnen, wenn in diese die Gesamtbrennweite des Mikroskops eingesetzt wird.

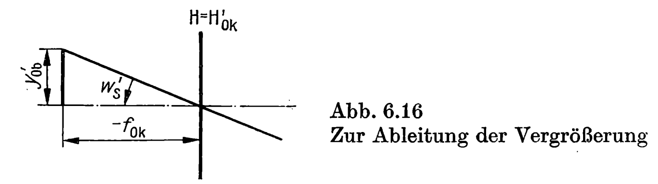


Abb. 6.16
Zur Ableitung der Vergrößerung

Objektive mit unendlicher Bildweite. In der Mikroskopie werden auch Objektive mit unendlicher Bildweite eingesetzt. Diese beruhen auf der Abbeschen Zerlegung der mikroskopischen Abbildung, die wir zunächst erläutern (Abb. 6.17a).

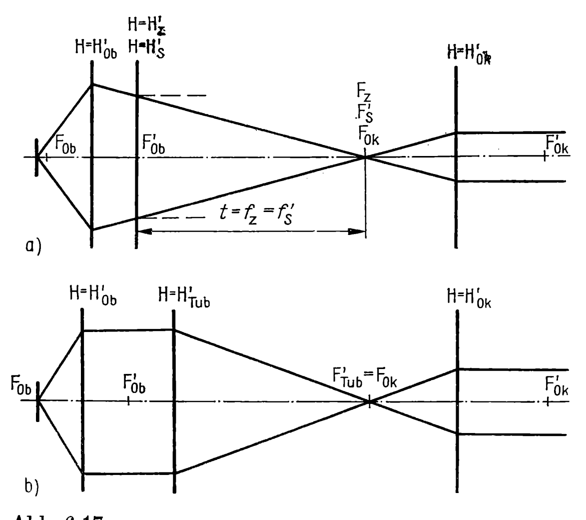


Abb. 6.17
a) Abbesche Zerlegung der mikroskopischen Abbildung,
b) Mikroskop mit Objektiv unendlicher Bildweite

Das Objektiv wird durch eine dünne Zerstreuungslinse ergänzt, die in der bildseitigen Brennebene steht und die das Zwischenbild ins Unendliche verlegt. Sie muß demnach die Brennweite $f'_z = -t$ haben. Objektiv und Zerstreuungslinse wirken

wie eine Lupe mit der Brennweite

$$f'_L = \frac{f'_{Ob} f'_z}{t} = f'_{Ob} \tag{6.57}$$

und der Vergrößerung

$$\Gamma'_L = -\frac{a_d}{f'_{Ob}}. \tag{6.58}$$

Die Wirkung der Zerstreuungslinse wird mittels einer dünnen Sammellinse der Brennweite $f'_s = t$ kompensiert, die ebenfalls in der bildseitigen Brennebene des Objektivs steht.

Sammellinse und Okular stellen ein astronomisches Fernrohr mit der Vergrößerung

$$\Gamma'_F = -\frac{f'_s}{f'_{Ok}} = -\frac{t}{f'_{Ok}} \tag{6.59}$$

dar. Die Mikroskopvergrößerung läßt sich in der Form

$$\Gamma' = \Gamma'_L \Gamma'_F \tag{6.60}$$

darstellen.

Die Abbesche Zerlegung wird bei der Fernrohrlupe genutzt. Diese Kombination aus Lupe und Fernrohr hat den Vorteil eines großen Arbeitsabstandes.

Die Objektive mit unendlicher Bildweite wirken wie die Kombination aus Objektiv mit endlicher Bildweite und Zerstreuungslinse. Es ist nur noch die Sammellinse hinzuzusetzen. Die Sammellinse wird Tubuslinse genannt. Diese stellt aber in Wirklichkeit ein hinsichtlich Farblängsfehler korrigiertes optisches System dar (Abb. 6.17b).

Die Gesamtvergrößerung beträgt

$$\Gamma' = -\frac{\Gamma'_{Ob} f'_{Tub}}{f'_{Ok}} \tag{6.61}$$

oder mit $f'_{Ok} = 250/\Gamma'_{Ok}$

$$\Gamma' = -\frac{\Gamma'_{Ob} \Gamma'_{Ok} f'_{Tub}/\text{mm}}{250}. \tag{6.62}$$

Die Brennweiten der Tubuslinsen sind so abgestuft, daß man ein einfaches Verhältnis zu 250 mm erhält.

Vorteile der Objektive mit unendlicher Bildweite sind:

- Es ist keine feste Tubuslänge notwendig;
- Planplatten, Filter, Polarisationsfilter auf der Bildseite des Objektivs, wie sie z. B. in Polarisationsmikroskopen vorkommen, führen keinen Astigmatismus ein.

Tabelle 6.7
Zur Berechnung des Austrittspupillen-Durchmessers

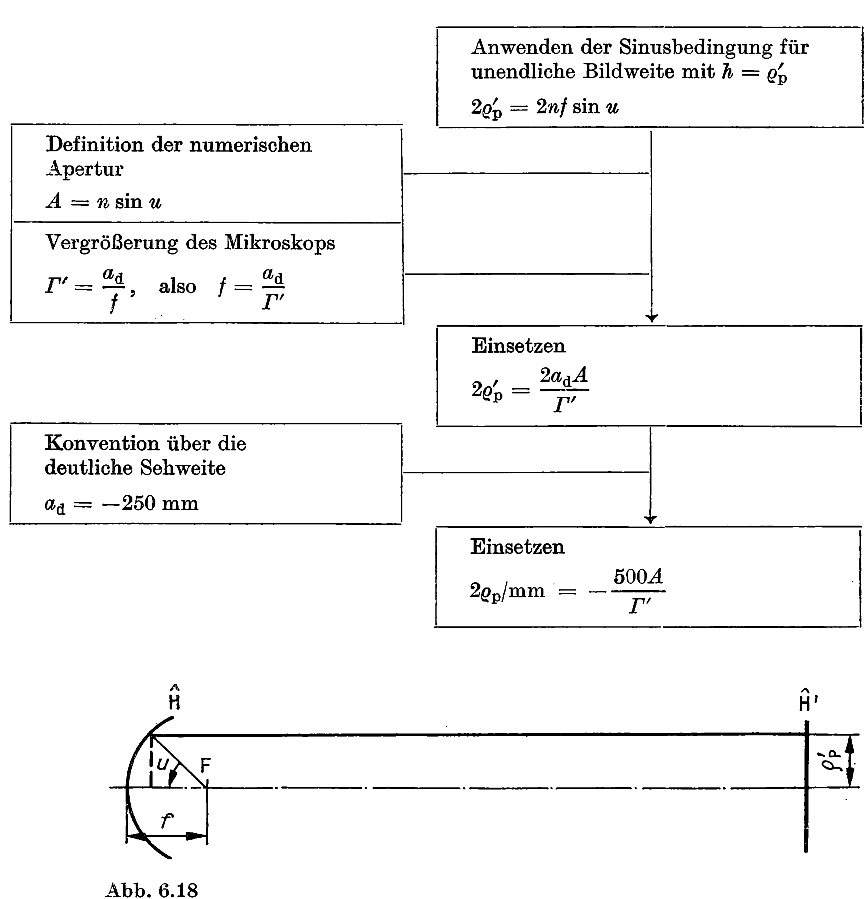


Abb. 6.18
Zur Ableitung des Austrittspupillen-Durchmessers

Normalvergrößerung. Der Austrittspupillen-Durchmesser des Mikroskops hängt von der Vergrößerung ab. In der Tab. 6.7 (Abb. 6.18) wird abgeleitet, daß

$$2\varrho'_p/\text{mm} = -\frac{500A}{\Gamma'} \tag{6.63}$$

ist. Bei dem Austrittspupillen-Durchmesser $2\varrho'_p = 1$ mm spricht man von der Normalvergrößerung des Mikroskops. Diese beträgt also

$$\Gamma'_N = -500A. \tag{6.64}$$

Auflösungsvermögen. Nach Gl. (4.281) hat die erste Nullstelle der Beugungsfigur, die sich bei der Abbildung eines Punktes ergibt, in der Bildebene den Radius

$$r' = 0{,}61 \frac{\lambda p'}{\varrho'_{\mathrm{p}}}. \tag{6.65}$$

Vorausgesetzt ist eine kreisförmige Öffnungsblende.

Zwei inkohärent zueinander strahlende Objektpunkte gelten als auflösbar, wenn die erste Nullstelle der einen Beugungsfigur mit dem Hauptmaximum der anderen Beugungsfigur höchstens zusammenfällt. In der Mitte zwischen den beiden Maxima ist dann die Intensität um 37% geringer als in den Maxima. Der Kontrast beträgt 0,16. Die Gl. (6.65) gibt also zugleich den auflösbaren Abstand zweier Punktbilder in der Zwischenbildebene des Mikroskops an.

Da der bildseitige Öffnungswinkel u' des Mikroobjektivs klein ist, gilt

$$\tan u' \approx \sin u' \approx \frac{\varrho'_{\mathrm{p}}}{p'} \tag{6.66}$$

und

$$r' = 0{,}61 \frac{\lambda}{\sin u'}. \tag{6.67}$$

Die Sinusbedingung

$$nr \sin u = n'r' \sin u' \tag{6.68}$$

ergibt mit $n' = 1$, $n \sin u = A$

$$r' = \frac{Ar}{\sin u'}. \tag{6.69}$$

Der in der Objektebene auflösbare Abstand beträgt nach Gl. (6.67) und Gl. (6.69)

$$r = 0{,}61 \frac{\lambda}{A}. \tag{6.70}$$

Inkohärent strahlende Objektpunkte liegen vor, wenn das Objekt selbst leuchtet oder mit großer Apertur beleuchtet wird. (Bei selbstleuchtenden Objekten wird das Licht nur an der Öffnungsblende des Mikroobjektivs gebeugt. Bei beleuchteten Objekten tritt zusätzlich Beugung am Objekt auf.) Man bezeichnet das Verhältnis aus der Beleuchtungsapertur A_{K} und der numerischen Apertur des Mikroobjektivs A als Kohärenzparameter

$$m = \frac{A_{\mathrm{K}}}{A}. \tag{6.71}$$

Kohärente Beleuchtung ist durch $m = 0$, inkohärente Beleuchtung durch $m \to \infty$ gekennzeichnet. Für $0 < m < \infty$ liegt partiell-kohärente Beleuchtung vor. Allerdings ist Licht mit $m = 1$ bereits weitgehend inkohärent.

Für partiell-kohärente Beleuchtung geht Gl. (6.70) über in

$$r = r_0 \frac{\lambda}{A}. \tag{6.72}$$

Der Faktor r_0 ist in Abb. 6.19 als Funktion von m dargestellt. Das Auflösungsvermögen beleuchteter Objekte hängt nicht nur vom Kohärenzparameter, sondern auch von der Objektform und der Beleuchtungsart ab. So ist z. B. für ein Liniengitter $r_0 = 1$, wenn kohärente Beleuchtung mit achsparallelem Licht angewendet wird; $r_0 = 0{,}5$ für kohärente Beleuchtung mit einem schrägen Parallelbündel.

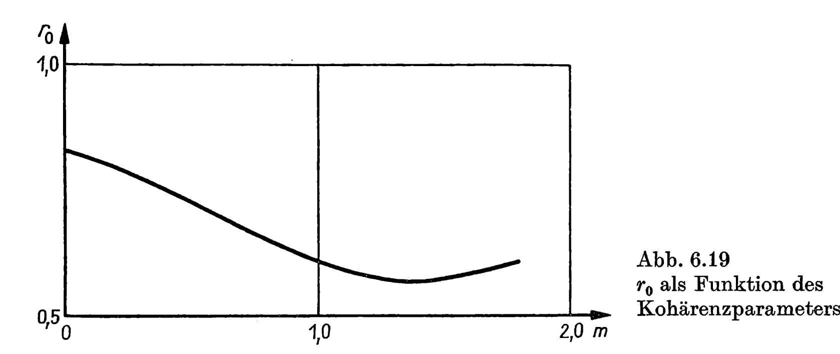


Abb. 6.19
r_0 als Funktion des Kohärenzparameters

Nützliche Vergrößerung. Bisher haben wir nur die Eigenschaft des Auges berücksichtigt, zur Auflösung zweier Intensitätsverteilungen einen Mindestkontrast zu benötigen. Die daraus resultierende auflösbare Strecke muß aber wegen des Auflösungsvermögens des Auges außerdem einen winkelmäßigen Mindestabstand haben. Beim Mikroskop ist das insofern deutlich, als ja die in der Zwischenbildebene entstehende Beugungsfigur durch das Okular wie mit einer Lupe betrachtet wird. Dadurch muß der Abstand r' auch vom Auge aufgelöst werden.

In der Tab. 6.8 wird abgeleitet, wie hoch die Mikroskopvergrößerung sein muß, damit die auflösbare Strecke mit der scheinbaren Größe tan w'_s wahrgenommen wird. Es ergibt sich

$$\Gamma'_0 = \frac{250A \tan w'_s}{r_0 \lambda/\text{mm}}. \tag{6.73}$$

Tabelle 6.9 enthält für einige Werte von r_0 und w'_s die Größen $2\varrho'_p$ und $-\Gamma'_0/A$ bei $\lambda = 500$ nm.

Man bezeichnet den Bereich, in dem das Auflösungsvermögen des Objektivs und das des Auges günstig angepaßt sind, als Bereich der nützlichen Vergrößerung. Für dieses gilt etwa

$$500A \leqq |\Gamma'| \leqq 1000A, \qquad 1\,\text{mm} \geqq 2\varrho'_p \geqq 0{,}5\,\text{mm}. \tag{6.74a, b}$$

Die untere Grenze wird entsprechend Gl. (6.74) als Normalvergrößerung

$$\Gamma'_N = -500A, \quad 2\varrho'_p = 1\,\text{mm}, \tag{6.75}$$

Tabelle 6.8
Zur Ableitung der förderlichen Vergrößerung

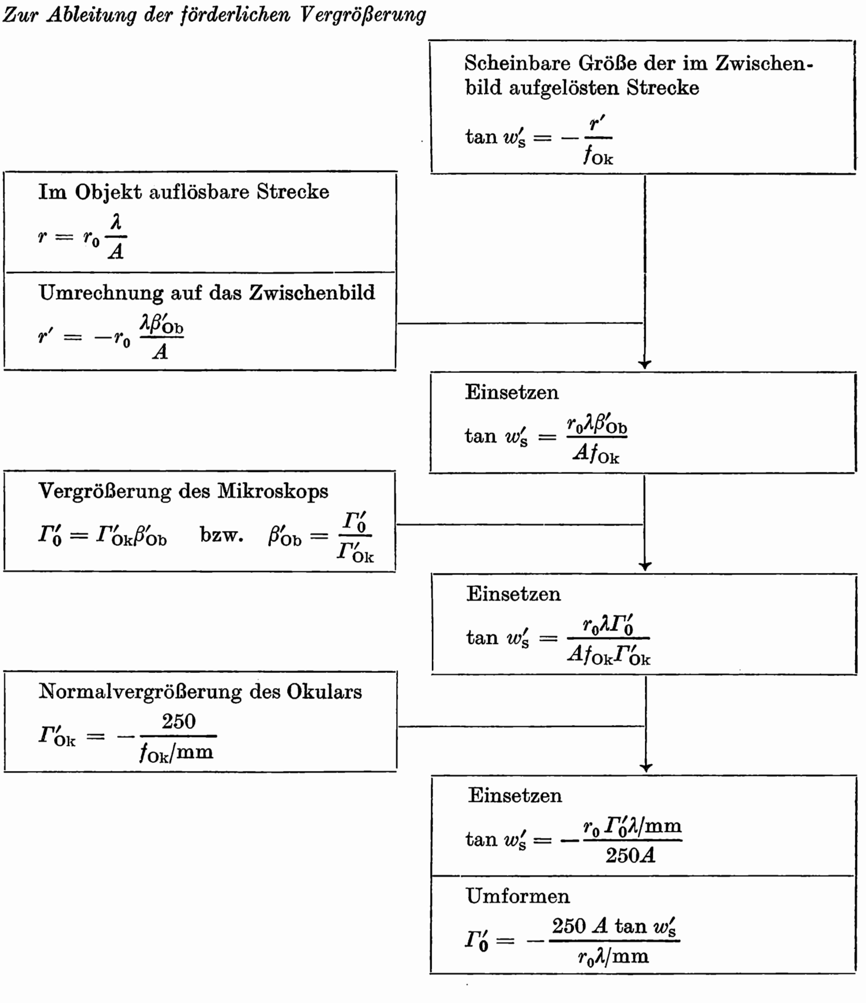


Tabelle 6.9
Werte für $2\varrho_p'$ und $-\Gamma_0'/A$ für das Mikroskop

$w_s' \downarrow$ / $r_0 \rightarrow$	0,50		0,61		1,00	
	$-\frac{\Gamma_0'}{A}$	$2\varrho_p'$/mm	$-\frac{\Gamma_0'}{A}$	$2\varrho_p'$/mm	$-\frac{\Gamma_0'}{A}$	$2\varrho_p'$/mm
1′	290	1,72	238	2,10	145	3,44
2′	580	0,86	475	1,05	290	1,72
4′	1160	0,43	951	0,53	580	0,86

die obere Grenze als förderliche Vergrößerung

$$\Gamma_f' = -1000A, \quad 2\varrho_p' = 0{,}5\,\text{mm} \tag{6.76}$$

bezeichnet.

Die numerische Apertur der Mikroobjektive ist bei etwa 1,7 begrenzt, so daß die förderliche Vergrößerung maximal $|\Gamma_f'| = 1700$ beträgt.

Höhere Vergrößerungen als $|\Gamma'| \approx 2000$ sind also nicht sinnvoll. In Meßmikroskopen, in denen es auf die Noniussehschärfe ankommt, ist die auflösbare Versetzung von Teilstrichen etwa 1/6 derjenigen für punktförmige Objekte. Deshalb ist bei dieser speziellen Anwendung ein höherer Betrag der Vergrößerung als 2000 noch vertretbar.

6.2.4. Schärfentiefe

Die Schärfentiefe des Mikroskops ergibt sich aus dem begrenzten Auflösungsvermögen des Auges und aus der beugungsbedingten axialen Verbreiterung der Intensitätsverteilung in der Umgebung der Zwischenbildebene (vgl. Abschnitt 4.2.4. und 4.4.2.). Durch Akkommodation des Auges ist eine Erhöhung der Schärfentiefe möglich.

Geometrisch-optische Schärfentiefe. Das begrenzte Auflösungsvermögen des Auges bringt es mit sich, daß ein geometrisch-optisch entstehender Zerstreuungskreis als Punkt wahrgenommen wird. Abbildung 6.20 zeigt die im Zwischenbildraum

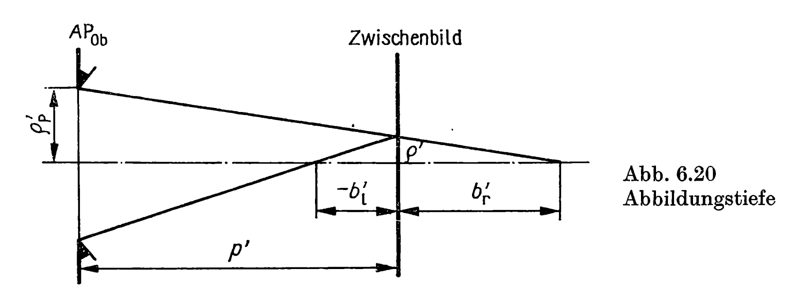


Abb. 6.20
Abbildungstiefe

vorhandenen Abbildungstiefenbereiche, die dem zulässigen Zerstreuungskreisdurchmesser zugeordnet sind. Es gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{\varrho_p'}{\varrho'} = \frac{p' + b_l'}{-b_l'}, \quad \frac{\varrho_p'}{\varrho'} = \frac{p' + b_r'}{b_r'}. \tag{6.77a, b}$$

Wegen $p' \gg b_l', b_r'$ folgt daraus

$$b_l' = -\frac{p'}{\varrho_p'}\varrho', \quad b_r' = \frac{p'}{\varrho_p'}\varrho' \tag{6.78a, b}$$

oder mit Gl.(6.66)

$$b_l' = -\frac{\varrho'}{\sin u'}, \quad b_r' = \frac{\varrho'}{\sin u'}. \tag{6.79a, b}$$

Anwenden der Sinusbedingung ergibt

$$b'_l = -\frac{\varrho' \, |\beta'|}{A}, \quad b'_r = \frac{\varrho' \, |\beta'|}{A}. \tag{6.80a, b}$$

Die Abbildungstiefe kann mit der Beziehung für den Tiefenmaßstab in die Schärfentiefe umgerechnet werden:

$$b'_r = -b'_l = \alpha' b_r. \tag{6.81}$$

Es ist $\alpha' = (n'\beta'^2)/n$, also mit $n' = 1$

$$b_r = -b_l = \frac{n\varrho'}{A \, |\beta'|}. \tag{6.82}$$

Der Durchmesser $2\varrho'$ des Zerstreuungskreises in der Zwischenbildebene erscheint bei der Betrachtung mit dem Okular, das mit der Normalvergrößerung benutzt wird, unter dem Sehwinkel

$$w'_s \approx \tan w'_s = \frac{2\varrho'}{f'_{Ok}}. \tag{6.83}$$

Damit gilt

$$b_r = -b_l = \frac{n w'_s f'_{Ok}}{2A \, |\beta'|}. \tag{6.84}$$

Mit

$$f'_{Ok}/\text{mm} = \frac{250}{\Gamma'_{Ok}} \quad \text{und} \quad |\beta'| \, \Gamma'_{Ok} = |\Gamma'|$$

erhalten wir

$$b_r/\text{mm} = -b_l/\text{mm} = \frac{125 n w'_s}{A \, |\Gamma'|}. \tag{6.85}$$

Gesamte Schärfentiefe. Nach Gl. (4.303) folgt die wellenoptische Schärfentiefe des Mikroskops aus

$$b_r = -b_l = \frac{n\lambda}{2A^2}. \tag{6.86}$$

Die gesamte Schärfentiefe beträgt also

$$b_r/\text{mm} = -b_l/\text{mm} = \frac{125 n w'_s}{A \, |\Gamma'|} + \frac{n\lambda/\text{mm}}{2A^2}. \tag{6.87}$$

So ist z. B. für $w'_s = 4' \mathrel{\hat{=}} 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ rad und $\lambda = 500$ nm $= 0{,}5$ µm

$$\frac{b_r/\mu\text{m}}{n} = \frac{150}{A \, |\Gamma'|} + \frac{0{,}25}{A^2}. \tag{6.88}$$

Bei der Normalvergrößerung $|\Gamma'_N| = 500A$ geht daraus

$$\frac{b_r/\mu\text{m}}{n} = \frac{0{,}55}{A^2} \tag{6.89}$$

hervor.

Der wellenoptische Anteil von b_r/n als Funktion der numerischen Apertur für $\lambda = 300$ nm, 500 nm und 700 nm ist in der Abb. 6.21 grafisch dargestellt.

Der geometrisch-optische Anteil, der von der Vergrößerung abhängt, ist in der Abb. 6.22 für $w_s' = 2'$ zum wellenoptischen Anteil für $\lambda = 500$ nm addiert worden.

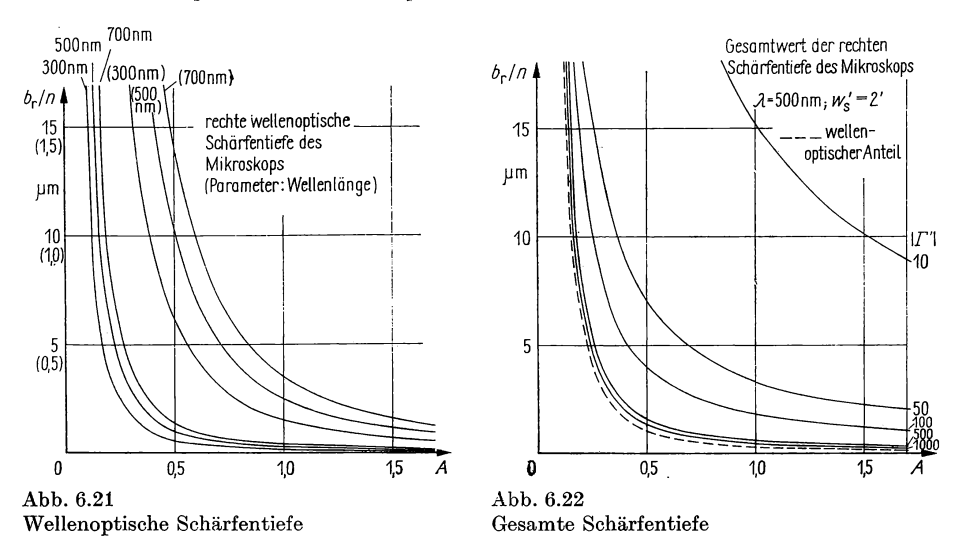


Abb. 6.21
Wellenoptische Schärfentiefe

Abb. 6.22
Gesamte Schärfentiefe

Zur Abschätzung der rechten Schärfentiefe bei einer anderen Wellenlänge ist der Unterschied zum Wert für $\lambda = 500$ nm der Abb. 6.21 zu entnehmen und zum Gesamtwert nach Abb. 6.22 zu addieren bzw. davon zu subtrahieren.

Bei der Annahme eines anderen zulässigen Sehwinkels $\overline{w_s'}$ für den Zerstreuungskreisdurchmesser ist in der Abb. 6.22 der Unterschied zwischen der gestrichelten Kurve (wellenoptischer Anteil) und der ausgezogenen Kurve im Verhältnis $\overline{w_s'}/2'$ zu verändern.

6.2.5. Beleuchtung

Allgemeines. Im zusammengesetzten Mikroskop ist im allgemeinen die Beleuchtung des Objektes mit optischen Hilfsmitteln erforderlich. Bei schwachen Vergrößerungen kann es ausreichend sein, das Himmelslicht oder das Licht einer Leuchte über einen Spiegel in den Abbildungsstrahlengang zu lenken. Bei stärkeren Vergrößerungen sind jedoch besondere Beleuchtungssysteme mit optimaler Koppelung an den Abbildungsstrahlengang notwendig. Damit sind auch spezielle Mikroskopierverfahren anwendbar, die auf Eingriffen in das abbildende Bündel beruhen.

Grundsätzlich sind zunächst die Hellfeld- und die Dunkelfeldbeleuchtung zu unterscheiden. Bei Hellfeldbeleuchtung erscheint das objektfreie Feld hell ausgeleuchtet. Das Objekt verändert die Leuchtdichteverteilung im Feld. Bei Dunkelfeldbeleuchtung ist das objektfreie Feld dunkel. Das am Objekt gebeugte und gestreute Licht hellt das Bildfeld entsprechend der Objektstruktur auf.

Durchsichtige Objekte werden im allgemeinen durchstrahlt, sie werden mit Hellfeldbeleuchtung abgebildet. Für undurchsichtige Objekte ist die Auflichtbeleuchtung anzuwenden, bei der das am Objekt regulär oder diffus reflektierte sowie das gebeugte Licht abbildet. Abbildung 6.23 stellt die Beleuchtungsarten gegenüber, indem die Lage der Beleuchtungsapertur zum Objekt angegeben wird. Das Objekt kann auch schräg beleuchtet werden. Die Einfallsrichtung des Lichtes stellt das Azimut der Beleuchtung dar (Abb. 6.24). Schräge Beleuchtung führt leicht zu einer ungleichmäßigen Ausleuchtung des Objektfeldes, die als Azimuteffekt bezeichnet wird.

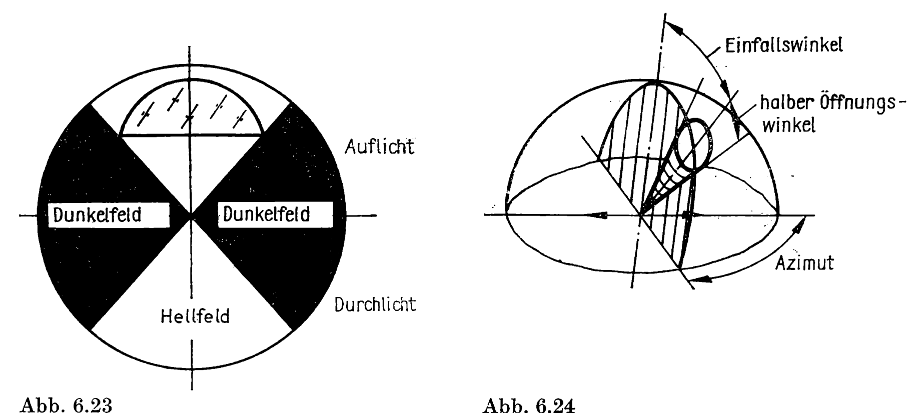


Abb. 6.23
Beleuchtungsarten

Abb. 6.24
Azimut der Beleuchtung

Nach Gl. (4.229) beträgt die Beleuchtungsstärke in der Objektebene

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}q} = \pi \Omega_0 L A'^2, \tag{6.90}$$

wobei L die Leuchtdichte der Quelle und A' die Beleuchtungsapertur ist.

Für die Helligkeit des Netzhautbildes ist die Lichtstärke in der Austrittspupille des Mikroskops entscheidend. Dafür gilt bei erfüllter Sinusbedingung der Gesamtabbildung (τ = Transmissionsfaktor des optischen Systems)

$$I' = \tau L \cdot (\text{Fläche der AP}),$$

also

$$I' = \frac{1}{4} \pi \tau L (2\varrho'_{\mathrm{p}})^2, \quad [I'] = \mathrm{cd} = \mathrm{sb} \cdot \mathrm{cm}^2 \tag{6.91}$$

oder mit Gl. (6.63) (Umrechnung von $2\varrho'_{\mathrm{p}}/\mathrm{mm}$ auf $2\varrho'_{\mathrm{p}}/\mathrm{cm}$ notwendig!)

$$I' = \frac{1}{4} \pi \tau L \left(\frac{50A}{\Gamma'}\right)^2. \tag{6.92}$$

Daraus folgt

$$I'/\mathrm{cd} = \frac{625 \pi \tau L/\mathrm{sb} \cdot A^2}{\Gamma'^2}. \tag{6.93}$$

Beleuchtung über Spiegel. Auch bei Mikroskopen ohne eingebautes Beleuchtungssystem ist es notwendig, das Licht über Spiegel umzulenken, weil der Tubus meistens senkrecht oder schräg steht.

Ein ebener Spiegel lenkt das Licht nur ab. Bei künstlichen Lichtquellen hat er keinen Einfluß auf die Bündelbegrenzung. Bei der Mikroskopie mit Himmelslicht wirkt die Spiegelfassung als Eintrittspupille.

Ein Hohlspiegel vergrößert die Lichtquelle. Er kann als Eintrittspupille wirken. Mit dem Hohlspiegel ist bei relativ kleiner Lichtquelle eine relativ große Beleuchtungsapertur möglich (Abb. 6.25).

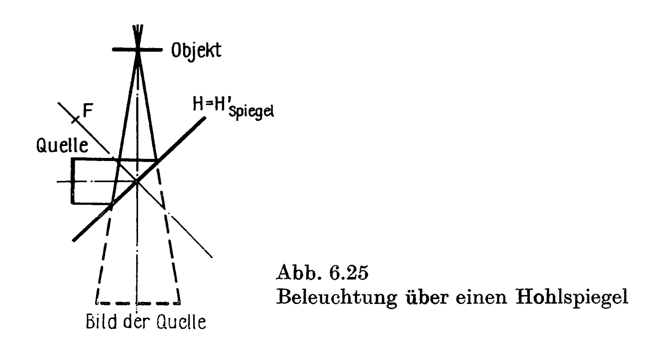


Abb. 6.25
Beleuchtung über einen Hohlspiegel

Köhlersche Beleuchtung. Die 1893 von KÖHLER erfundene Mikroskopbeleuchtung erfüllt alle Forderungen, die an das Beleuchtungssystem des Mikroskops zu stellen sind. Wir formulieren zunächst die Forderungen:

— Die maximal auszuleuchtende Apertur ist von der größten Abbildungsapertur abhängig. Es gilt

$$A_{\text{Bel}} \leqq A_{\text{Abb.}}, \tag{6.94a}$$

wobei oftmals

$$A_{\text{Bel}} \approx 0{,}75 A_{\text{Abb.}} \tag{6.94b}$$

angesetzt wird. Die Beleuchtungsapertur muß mit nicht zu großen Lichtquellen erreicht werden, weil sonst keine ausreichenden Leuchtdichten möglich sind.

— Das Objekt soll gleichmäßig ausgeleuchtet sein. Das ist gewährleistet, wenn die Beleuchtungsapertur für sämtliche Punkte des Objektfeldes gleich ist.

— Die Beleuchtungsapertur muß an die Abbildungsapertur angepaßt werden können. Dazu ist die Aperturblende einstellbar zu gestalten.

— Die Größe des beleuchteten Feldes ist auf das abzubildende Objektdetail zu beschränken, weil sonst unnötiges Streulicht auftritt.

Das Köhlersche Beleuchtungssystem erfüllt sämtliche Forderungen mit einer Anordnung aus zwei sammelnden optischen Systemen, dem Kollektor und dem Konden-

sor sowie den entsprechenden Blenden. Die Wirkung der einzelnen Elemente entwickeln wir schrittweise.

Der Kondensor ist ein sammelndes optisches System, mit dem die Lichtquelle oder ein davon erzeugtes Bild so vergrößert wird, daß die Beleuchtungsapertur erhöht wird (Abb. 6.26a). Wir können diesen Sachverhalt auch so deuten, daß durch den Kondensor mit kleinerer Lichtquelle die gleiche Apertur ausgeleuchtet wird (Abb. 6.26b). Es wird bereits hier deutlich, daß die Größe des beleuchteten Objektfeldes von der Lichtquellengröße abhängt. Mit dem Kondensor läßt sich also die erste Forderung an die Mikroskopbeleuchtung erfüllen.

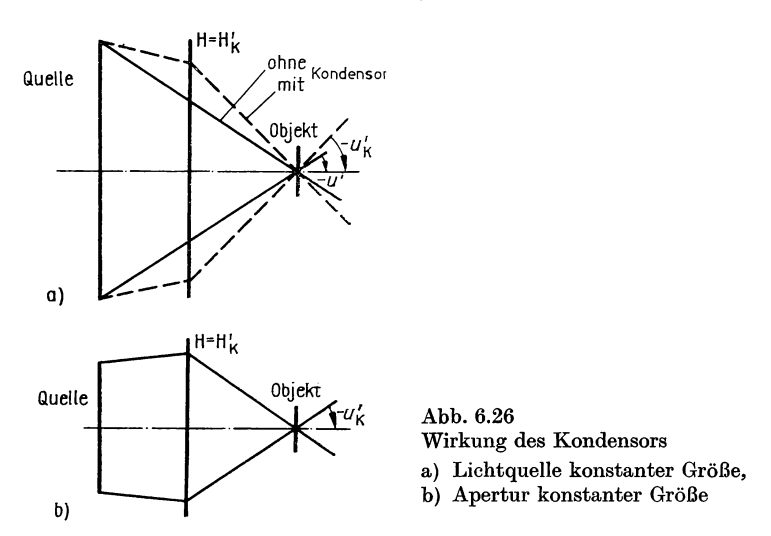


Abb. 6.26
Wirkung des Kondensors
a) Lichtquelle konstanter Größe,
b) Apertur konstanter Größe

Auch die zweite Forderung ist mit dem Kondensor zu verwirklichen. Dazu muß die Lichtquelle in der objektseitigen Brennebene des Kondensors stehen. Wir erhalten bildseitig des Kondensors telezentrischen Strahlenverlauf und damit die gleiche Beleuchtungsapertur für alle Punkte des Objektfeldes (Abb. 6.27).

Der Kollektor. Die Lichtquelle kann oftmals nicht in der objektseitigen Brennebene des Kondensors angeordnet werden. Einerseits ist die Brennebene nicht immer zugänglich, andererseits könnte sich der Kondensor unzulässig erwärmen. Die Kondensorwirkung bleibt jedoch vollständig erhalten, wenn die Lichtquelle in die objektseitige Brennebene des Kondensors abgebildet wird. Diese Aufgabe übernimmt der Kollektor, der ebenfalls ein sammelndes optisches System darstellt (Abb. 6.28). In der Kondensorbrennebene ist dadurch der Einsatz einer Irisblende möglich, die als Aperturblende wirkt und mit der die 3. Forderung an die Mikroskopbeleuchtung realisiert wird (einstellbare Beleuchtungsapertur).

Die Leuchtfeldblende vervollständigt das Köhlersche Beleuchtungssystem. Sie steht dicht hinter dem Kollektor und wird vom Kondensor in die Objektebene abgebildet. Durch das Einstellen der Irisblende wird der Durchmesser des beleuchteten

Feldes festgelegt und damit noch die 4. Forderung erfüllt (Abb. 6.29). Der Kollektor und die Leuchtfeldblende sind entweder im Mikroskop oder in der Mikroskopierleuchte eingebaut.

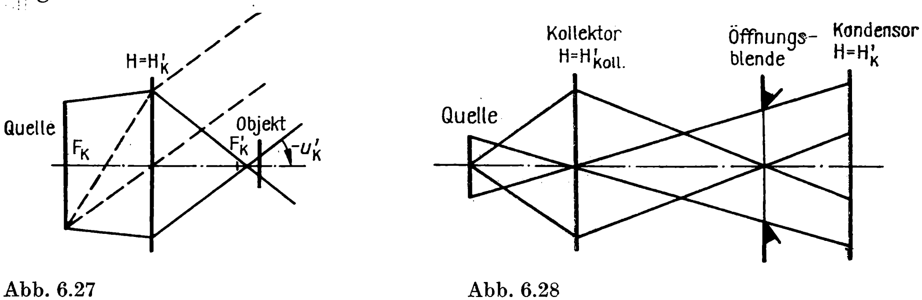


Abb. 6.27
Lichtquelle in der Brennebene des Kondensors

Abb. 6.28
Kollektor

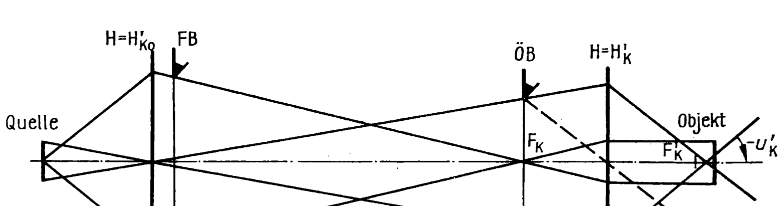


Abb. 6.29
Vollständiges Köhlersches Beleuchtungssystem

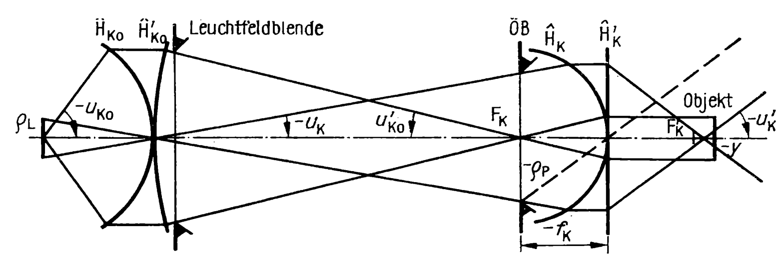


Abb. 6.30
Zur Ableitung des Strahlenflusses

Strahlenfluß. Die Sinusbedingung für die Abbildung der Lichtquelle durch den Kollektor lautet

$$\varrho_{\mathrm{L}} A_{\mathrm{Ko}} = \varrho_{\mathrm{p}} A'_{\mathrm{Ko}}. \tag{6.95}$$

Nach Abb. 6.30 ist angenähert

$$A'_{\mathrm{Ko}} = -\frac{y}{f'_{\mathrm{K}}} \quad \text{und} \quad A'_{\mathrm{K}} = \frac{\varrho_{\mathrm{p}}}{f'_{\mathrm{K}}}, \tag{6.96a, b}$$

also

$$A'_{\mathrm{Ko}} = -\frac{yA'_{\mathrm{K}}}{\varrho_{\mathrm{P}}} = \frac{|y|\,A'_{\mathrm{K}}}{\varrho_{\mathrm{P}}} \quad (\varrho_{\mathrm{L}} \text{ immer positiv gerechnet}). \tag{6.97}$$

Einsetzen von Gl. (6.97) in Gl. (6.95) ergibt

$$\varrho_{\mathrm{L}} A_{\mathrm{Ko}} = |y|\, A'_{\mathrm{K}}. \tag{6.98}$$

Die Größe

$$2\varrho_{\mathrm{L}} A_{\mathrm{Ko}}$$

ist der Strahlenfluß der Beleuchtung. Je nach der Vergrößerung ist ein Strahlenfluß 0,1 bis 0,8 erforderlich. Es ist ersichtlich:

Bei konstantem Strahlenfluß erfordert eine kleinere Lichtquelle eine größere Kollektorapertur (z. B. bei Strahlenfluß $= 0{,}8$, $2\varrho_{\mathrm{L}} = 5$ mm, $A_{\mathrm{Ko}} = 0{,}16$); hängt das ausleuchtbare Objektfeld von der Kondensorapertur ab.

Folgerungen aus dem Strahlenfluß. Die bildseitige Apertur des Kondensors muß an die Abbildungsapertur angepaßt werden. Im theoretischen Grenzfall sollten beide numerischen Aperturen gleich sein. Bei Immersionsobjektiven werden Aperturen von $A_{\mathrm{Ob}} = 1{,}66$ erreicht. Soll in diesem Fall die volle Auflösung erzielt werden, dann ist auch bildseitig des Kondensors Ölimmersion zu verwenden. Im allgemeinen genügt es jedoch, für die Kondensorapertur

$$A'_{\mathrm{K}} \approx 0{,}75 A_{\mathrm{Ob}}$$

anzusetzen. Durch Licht, das am Objekt gebeugt und gestreut wird, ist trotzdem die volle Objektapertur teilweise ausgenutzt. Außerdem deutet die Untersuchung der partiell-kohärenten Abbildung darauf hin, daß Kohärenzparameter

$$m = \frac{A'_{\mathrm{K}}}{A_{\mathrm{Ob}}} < 1$$

günstig sind. Um die Anwendung von Ölimmersionen zu vermeiden, wird oft die größte Kondensorapertur auf $A'_{\mathrm{K}} = 0{,}95$ festgelegt.

Objektive unterschiedlicher Apertur haben auch unterschiedliche Objektfelddurchmesser. Zur optimalen Ausnutzung der Lichtquelle müßte deshalb bei jedem Objektivwechsel auch der Kondensor gewechselt werden. Das ist jedoch zu aufwendig. Es wird die Beleuchtungsapertur mit der Aperturblende und das ausgeleuchtete Feld mit der Leuchtfeldblende eingestellt. Bei kleinen Objektfeldern ist die Apertur des Kollektors, bei großen Objektfeldern die Fläche der Lichtquelle nicht voll ausgenutzt. Sehr große Objektfelder, wie sie bei schwachen Objektiven ($|\beta'| < 10$) vorkommen, lassen sich auf diesem Wege mit einem Kondensor hoher Apertur nicht ausleuchten. Die freien Durchmesser des Kondensors und der Leuchtfeldblende sind aus mechanischen Gründen auf etwa 20 mm bis 30 mm begrenzt. Die Brennweite eines Kondensors hoher Apertur liegt deshalb bei $f'_{\mathrm{K}} \approx 10$ mm. Damit läßt sich auch bei maximal geöffneter Leuchtfeldblende nur ein relativ kleines Objektfeld

ausleuchten. Zur Behebung dieser Schwierigkeiten sind im wesentlichen folgende Wege üblich:

— Durch Abschrauben oder Ausschwenken einzelner Linsen wird die Brennweite des Kondensors vergrößert. Danach muß durch Verstellen des Kondensors das Bild der Leuchtfeldblende wieder in die Objektebene gebracht werden.
— Es wird eine Zusatzlinse oder ein Zusatzsystem vor den Kondensor geklappt. Die Leuchtfeldblende wird dadurch nicht mehr in die Objektebene abgebildet, so daß mit ihr das beleuchtete Feld nicht geregelt werden kann.
— Eine nahezu optimale Beleuchtung mit konstant bleibendem Produkt aus Kondensorapertur A'_K und beleuchtetem Objektfelddurchmesser $2y$ ermöglicht der pankratische Kondensor (Richter 1936). Abbildung 6.31 zeigt den prinzipiellen Aufbau. Die Aperturblende wird durch ein System mit veränderlicher Brennweite in die Brennebene des Kondensors abgebildet.

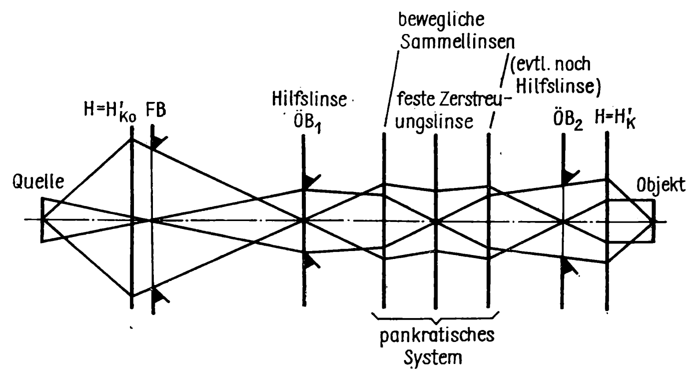


Abb. 6.31
Pankratischer Kondensor

Der Betrag des Abbildungsmaßstabes dieser Abbildung läßt sich stetig zwischen 1/3 und 3 ändern. Das entspricht einer Aperturänderung im Bereich $A'_K = 0{,}16$ bis 1,4. Die Leuchtfeldblende wird durch die erste Hilfslinse in die Zerstreuungslinse des pankratischen Systems, durch die zweite Hilfslinse und den Kondensor in die Objektebene abgebildet. Dabei bleibt das Produkt $2yA'_K$, also der Strahlenfluß, konstant. Die Hilfslinsen beeinflussen die Lichtquellenabbildung praktisch nicht, weil sie in der Nähe von Zwischenbildern stehen (Feldlinsen).

— Eine weitere Möglichkeit, durch Einklappen einer Zusatzlinse und einer Zusatzblende einen Kondensor für große Objektfelder brauchbar zu machen, hat Riesenberg angegeben (Patentschrift 58606, Kl. 42h, 3/02, Ausgabetag 5.11.67).

Auflichtbeleuchtung. Die Oberfläche eines undurchsichtigen Objektes muß mit Auflichtbeleuchtung betrachtet werden. Bei dieser wird das Beleuchtungssystem seitlich an den Tubus angebracht und durch das Objektiv hindurch beleuchtet. Das Objektiv wirkt dabei gleichzeitig als Kondensor.

Abbildungs- und Beleuchtungsstrahlengang können mit einer Planspiegelplatte (Abb. 6.32a), einem Teilungswürfel (Abb. 6.32b) oder einem Prisma (Abb. 6.32c), das den halben Bündeldurchmesser einnimmt, vereinigt werden. Vor- und Nachteile der drei Anordnungen sind in der Tab. 6.10 zusammengestellt.

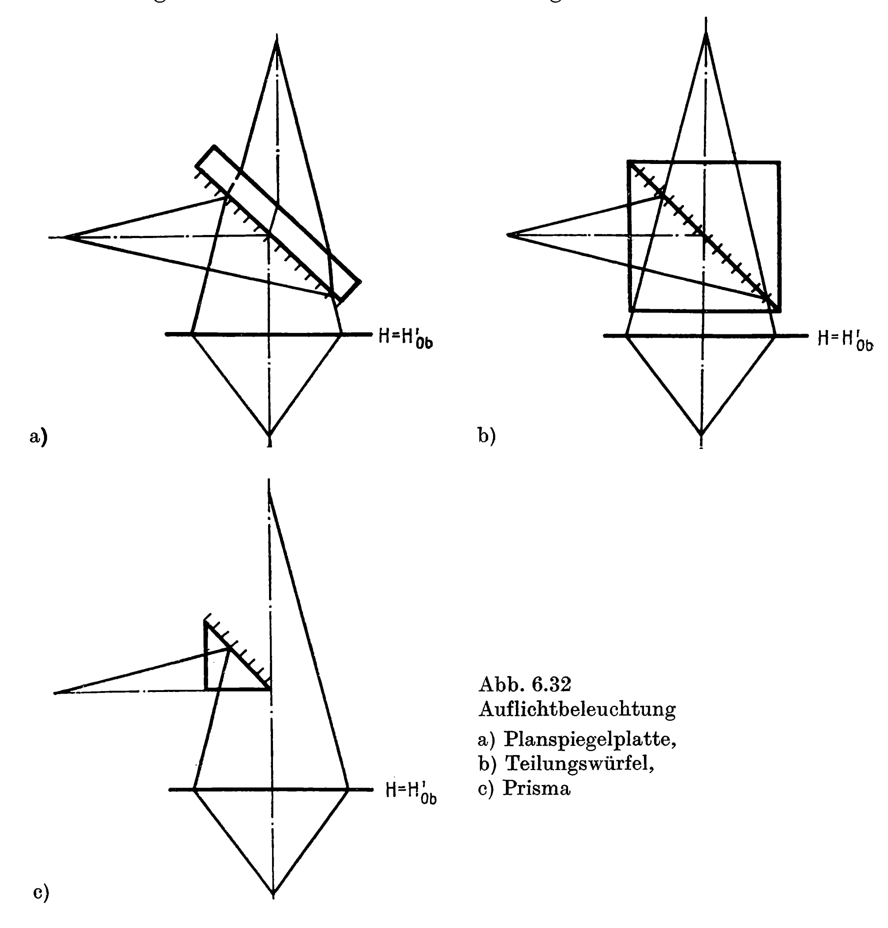


Abb. 6.32
Auflichtbeleuchtung
a) Planspiegelplatte,
b) Teilungswürfel,
c) Prisma

Die Abbildungsfehler der ablenkenden Funktionselemente lassen sich vermeiden, wenn sie im parallelen Strahlengang stehen. Dazu eignen sich Mikroskope, die mit Objektiven mit unendlicher Bildweite ausgerüstet sind. Das ablenkende Funktionselement muß zwischen Objektiv und Tubuslinse angebracht sein. Das Köhlersche Beleuchtungssystem ist durch eine der Tubuslinse äquivalente Linse zu ergänzen (Abb. 6.33).

Als Aperturblende wirkt die Blende, die in der bildseitigen Brennebene des Objektivs steht. Es ist aber möglich, durch Hilfslinsen eine im Beleuchtungssystem eingebaute Irisblende dorthin abzubilden. Gegenüber der Durchlichtbeleuchtung erfährt dadurch das Köhlersche Beleuchtungssystem einige Abwandlungen (Abb. 6.34).

Tabelle 6.10
Vergleich verschiedener ablenkender Funktionselemente zur Auflichtbeleuchtung

	Platte	Würfel	Prisma
Auflösungsvermögen	unverändert	unverändert	senkrecht zur Prismenkante halb so groß wie parallel
Lichtausbeute	gering	gering	gut
Beleuchtungsart	gerade	gerade	schräg
Linsenreflexe	vorhanden	gering	gering
Gleichmäßigkeit	gut	gut	bei starken Objektiven nicht immer gut
Abbildungsfehler	wie schrägstehende Planplatte	wie schrägstehende Planplatte	wie geradestehende Planplatte

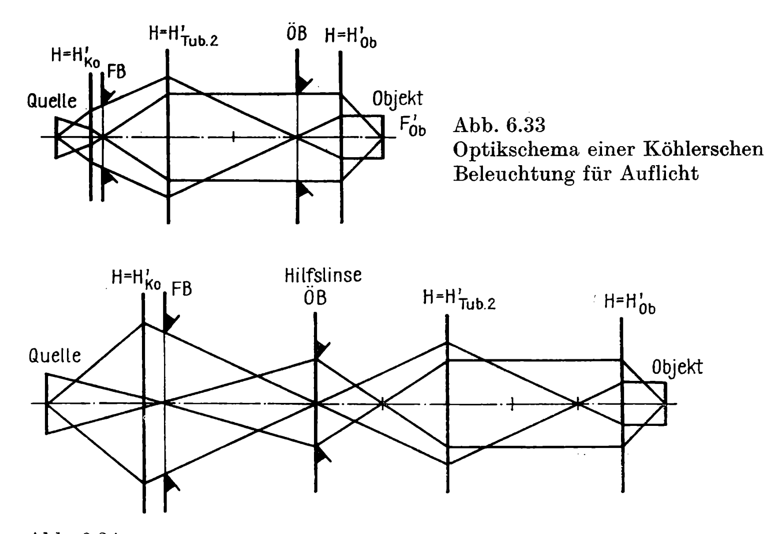


Abb. 6.33
Optikschema einer Köhlerschen Beleuchtung für Auflicht

Abb. 6.34
Optikschema einer Köhlerschen Beleuchtung für Auflicht

Bei Dunkelfeldbeleuchtung darf kein direktes Licht in das Objektiv gelangen. Das gelingt mit einem ringförmigen Beleuchtungsbündel, das die Objektivapertur ausspart. Dazu dient z. B. der Kardioidkondensor. Theoretisch besteht dieser aus einem Ausschnitt einer Rotations-Kardioide mit der Gleichung der Schnittkurve in einer Ebene in Polarkoordinaten

$$r = \varrho(1 + \cos\varphi)$$

und einer Kugel mit dem Durchmesser

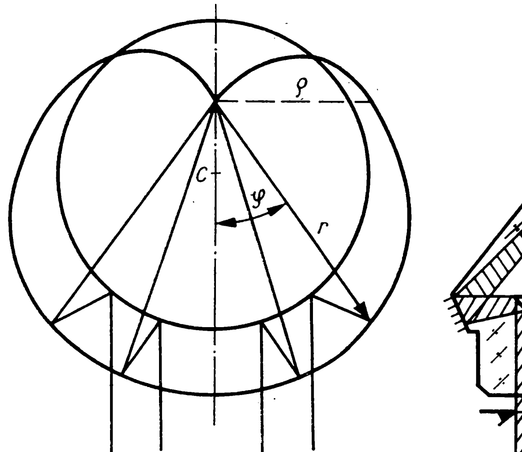
$$d = 2\varrho,$$

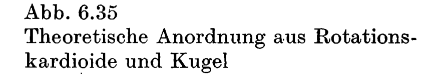
dessen Mittelpunkt auf der Rotationsachse der Kardioide liegt und die Koordinate

$$r_\mathrm{M} = \frac{\varrho}{2}$$

hat.

Sämtliche Strahlen, die achsparallel einfallen und sowohl am Kugel- wie auch am Kardioidausschnitt reflektiert werden, gehen durch den Koordinatenursprung (Abb. 6.35). Diese Abbildung des unendlich fernen Achsenpunktes ist aplanatisch.




Abb. 6.35
Theoretische Anordnung aus Rotationskardioide und Kugel

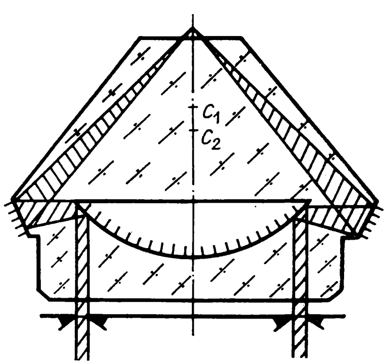


Abb. 6.36
Praktische Ausführung des Kardioidkondensors

Praktisch ersetzt man die Kardioide durch eine Kugelfläche und schleift die reflektierenden Flächen an Glaskörper an (Abb. 6.36). Das Köhlersche Beleuchtungssystem ist in Verbindung mit dem Kardioidkondensor so abzuwandeln, daß eine Hilfslinse achsparalleles Licht erzeugt und die Aperturblende ringförmig ist. Damit Totalreflexion an der oberen Grenzfläche vermieden wird, ist Ölimmersion zwischen dem Kondensor und dem Objekt erforderlich.

6.2.6. Fourier-Theorie der kohärenten Abbildung

Wir behandeln die Abbildung im Mikroskop vom Standpunkt der Wellenoptik aus. Die grundsätzlichen Untersuchungen dazu stammen von Ernst Abbe, weshalb man auch von der „Abbeschen Theorie der Abbildung im Mikroskop“ spricht.

Wir unterscheiden zwischen der Abbildung beleuchteter Objekte (Nichtselbstleuchter) und der Abbildung von Objekten, die selbst Licht ausstrahlen (Selbstleuchter). Im ersten Falle ist das Licht im allgemeinen partiell kohärent, im zweiten Falle inkohärent.

Bei Selbstleuchtern ist die Übertragungstheorie der inkohärenten Abbildung anzuwenden (Abschnitt 4.4.5.).

Objektfunktion. Für den Grenzfall der kohärenten Beleuchtung, wie sie bei der Beleuchtung des Objektes mit einer punktförmigen Lichtquelle vorkäme, wollen wir die Theorie entwickeln. Wir legen Köhlersche Beleuchtung zugrunde und nehmen eine punktförmige Lichtquelle an (Abb. 6.37). Das Objekt bestehe aus einer ebenen Struktur. Diese verändert die komplexe Amplitude der Lichtwelle. Die

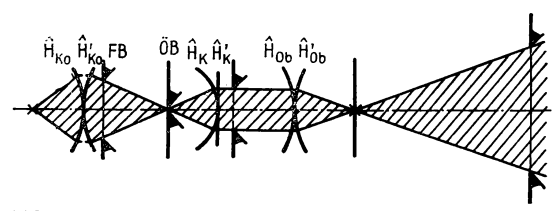


Abb. 6.37
Köhlersche Beleuchtung mit punktförmiger Lichtquelle

komplexe Amplitude vor dem Objekt $a_0(x, y)$ wird durch die Objektfunktion $f(x, y)$ in die komplexe Amplitude $a(x, y)$ abgewandelt. Es ist

$$a(x, y) = a_0(x, y)\, f(x, y). \tag{6.99}$$

(Vgl. die Beugung am Gitter, bei der wir die zur Objektfunktion analoge Strukturfunktion verwendet haben.) Die Objektfunktion wirkt im allgemeinen auf den Betrag und die Phase der komplexen Amplitude, so daß sie in

$$f(x, y) = \sigma(x, y) \cdot e^{j\delta(x,y)} \tag{6.100}$$

zerlegt werden kann.

Ein reines Amplitudenobjekt ist durch $\delta = 0$, ein reines Phasenobjekt durch $\sigma = 1$ charakterisiert.

Beugungsfunktion. Am Objekt wird das Licht gebeugt. Das Mikroobjektiv fokussiert die Parallelbündel verschiedener Richtung in der bildseitigen Brennebene, so daß in dieser ein Beugungsbild entsteht.

> Das Beugungsbild in der bildseitigen Brennebene des Mikroobjektivs ist vollständig durch die Objektfunktion bestimmt. Es enthält also in latenter Form sämtliche Eigenschaften des Objektes, die das Licht verändern und ist bestimmend für das Zwischenbild.

Das Beugungsbild wird auch primäres Bild genannt. Zu seiner Berechnung ist die Fraunhofersche Beugung an einer ebenen Struktur zu betrachten. Wir gehen deshalb von der Gl. (2.308) aus und erhalten für die Richtungsverteilung der komplexen Amplitude im Beugungsbild

$$a(\alpha, \beta) = A \iint\limits_{\text{Objekt}} f(x, y) \cdot e^{\frac{2\pi j}{\lambda}[x(\alpha_0 - \alpha) + y(\beta_0 - \beta)]}\, dx\, dy. \tag{6.101}$$

Die Integration erstreckt sich eigentlich über die Fläche des Objektes. Es bringt jedoch Vorteile für die theoretische Behandlung mit sich, wenn wir von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren. Weil außerhalb der Fläche des Objektes die Funktion $f(x, y)$ verschwindet, entsteht dadurch kein Fehler. Wir führen die Richtungsvariablen

$$\nu = \frac{\alpha - \alpha_0}{\lambda}, \quad \mu = \frac{\beta - \beta_0}{\lambda} \tag{6.102a, b}$$

ein und erhalten für die Beugungsfunktion

$$a(\nu, \mu) = A \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}(\nu x + \mu y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{6.103}$$

Wenn wir das gesamte gebeugte Licht durch das Mikroobjektiv erfassen, dann gelangt das von einem Objektpunkt ausgehende Licht vollständig in einen Punkt der Zwischenbildebene. Diese ist der Objektebene optisch konjugiert. Zwischen den Teilbündeln bestehen keine Phasendifferenzen. Es gilt:

> In einem Punkt des Zwischenbildes interferieren die von einem Objektpunkt ausgehenden gebeugten Teilbündel zur maximalen Intensität.
> Ein hinsichtlich der Leuchtdichte-Verteilung dem Objekt ähnliches Bild entsteht, wenn das gesamte von den Objektpunkten ausgehende Licht zum Bildaufbau beiträgt.

Das Zwischenbild wird auch als sekundäres Bild bezeichnet. Dieses wird durch das Okular abgebildet, das wie eine Lupe wirkt. Wellenoptisch treten keine Besonderheiten auf. Wir untersuchen deshalb stets das primäre und das sekundäre Bild.

Der geometrisch-optische Abbildungsmaßstab des Mikroobjektivs ist für die wellenoptische Theorie ebenfalls unwichtig. Es kommt nur auf die Intensitätsverhältnisse im Bild an, an denen sich bei ähnlicher Vergrößerung nichts ändert. Wir transformieren das Koordinatensystem in der Zwischenbildebene so, daß der Abbildungsmaßstab gleich Eins ist.

Bildfunktion. Die komplexe Amplitude im Zwischenbild $b(x', y')$, die wir Bildfunktion nennen, muß unter den Voraussetzungen

— das gesamte Licht kommt zum Zwischenbild,
— Abbildungsmaßstab auf Eins normiert

gleich der Objektfunktion sein. Wir erhalten aus Gl. (6.103)

$$a(\nu, \mu) = A \iint_{-\infty}^{\infty} b(x', y') \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}(\nu x' + \mu y')} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y'. \tag{6.104}$$

x' und y' sind die normierten Koordinaten im Zwischenbild. Gl. (6.104) gestattet bei Kenntnis der Bildfunktion die Berechnung der Beugungsfunktion. Es muß aber auch möglich sein, die Bildfunktion aus der Beugungsfunktion zu berechnen. Dieses Problem ist lösbar, weil Gl. (6.104) ein Fourier-Integral enthält. Die Fourier-

Transformation ermöglicht die Umkehrung in

$$b(x', y') = \frac{1}{A} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} a(\nu, \mu) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}(\nu x' + \mu y')} \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.105}$$

Es gilt also:

> Die Beugungsfunktion $a(\nu, \mu)$ und die Bildfunktion $b(x', y')$ sind Fourier-Transformierte.

Aus diesem Grunde sprechen wir hier von der Fourier-Theorie der kohärenten Abbildung.

Eingriffsfunktion. Bei der realen Abbildung trägt niemals das gesamte von einem Objektpunkt ausgehende Licht unverändert zum Bildaufbau bei. Bereits durch die begrenzte numerische Apertur des Mikroobjektivs wird ein Teil des Lichtes abgeblendet. Es gibt aber auch Mikroskopierverfahren (z. B. das Dunkelfeldverfahren), ei denen Eingriffe in das Lichtbündel vorgenommen werden.

Die Einwirkungen auf die komplexen Amplituden des Beugungsbildes, also auf die Beugungsfunktion $a(\nu, \mu)$, erfassen wir mit der Eingriffsfunktion

$$c(\nu, \mu) = \begin{cases} c_0(\nu, \mu) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Phi(\nu, \mu)} & \text{innerhalb des durch die Austrittspupille möglichen Lichtbündels,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.106}$$

Sämtliche Eingriffe wirken sich auf das primäre Bild aus und können als äquivalenter Eingriff in dieses gedeutet werden. Mit Eingriff kann die Bildfunktion auch außerhalb des Gaußschen Bildpunktes mit den Koordinaten x_0', y_0' verschieden von Null sein. In einem isoplanatischen Gebiet hängt sie jedoch nur von $x' - x_0'$, $y' - y_0'$ ab.

Aus Gl. (6.104) geht bei einem Eingriff

$$a(\nu, \mu) \cdot c(\nu, \mu) = A \iint\limits_{-\infty}^{\infty} b(x', y') \cdot \mathrm{e}^{-2\pi j[\nu(x'-x_0') + \mu(y'-y_0')]} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \tag{6.107}$$

hervor. Die Umkehrung mittels der Fourier-Transformation lautet

$$b(x', y') = \frac{1}{A} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} a(\nu, \mu) \cdot c(\nu, \mu) \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}[\nu(x'-x_0') + \mu(y'+y_0')]} \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.108}$$

Bezeichnen wir mit $\tilde{b}(\nu, \mu)$ die Fourier-Transformierte der Bildfunktion, dann gilt

$$\tilde{b}(\nu, \mu) = a(\nu, \mu) \cdot c(\nu, \mu) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{b}(\nu, \mu) = \tilde{f}(\nu, \mu) \cdot c(\nu, \mu). \tag{6.109}$$

> Bei der kohärenten optischen Abbildung ergibt sich die Fourier-Transformierte der Bildfunktion als Produkt von Beugungs- und Eingriffsfunktion.

Wir führen mittels

$$g(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} c(\nu, \mu) \cdot e^{2\pi j[\nu(x'-x_0')+\mu(y'-y_0')]} \, d\nu \, d\mu \tag{6.110}$$

die Fourier-Transformierte der Eingriffsfunktion ein. Sie beschreibt den Einfluß des Eingriffs auf die komplexen Amplituden in der Zwischenbildebene. Analog zur Punktbildfunktion Gl. (4.326) können wir $g(x', y')$ als Punktbildamplitudenfunktion bezeichnen.

Wegen Gl. (6.103) gilt gemäß Gl. (6.109) und Gl. (6.110):

> **Bei der kohärenten Abbildung ist die Fourier-Transformierte der Bildfunktion gleich dem Produkt aus der Fourier-Transformierten der Objektfunktion und der Punktbildamplitudenfunktion.**

Analog zur Ableitung, die zu Gl. (4.351) führte, läßt sich der Zusammenhang zwischen den komplexen Amplituden und der Punktbildamplitudenfunktion auch durch das Faltungsintegral

$$b(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0', y_0') \, g(x' - x_0', y' - y_0') \, dx_0' \, dy_0' \tag{6.111}$$

mit $f(x_0', y_0') = f(x_0, y_0)$ ausdrücken.

Die Richtungsvariablen können unmittelbar in reduzierte Pupillenkoordinaten $\bar{x}_p' = x_p'/\varrho_p'$ und $\bar{y}_p' = y_p'/\varrho_p'$ mittels

$$\nu = \frac{\bar{x}_p' \varrho_p'}{\lambda f_{Ob}'}, \qquad \mu = \frac{\bar{y}_p' \varrho_p'}{\lambda f_{Ob}'}$$

umgerechnet werden. Die reduzierten Ortskoordinaten lauten

$$\bar{x}' = (x' - x_0') \frac{\varrho_p'}{\lambda f_{Ob}'}, \qquad \bar{y}' = (y' - y_0') \frac{\varrho_p'}{\lambda f_{Ob}'}.$$

Damit ergeben sich die Schreibweisen

$$g(\bar{x}' \, \bar{y}') = \iint_{-\infty}^{\infty} c(\bar{x}_p', \bar{y}_p') \cdot e^{2\pi j(\bar{x}'\bar{x}_p' + \bar{y}'\bar{y}_p')} d\bar{x}_p' d\bar{y}_p'. \tag{6.110'}$$

bzw.

$$b(\bar{x}', \bar{y}') = \frac{1}{A} \iint_{-\infty}^{\infty} a(\bar{x}_p', \bar{y}_p') \, c(\bar{x}_p', \bar{y}_p') \cdot e^{2\pi j(\bar{x}'\bar{x}_p' + \bar{y}'\bar{y}_p')} \, d\bar{x}_p' \, d\bar{y}_p'. \tag{6.111'}$$

Die Eingriffsfunktion

$$c(\bar{x}_p', \bar{y}_p') = \begin{cases} c_0(\bar{x}_p', \bar{y}_p') \cdot e^{j\Phi(\bar{x}_p', \bar{y}_p')} & \text{innerhalb der Austrittspupille} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.112}$$

erweist sich damit unmittelbar als Pupillenfunktion

$$c(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p) = P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p).$$

Damit läßt sich Gl. (6.109) umformen in

$$\tilde{b}(\bar{x}', \bar{y}') = a(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p)\, P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p) \tag{6.113}$$

bzw.

$$\tilde{b}(\bar{x}', \bar{y}') = \tilde{f}(\bar{x}', \bar{y}')\, P(\bar{x}'_p, \bar{y}'_p). \tag{6.114}$$

In Worten:

Die Fourier-Transformierte der Bildfunktion ist gleich der Fourier-Transformierten der Objektfunktion multipliziert mit der Pupillenfunktion.
Die Pupillenfunktion ist die Übertragungsfunktion der kohärenten optischen Abbildung. Es werden also die komplexen Amplituden linear übertragen.

6.2.7. Mikroskopische Abbildung von Liniengittern

Besonders übersichtlich ist die kohärente Abbildung eines Liniengitters zu behandeln. Die Objektfunktion hängt nur von einer Variablen ab und ist periodisch mit der Gitterkonstanten g. Sie lautet

$$f(x + kg) = f(x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6.115}$$

Die Beugungsfunktion wurde im Abschnitt 2.6.4. berechnet. Es gilt:

— Die Beugungsfunktion hat nur für die diskreten Richtungsvariablen

$$\nu_m = \frac{m}{g}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.116}$$

wesentlich von Null verschiedene Werte.

— Die komplexe Amplitude in der m-ten Ordnung ist der Fourier-Koeffizient der Reihenentwicklung der Objektfunktion $f(\varkappa)$, also der Ausdruck

$$a_m(\nu_m) = \int_0^1 f(\varkappa) \cdot e^{2\pi j m \varkappa}\, d\varkappa. \tag{6.117}$$

Die Variable $\varkappa$ ist durch

$$x = (k + \varkappa) \cdot g, \qquad 0 \leqq \varkappa \leqq 1$$

definiert.

Die Aperturblende, die sich in der objektseitigen Brennebene des Kondensors befindet, sei ein parallel zu den Gitterstrichen liegender infinitesimal schmaler Spalt. Das Beugungsbild besteht aus Linien, die den Ordnungen des Beugungsspektrums entsprechen.

Amplitudengitter. Gegeben sei ein reines Amplitudengitter mit „kastenförmiger" Objektfunktion. Diese lautet

$$f(\varkappa) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0 \\ 0 & \varkappa_0 \leqq \varkappa \leqq 1. \end{cases} \qquad (6.118)$$

Die Fourier-Koeffizienten entnehmen wir Gl. (6.116) und Gl. (6.117):

$$a_0 = \varkappa_0, \qquad a_m = \frac{1}{2\pi \mathrm{j} m} \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} m \varkappa_0} - 1\right). \qquad (6.119\mathrm{a, b})$$

Wir führen die Abkürzung

$$v_m = \pi m \varkappa_0 \qquad (6.120)$$

ein und erhalten

$$a_0 = \varkappa_0, \qquad a_m = -\frac{\mathrm{j}\varkappa_0}{2 v_m} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{j} v_m} - 1\right). \qquad (6.121\mathrm{a, b})$$

Wir formen mittels Trennung in Real- und Imaginärteil um in

$$a_0 = \varkappa_0, \qquad a_m = \varkappa_0 \frac{\sin v_m}{v_m} \mathrm{e}^{\mathrm{j} v_m}. \qquad (6.122\mathrm{a, b})$$

Die Bildfunktion $b(\varkappa')$ ist ohne Eingriff gleich der Objektfunktion $f(\varkappa)$. Sie lautet als Fourier-Reihe dargestellt

$$b(\varkappa') = \varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin v_m}{v_m} \mathrm{e}^{\mathrm{j} v_m} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'}. \qquad (6.123)$$

Wir berücksichtigen, daß

$$v_{-m} = -v_m, \qquad v_m = m v_1$$

ist. Damit folgt aus Gl. (6.123)

$$b(\varkappa') = \varkappa_0 \left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m v_1}{m v_1} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j} m(2\pi\varkappa' - v_1)} + \mathrm{e}^{\mathrm{j} m(2\pi\varkappa' - v_1)}\right]\right\}$$

oder

$$b(\varkappa') = \varkappa_0 \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m v_1}{m v_1} \cos\left[m(2\pi\varkappa' - v_1)\right]\right\}. \qquad (6.124)$$

Wir diskutieren die Beugungs- und die Bildfunktion.

Die Beugungsfunktion, also die komplexe Amplitude im Beugungsbild, stellen wir für jede Ordnung getrennt in der Gaußschen Zahlenebene dar. Der Betrag der komplexen Amplitude nimmt gemäß Gl. (6.122) von Ordnung zu Ordnung ab. Die Phase wird von Ordnung zu Ordnung um den gleichen Winkel v_1 gedreht. Abbildung 6.38 und Tab. 6.11 gelten für

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi}, \qquad \text{also} \qquad v_m = \frac{m}{2}.$$

Die Bildfunktion wird nach Gl. (6.124) additiv aus den einzelnen Ordnungen aufgebaut. Jeder Summand — außer dem konstanten Glied $\varkappa_0$ — stellt wegen des Faktors $\cos [m(2\pi\varkappa' - v_1)]$ eine um v_1 phasenverschobene kosinusförmige Funktion mit der Ortsfrequenz m und der Amplitude

$$2\varkappa_0 \frac{\sin m v_1}{m v_1}$$

dar.

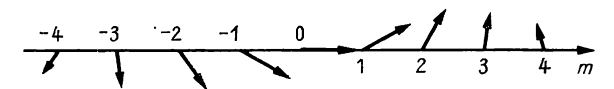


Abb. 6.38
Komplexe Amplituden im Beugungsbild des Amplitudengitters

Tabelle 6.11
Betrag und Phase der Beugungsfunktion des Amplitudengitters

m	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$\lvert a_m \rvert$	0,1592	0,1526	0,1340	0,1059	0,07236
v_m	0	$\pm 28°\ 39'$	$\pm 57°\ 18'$	$\pm 85°\ 56'$	$\pm 114°\ 35'$

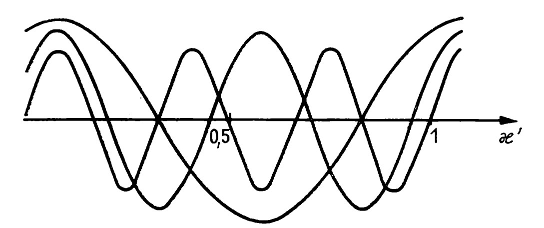


Abb. 6.39
Erste Summanden der Fourier-Reihendarstellung der Bildfunktion

Die ersten Summanden sind in der Abb. 6.39 grafisch dargestellt. Die Addition sämtlicher Summanden der Fourier-Reihe muß die Bildfunktion

$$b(\varkappa') = \begin{cases} 1 & 0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa_0' \\ 0 & \varkappa_0' \leqq \varkappa' \leqq 1 \end{cases} \tag{6.125}$$

ergeben. Der Kontrast im Zwischenbild wird wegen

$$I \sim bb^*$$

aus

$$K' = \frac{(bb^*)_{\text{Max}} - (bb^*)_{\text{Min}}}{(bb^*)_{\text{Max}} + (bb^*)_{\text{Min}}} = 1 \tag{6.126}$$

berechnet. Das Bild ist objekttreu.

Auflösungsvermögen. Die Öffnungsblende des Mikroobjektivs schneidet die Beugungsmaxima von einer bestimmten Ordnung an aus dem gebeugten Licht aus. Die Auswirkung auf das Zwischenbild ist in den Abb. 6.40 bis 6.43 zu erkennen.

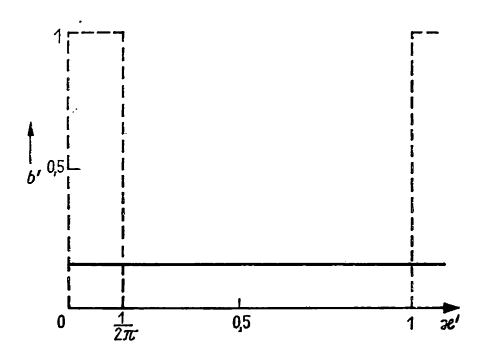


Abb. 6.40
Objektfunktion und Bildfunktion
bei Aperturbegrenzung
(nur nullte Ordnung hindurchgelassen)

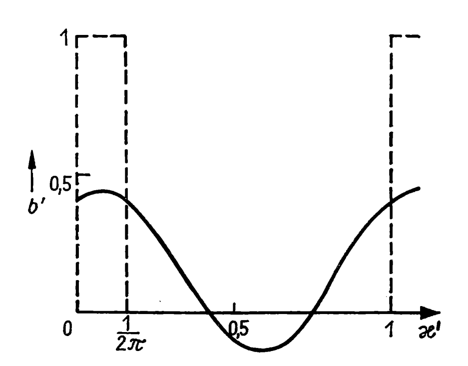


Abb. 6.41
Objektfunktion und Bildfunktion
bei Aperturbegrenzung
(die nullte und die beiden ersten
Ordnungen hindurchgelassen)

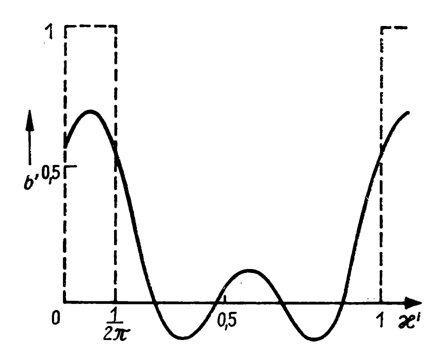


Abb. 6.42
Objektfunktion und Bildfunktion
bei Aperturbegrenzung
(die nullte, die ersten und die zweiten
Ordnungen hindurchgelassen)

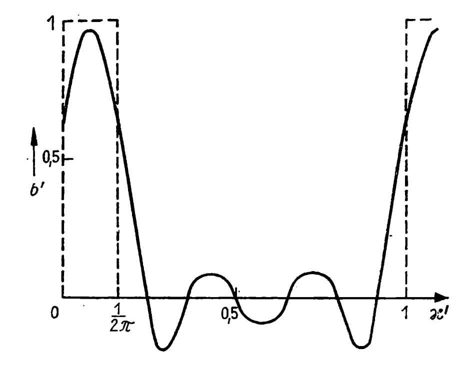


Abb. 6.43
Objektfunktion und Bildfunktion
bei Aperturbegrenzung
(die nullte, die ersten, die zweiten und die
dritten Ordnungen werden hindurchgelassen)

Läßt das Objektiv nur die nullte Ordnung hindurch, dann ist das Bildfeld gleichmäßig hell. Das Gitter wird nicht aufgelöst. In der Abb. 6.41 sind die nullte und die beiden ersten Ordnungen ($m = \pm 1$) überlagert. Im Zwischenbild ist eine Struktur zu erkennen, die dieselbe Gitterkonstante wie das Objekt hat. Das Bild ist jedoch dem Objekt nicht ähnlich.

Es gilt also:

> Damit ein Objekt bei gerader Hellfeldbeleuchtung aufgelöst wird, müssen mindestens die beiden ersten Ordnungen im Beugungsbild vorhanden sein. Die Abbildung ist nicht objekttreu.

Nach Abb. 6.44 ist

$$\hat{\alpha}_0 = 90°, \qquad \cos \hat{\alpha}_0 = \alpha_0 = 0, \qquad \alpha = \cos \hat{\alpha} = \sin (90° + u) = -\sin u.$$

Allgemein können wir $-\alpha = A$ (numerische Apertur) setzen. Für die erste Ordnung gilt

$$-\alpha = \frac{\lambda}{g}.$$

Die aufgelöste Strecke beträgt bei gerader Hellfeldbeleuchtung

$$g = \frac{\lambda}{A}. \tag{6.127}$$

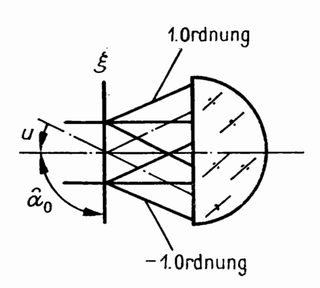


Abb. 6.44
Auflösbarer Winkel bei gerader Hellfeldbeleuchtung

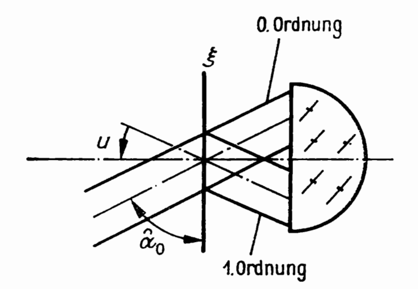


Abb. 6.45
Auflösbarer Winkel bei schräger Hellfeldbeleuchtung

Bei schräger Hellfeldbeleuchtung wird das Gitter aufgelöst, wenn die nullte und die erste Ordnung vom Objektiv erfaßt werden. Es gilt (Abb. 6.45)

$$\alpha_0 = \cos (90° - u) = A, \qquad \alpha = \cos (90° + u) = -A, \quad \text{also}$$

$$\alpha_0 - \alpha = 2A = \frac{\lambda}{g}.$$

Die auflösbare Strecke beträgt

$$g = \frac{\lambda}{2A}. \tag{6.128}$$

In den Abb. 6.42 und 6.43 sind weitere Ordnungen im Bild wirksam. Das Auflösungsvermögen ändert sich dadurch nicht, aber das Bild wird in steigendem Maße dem Objekt ähnlicher.

Die Faktoren, die in den Gl. (6.127) und (6.128) bei λ/A stehen, wurden in der Tab. 6.9 verwendet und mit r_0 bezeichnet ($r_0 = 1$ bzw. 0,5).

Phasengitter. Als Modell für ein Phasenobjekt verwenden wir ein reines Phasengitter mit stückweise konstanter Phase.

Die Objektfunktion ist also

$$f(\varkappa) = \begin{cases} e^{j\delta} & 0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0 \\ 1 & \varkappa_0 \leqq \varkappa \leqq 1 . \end{cases} \tag{6.129}$$

Für ein derartiges Liniengitter wurden die Fourier-Koeffizienten im Abschnitt 5.2.2. berechnet (Laminargitter). Sie lauten

$$a_0 = 1 + \varkappa_0(e^{j\delta} - 1), \qquad a_m = \frac{1}{2\pi j m} (e^{2\pi j m \varkappa_0} - 1)(e^{j\delta} - 1).$$

Mit der Abkürzung $v_m = \pi m \varkappa_0$ erhalten wir

$$a_0 = 1 + \varkappa_0(e^{j\delta} - 1), \qquad a_m = -\frac{j\varkappa_0}{2v_m} (e^{2jv_m} - 1)(e^{j\delta} - 1). \tag{6.130a, b}$$

Eine übersichtliche Diskussion ist nur möglich, wenn δ klein ist. Wir entwickeln $\exp(j\delta)$ in eine Reihe, die wir mit dem linearen Glied abbrechen. Aus Gl. (6.130) geht

$$a_0 = 1 + j\delta\varkappa_0, \qquad a_m = \frac{\delta\varkappa_0}{2v_m} (e^{2jv_m} - 1) \tag{6.131a, b}$$

hervor. Durch Trennung von Real- und Imaginärteil bzw. Anwenden der Näherung $1 + j\delta\varkappa_0 = \exp(j\delta\varkappa_0)$ ergibt sich

$$a_0 = e^{j\delta\varkappa_0}, \qquad a_m = \delta\varkappa_0 \frac{\sin v_m}{v_m} e^{j\left(v_m + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{6.132a, b}$$

Die Fourier-Reihen-Darstellung der Objektfunktion und damit ohne Eingriff auch der Bildfunktion lautet

$$b(\varkappa') = 1 + j\delta\varkappa_0 + \delta\varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin v_m}{v_m} e^{j\left(v_m + \frac{\pi}{2}\right)} e^{-2\pi j m \varkappa'}. \tag{6.133}$$

Der Strich am Summenzeichen deutet an, daß das Glied mit $m = 0$ nicht in der Summe enthalten ist. Wegen $\exp(j\pi/2) = j$ gilt auch

$$b(\varkappa') = 1 + j\delta\varkappa_0 + j\delta\varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin v_m}{v_m} e^{jv_m} e^{-2\pi j m \varkappa'}. \tag{6.134}$$

Der Vergleich mit den Beziehungen für das Amplitudengitter ergibt für Phasengitter mit kleiner Phasenänderung:

— In der nullten Ordnung ist der Betrag der komplexen Amplitude beim Phasengitter nahezu gleich Eins.

— Da δ als klein vorausgesetzt ist, stellt $\delta\varkappa_0$ einen sehr kleinen Winkel dar. Die Phasenlage in der nullten Ordnung ist deshalb beim Phasen- und beim Amplitudengitter fast die gleiche.

— Die höheren Ordnungen des Phasengitters sind wegen des Faktors δ in Gl. (6.132b) sehr lichtschwach.

— In der Gaußschen Bildebene sind die Amplitudenvektoren der höheren Ordnungen beim Phasengitter um 90° gegenüber denen beim Amplitudengitter gedreht; das ist besonders deutlich an der Gl. (6.132b) zu erkennen. Da die Amplitudenvektoren der nullten Ordnung fast gleichgerichtet sind, ist die beim Phasengitter zusätzlich vorhandene Phasendifferenz von 90° zwischen der nullten und den höheren Ordnungen der wichtigste Unterschied zwischen den Beugungsbildern beider Gitterarten.

— Die Bildfunktion ist ohne Eingriff der Objektfunktion gleich. Beim Phasengitter lautet sie

$$b(\varkappa') = \begin{cases} e^{j\delta} & 0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa_0' \\ 1 & \varkappa_0' \leqq \varkappa' \leqq 1. \end{cases} \tag{6.135}$$

Der Bildkontrast beträgt

$$K' = \frac{1-1}{1+1} = 0. \tag{6.136}$$

Das Phasengitter ist ohne Eingriff nicht wahrzunehmen, weil der Kontrast verschwindet. Diese Aussage ist nicht auf Gitter mit kleiner Phasenänderung beschränkt.

Für ein Phasengitter mit

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{und} \quad \delta = 0{,}1 \triangleq 6°$$

sind die Daten der komplexen Amplituden in der Tab. 6.12 enthalten. Abbildung 6.46 demonstriert die Richtungen der Amplitudenvektoren in der Gaußschen Zahlenebene. Vergleichen Sie damit Abb. 6.38 für das Amplitudengitter.

Tabelle 6.12
Betrag und Phase der Beugungsfunktion des Phasengitters

m	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$\lvert a_m \rvert$	1	0,01526	0,01340	0,01059	0,007236
$v_m + \pi/2$	54′ 43″	±28° 39′ + 90°	±57° 18′ + 90°	±85° 56′ + 90°	±114° 35′ + 90°

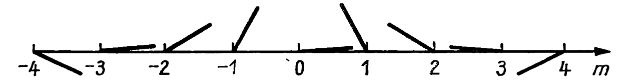


Abb. 6.46
Richtung der komplexen Amplituden im Beugungsbild des Phasengitters

Dunkelfeldverfahren. Die Mikroskopie mit dem Dunkelfeldverfahren ist dadurch gekennzeichnet, daß das direkte Licht nicht am Bildaufbau beteiligt ist. Nur das am Objekt gebeugte und gestreute Licht wird vom Objektiv erfaßt. Wir bilden ideale Gitter ab, so daß nur gebeugtes Licht zum Zwischenbild gelangt.

Das Ausblenden des ungebeugten Lichtes kann durch einen äquivalenten Eingriff in das primäre Bild gedeutet werden. Bei einem Beugungsgitter ergibt das direkte Licht die nullte Ordnung des Spektrums. Es muß also zum Verschwinden gebracht werden, etwa durch ein undurchsichtiges Plättchen in der bildseitigen Brennebene des Objektivs. Da wir sowohl die positiven als auch die negativen Ordnungen zur Abbildung verwenden, gilt unsere Darstellung für das sogenannte symmetrische Dunkelfeldverfahren. Die Eingriffsfunktion lautet

$$c(v) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \tag{6.137}$$

Wir untersuchen die Abbildung eines Amplituden- und eines Phasengitters getrennt.

Das Amplitudengitter hat nach Gl. (6.123) die Bildfunktion

$$b(\varkappa') = \varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin v_m}{v_m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}v_m} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'}. \tag{6.138}$$

Der Strich am Summenzeichen deutet das Fehlen des Gliedes mit $m = 0$ an. Da wir Gl. (6.138) auch

$$b(\varkappa') = \varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin v_m}{v_m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}v_m} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'} - \varkappa_0 \tag{6.139}$$

schreiben können und der erste Teil die Bildfunktion Gl. (6.123) für das Hellfeldbild des Amplitudengitters ist, gilt

$$b(\varkappa') = \begin{cases} 1 - \varkappa_0, & 0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa_0', \\ 0 - \varkappa_0, & \varkappa_0' \leqq \varkappa' \leqq 1. \end{cases} \tag{6.140}$$

Der Kontrast im Zwischenbild beträgt

$$K = \frac{1 - 2\varkappa_0}{(1 - \varkappa_0)^2 + \varkappa_0^2}. \tag{6.141}$$

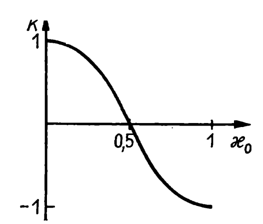


Abb. 6.47
Kontrast beim Dunkelfeldverfahren

Abbildung 6.47 veranschaulicht die Abhängigkeit des Kontrastes von $\varkappa_0$. Wir lesen folgende Eigenschaften des Dunkelfeldverfahrens für Amplitudengitter ab:

— Der Kontrast im sekundären Bild ist gegenüber dem im Hellfeldbild verringert.

— Gitter, bei denen $\varkappa_0 = 0{,}5$ ist, sind unsichtbar, weil der Kontrast verschwindet.

— Gitter, für die $\varkappa_0 > 0{,}5$ ist, werden mit negativem Kontrast abgebildet. Die dunklen Objektstreifen erscheinen heller als die durchlässigen Objektstreifen.

Das Phasengitter hat nach Gl. (6.133) die Bildfunktion

$$b(\varkappa') = \mathrm{j}\delta\varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin v_m}{v_m} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}v_m} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'}. \tag{6.142}$$

Diese Bildfunktion unterscheidet sich von der Bildfunktion Gl. (6.138) des Amplitudengitters nur um den Faktor $\mathrm{j}\delta$. Deshalb gilt unter Verwendung von Gl. (6.140)

$$b(\varkappa') = \begin{cases} \mathrm{j}\delta(1-\varkappa_0), & 0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa_0', \\ -\mathrm{j}\delta\varkappa_0, & \varkappa_0' \leqq \varkappa' \leqq 1. \end{cases} \tag{6.143}$$

Bei der Berechnung des Kontrastes kürzt sich der Faktor $|\mathrm{j}\delta|^2$, so daß beim Phasengitter ebenfalls

$$K = \frac{1 - 2\varkappa_0}{(1-\varkappa_0)^2 + \varkappa_0^2} \tag{6.144}$$

gilt. Die Funktion $K(\varkappa_0)$ wird auch beim Phasengitter durch Abb. 6.47 dargestellt. Es gilt für Phasengitter:

— Der Kontrast im sekundären Bild ist gegenüber dem im Hellfeldbild vergrößert. Phasengitter werden im Dunkelfeld sichtbar.

— Gitter, bei denen $\varkappa_0 = 0{,}5$ ist, sind unsichtbar.

— Gitter, für die $\varkappa_0 > 0{,}5$ ist, werden mit negativem Kontrast abgebildet. Beim Phasengitter bedeutet dies, daß die Bereiche des Gitters, in denen das Licht eine größere optische Weglänge nd hat, heller erscheinen als die Bereiche mit kleinerer optischer Weglänge.

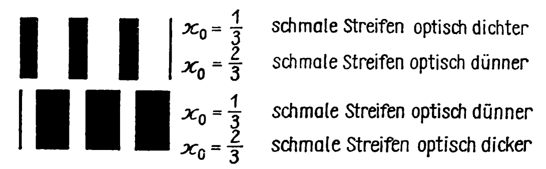


Abb. 6.48
Deutungsmöglichkeiten beim symmetrischen Dunkelfeldverfahren

Es ist zu beachten, daß in unserem Falle der Objektbereich $\varkappa_0 \leqq \varkappa \leqq 1$ derjenige mit der größeren optischen Dicke ist. Für ein positives δ eilt die Phase im Gebiet $0 \leqq \varkappa \leqq \varkappa_0$ der Phase in dem übrigen Gebiet voraus. Bei der Betrachtung eines Phasengitters mit dem Dunkelfeldverfahren können wir allerdings nicht unterscheiden, ob der schmale oder der breite Objektbereich einer Periode der kleineren optischen Dicke zugeordnet ist (Abb. 6.48). Es läßt sich also mit dem symmetrischen Dunkelfeldverfahren nicht entscheiden, welcher Objektbereich der optisch dünnere ist.

Phasenkontrastverfahren. Das Dunkelfeldverfahren stellt eine Mikroskopiermethode dar, mit der Phasengitter sichtbar gemacht werden. Ein weiteres Verfahren, mit dem von Phasengittern kontrastreiche Bilder erzeugt werden können, ist das Phasenkontrastverfahren. Es liefert bei ausreichend großer Apertur objektähnliche Bilder. Das Phasenkontrastverfahren wurde von ZERNIKE vorgeschlagen. Wir gehen vom Vergleich der komplexen Amplituden im primären Bild des Amplitudengitters (Abb. 6.38) mit den komplexen Amplituden im primären Bild des Phasengitters mit kleiner Phasenänderung (Abb. 6.46) aus. Das primäre Bild des Phasengitters muß danach in das primäre Bild des Amplitudengitters überführt werden können, wenn beim Phasengitter der zusätzliche Phasenunterschied von nahezu 90° zwischen der nullten und den höheren Ordnungen aufgehoben wird. Zu diesem Zweck brauchen wir nur am Ort der nullten Ordnung in der hinteren Brennebene des Mikroobjektivs ein sogenanntes Phasenplättchen anzubringen. Dieses erzeugt die gewünschte Phasenänderung und schwächt das Licht durch Absorption.

Wir stellen die Bildfunktionen von Amplituden- und Phasengitter nach Gl. (6.123) und Gl. (6.133) gegenüber.

Amplitudengitter

$$b(\varkappa') = \varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin v_m}{v_m} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'},$$

Phasengitter

$$b'(\varkappa') = 1 + \mathrm{j}\varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin v_m}{v_m} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} v_m} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'}.$$

Der Vergleich zeigt, daß wir bei einer Eingriffsfunktion

$$c(v) = \begin{cases} \mathrm{j}\delta\varkappa_0, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0, \end{cases} \tag{6.145}$$

für die Bildfunktion des Phasengitters (es ist $a_0 = 1 + \mathrm{j}\delta\varkappa_0$)

$$b(\varkappa') = \mathrm{j}\delta\varkappa_0 + \mathrm{j}\delta\varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\sin v_m}{v_m} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} v_m} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'}$$

(das Glied mit δ^2 ist vernachlässigt worden) oder

$$b(\varkappa') = \mathrm{j}\delta\varkappa_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin v_m}{v_m} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j} v_m} \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} m \varkappa'} \tag{6.146}$$

erhalten. Die Gl. (6.146) ist bis auf den Faktor $\mathrm{j}\delta$ mit der Bildfunktion des Amplitudengitters identisch. Es ergibt sich unter Verwendung von Gl. (6.125)

$$b(\varkappa') = \begin{cases} \mathrm{j}\delta, & 0 \leqq \varkappa' \leqq \varkappa_0', \\ 0, & \varkappa_0' \leqq \varkappa' \leqq 1, \end{cases} \tag{6.147}$$

und $K = 1$. Die Bereiche mit größerer optischer Weglänge erscheinen dunkler als die übrigen Bereiche (positiver Phasenkontrast).

> Bei dem „positiven Phasenkontrastverfahren" erscheinen die Objektbereiche mit größerer optischer Weglänge im Bild dunkler als die Objektbereiche mit kleinerer optischer Weglänge. Bei dem „negativen Phasenkontrastverfahren" ist es umgekehrt.

Aus

$$c_0 a_0 = \mathrm{j}\delta\varkappa_0 a_0 = \mathrm{j}\delta\varkappa_0(1 + \mathrm{j}\delta\varkappa_0) \tag{6.148}$$

folgt unter Vernachlässigung der Glieder mit δ^2

$$c_0 a_0 = \delta\varkappa_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}. \tag{6.149}$$

Nach Gl. (6.132a) und Gl. (6.149) muß der Phasenstreifen die Phase um

$$\delta_{\mathrm{Ph}} = \frac{\pi}{2} - \delta\varkappa_0 \approx \frac{\pi}{2} \tag{6.150}$$

ändern und den Betrag der komplexen Amplitude um

$$1 - \delta\varkappa_0. \tag{6.151}$$

Wegen des als klein vorausgesetzten Wertes von δ wird das Bild lichtschwach. Die Phasenänderung $\delta_{\mathrm{Ph}} = \frac{\pi}{2}$, die ein Voreilen der Phase in der nullten Ordnung erfordert, läßt sich indirekt realisieren, indem die Phase in den Ordnungen $m \neq 0$ um $\delta = -\frac{\pi}{2}$ (Nacheilen der Phase in diesen Ordnungen) geändert wird. Das hier behandelte positive Phasenkontrastverfahren mit kleiner Phasenänderung ergibt den Maximalkontrast $K = 1$, weshalb wir auch von einem „optimalen Phasenkontrastverfahren" sprechen können. Der Nachteil besteht aber darin, daß ein stark absorbierender Phasenstreifen erforderlich ist. Es ist aber praktisch nicht notwendig, den Maximalkontrast anzustreben. Mit einem Phasenstreifen geringerer Absorption läßt sich bei nicht zu geringer Bildintensität ein ausreichender Kontrast erzielen.

6.3. Fernrohr

6.3.1. Afokale Systeme

Begriff. In ihrer Grundfunktion sind die Fernrohre afokale Systeme. In diesem Abschnitt behandeln wir nur zentrierte afokale Systeme. Es gilt:

> Afokale optische Systeme transformieren ein paralleles Strahlenbündel in ein Parallelbündel. Sie haben die Gesamtbrechkraft $F' = 0$.

Für die einzelne dicke Linse ergibt sich aus der Brechkraftbeziehung (Gl. (4.62))

$$F' = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n - 1)^2 d}{n r_1 r_2}$$

mit $F' = 0$, daß entweder $r_1 = r_2 = \infty$ sein muß (trivialer Fall der planparallelen Platte ohne Änderung des Bündeldurchmessers) oder

$$d = \frac{n(r_1 - r_2)}{n - 1}$$

zu wählen ist (vgl. Abschnitt 4.1.6., symmetrische Bikonvexlinse). Das Verhältnis der Bündeldurchmesser folgt aus Gl. (4.47) zu

$$\omega_2 = \frac{h_2}{h_1} = 1 - F'_1 d = \frac{r_2}{r_1}.$$

Der bildseitige Brennpunkt der ersten Fläche und der objektseitige Brennpunkt der zweiten Fläche fallen zusammen. Eine dicke Linse eignet sich zwar theoretisch als afokales Funktionselement, praktisch stören jedoch die erforderliche große Glasdicke sowie die Abbildungsfehler.

Zwei optische Systeme haben nach Gl. (4.40) die äquivalente Brechkraft

$$F' = -\frac{t}{f'_1 f'_2}. \tag{6.152}$$

Das optische Intervall t folgt für Systeme mit $f'_1 = -f_1$ und $f'_2 = -f_2$ nach Gl. (4.38) aus

$$t = e'_1 - f'_1 - f'_2. \tag{6.153}$$

Auch aus zwei optischen Systemen entsteht ein afokales System, wenn das optische Intervall Null ist. Daraus ergibt sich

$$e'_1 = f'_1 + f'_2. \tag{6.154}$$

(Den trivialen Fall $f'_1 = f'_2 = \infty$ scheiden wir aus.)
Zwei Fälle sind von praktischer Bedeutung:

$f'_1 > 0,\ f'_2 > 0$ (zwei sammelnde Systeme); der Abstand der Systeme ist gleich der Summe ihrer bildseitigen Brennweiten.

$f'_1 > 0,\ f'_2 < 0$ (sammelndes und zerstreuendes System); der Abstand der Systeme ist gleich der Differenz der bildseitigen Brennweitenbeträge.

$$e'_1 = f'_1 - |f'_2|. \tag{6.155}$$

Beide Fälle sollen genauer untersucht werden.

Sammelndes Objektiv und sammelndes Okular sind charakteristisch für das astronomische Fernrohr, das auch Keplersches Fernrohr genannt wird. Abbildung 6.49 zeigt den Strahlengang für die Abbildung des unendlich fernen Achsenpunktes und für die Abbildung eines außeraxialen Punktes. Es zeigt sich, daß ein Parallelbündel, welches von oberhalb der optischen Achse einfällt, dem Beobachter von unterhalb der optischen Achse zu kommen scheint. Die Abb. 6.49 läßt folgende Eigenschaften des astronomischen Fernrohrs erkennen:

— Die Baulänge wird im wesentlichen durch die Summe der bildseitigen Brennweiten von Objektiv und Okular bestimmt.

— Das Bild ist höhen- und seitenvertauscht.

— In der bildseitigen Brennebene des Objektivs entsteht ein reelles Zwischenbild.

Bündelbegrenzung. Die freie Objektivöffnung des astronomischen Fernrohres wirkt im allgemeinen als Öffnungsblende und damit praktisch auch als Eintritts-

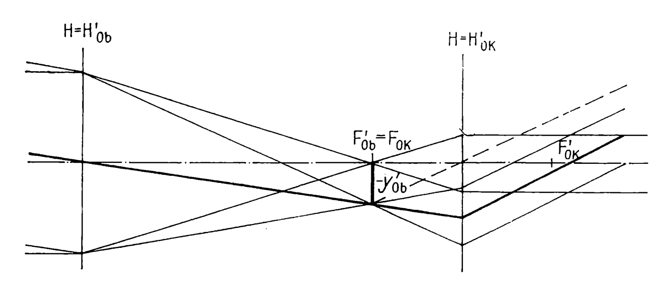


Abb. 6.49
Strahlenverlauf im astronomischen Fernrohr

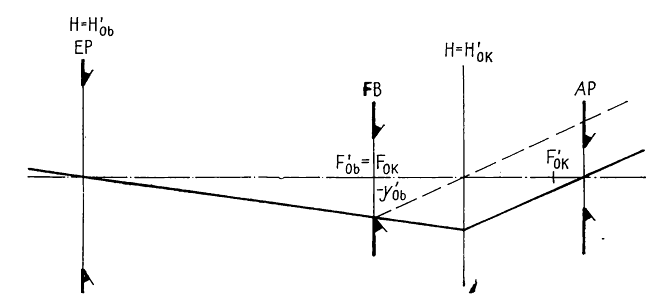


Abb. 6.50
Hauptstrahlenverlauf im astronomischen Fernrohr

pupille. Die Austrittspupille ist das durch das Okular erzeugte Bild der freien Objektivöffnung. Wegen

$$z'_p = -\frac{f'^2_{Ok}}{z_p} = -\frac{f'^2_{Ok}}{-f'_{Ob}} \tag{6.156}$$

liegt sie um

$$a'_p = f'_{Ok} + \frac{f'^2_{Ok}}{f'_{Ob}} = f'_{Ok}\left(1 + \frac{f'_{Ok}}{f'_{Ob}}\right) \tag{6.157}$$

hinter der bildseitigen Hauptebene des Okulars und ist dem Auge zugänglich. Abbildung 6.50 enthält den Hauptstrahlenverlauf im astronomischen Fernrohr.

Bei Okularen mit relativ großen Brennweiten entfernen sich die Hauptstrahlen vom Zwischenbild bis zum Okular weit von der optischen Achse. Es ist dann erforderlich, das Okular aus Feld- und Augenlinse zusammenzusetzen. Die Feldlinse im Zwischenbild oder in dessen Nähe wirkt vorrangig auf den Hauptstrahlenverlauf und hat wenig Einfluß auf den Abbildungsstrahlengang (Abb. 6.51).

In der bildseitigen Brennebene des Objektivs entsteht das reelle Zwischenbild. An dieser Stelle muß die Feldblende angebracht werden, wenn das Feld scharf begrenzt sein soll (Abb. 6.50). Aus- und Eintrittsluke liegen im Unendlichen. Das astronomische Fernrohr eignet sich gut als Meß- und Zielfernrohr, weil in der reellen Zwischenbildebene Marken und Teilungen angebracht werden können, die gemeinsam mit dem Bild scharf gesehen werden.

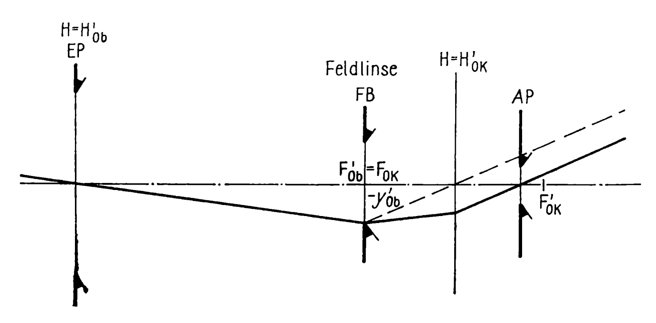


Abb. 6.51
Feldlinse in der Zwischenbildebene

Astronomische Fernrohre, bei denen das Objektiv nur aus Linsen besteht, werden als Refraktoren bezeichnet. Bei Reflektoren oder Spiegelfernrohren ist das Hauptelement des Objektivs ein Hohlspiegel.

Astronomische Fernrohre mit höhen- und seitenrichtigem Bild. Für Beobachtungen von natürlichen Objekten auf der Erde und in einem Teil der Geräte stört die Höhen- und Seitenvertauschung bei der Abbildung im astronomischen Fernrohr. Sie kann vermieden werden, wenn durch Linsensysteme (terrestrisches Fernrohr) oder Reflexionsprismen (Prismenfernrohr) die Umkehr des Bildes aufgehoben wird.

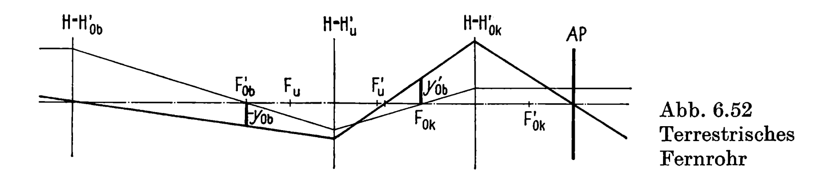


Abb. 6.52
Terrestrisches Fernrohr

Terrestrische Fernrohre enthalten im allgemeinen ein Umkehrsystem aus Linsen, das mit dem Maßstab $\beta' = -1$ abbildet. Der bildseitige Brennpunkt des Objektivs und der objektseitige Brennpunkt des Okulars müssen jeweils um die doppelte Brennweite des Umkehrsystems von den zugeordneten Hauptpunkten entfernt sein (Abb. 6.52). Bei terrestrischen Fernrohren sind zwei Feldlinsen erforderlich (Abb. 6.53).

Ein wesentlicher Nachteil der terrestrischen Fernrohre ist ihre große Baulänge.

Prismenfernrohre werden mono- und binokular hergestellt. Die Prismensätze zur Höhen- und Seitenvertauschung dürfen nicht nur komplanare Spiegelflächen haben.

Ihnen muß das Prismensymbol $\langle n|\ -1,\ -1,\ 1$ oder $\bar{1}\rangle$ zugeordnet sein. Bevorzugt werden die Porroschen Prismensätze 1. und 2. Art sowie das König-, Dialyt- und Abbe-Prisma, aber auch das zusammengesetzte Schmidt-Prisma ist geeignet (Abb. 6.54). Die Porroprismen haben den Vorteil des teilweise rückläufigen Strahlengangs, der die Baulänge verkürzt. Die seitliche Versetzung der optischen Achse ermöglicht bei Doppelfernrohren eine vergrößerte objektseitige Pupillendistanz.

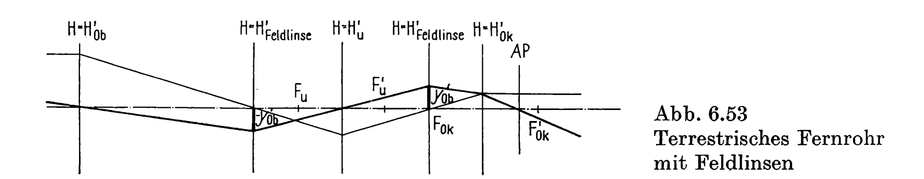
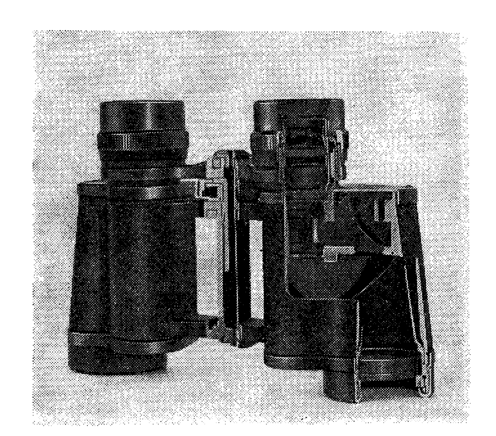


Abb. 6.53
Terrestrisches Fernrohr
mit Feldlinsen

Bei den übrigen Prismensätzen fluchtet die optische Achse. Zwei Reflexionen finden an einer Dachkante statt, so daß der Doppelbildfehler durch sehr enge Toleranzen vermieden werden muß.



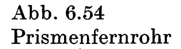


Abb. 6.54
Prismenfernrohr

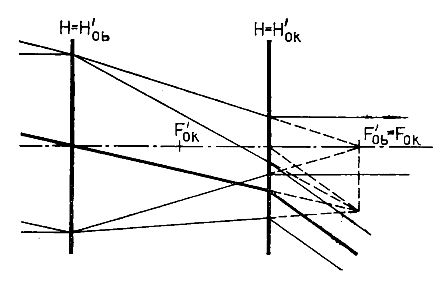


Abb. 6.55
Strahlenverlauf im holländischen Fernrohr

Sammelndes Objektiv und zerstreuendes Okular liegen beim holländischen Fernrohr vor, das auch Galileisches Fernrohr genannt wird. In der Abb. 6.55 ist der Strahlengang dargestellt. Folgende Eigenschaften sind abzulesen:

— Die Baulänge wird im wesentlichen durch die Differenz der bildseitigen Brennweitenbeträge von Objektiv und Okular bestimmt.

— Das Bild ist höhen- und seitenrichtig.

— Das Zwischenbild ist virtuell, so daß an seinem Ort keine Marken angebracht werden können. Als Meß- und Zielfernrohr ist das holländische Fernrohr nur geeignet, wenn die Marken mittels optischer Elemente in den Strahlengang eingeblendet werden.

Bündelbegrenzung. Die Öffnung wird durch die Augenpupille begrenzt, die damit zugleich Austrittspupille ist. Ihr objektseitiges Bild, die Eintrittspupille, liegt weit hinter dem Fernrohr und ist relativ klein (Abb. 6.56).

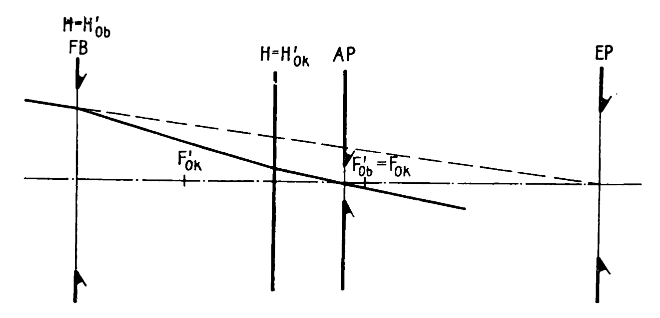


Abb. 6.56
Hauptstrahlenverlauf im holländischen Fernrohr

In der virtuellen Zwischenbildebene kann keine Feldblende angebracht werden. Als Feldblende und Eintrittsluke wirkt die freie Öffnung des Objektivs, so daß Randabschattung durch die Feldblende eintritt.

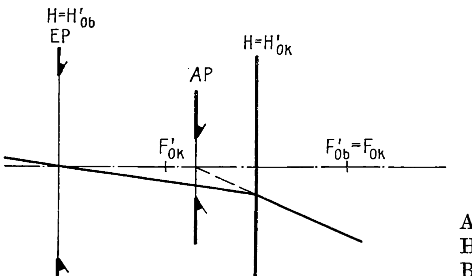


Abb. 6.57
Holländisches Fernrohr ohne visuelle Benutzung

Beim Einbau eines afokalen Systems vom Typ des holländischen Fernrohrs in ein Optik-Schema ohne direkte Koppelung an das Auge ist die freie Objektivöffnung Eintrittspupille und Öffnungsblende; die Austrittspupille ist virtuell und liegt zwischen Objektiv und Okular. Als Feldblende und Austrittsluke wirkt der freie Okulardurchmesser (Abb. 6.57).

6.3.2. Vergrößerung und Auflösungsvermögen

Afokales System, unendliche Objektweite. Die allgemeine Vergrößerungsformel Gl. (6.5), die die scheinbare Größe des Bildes $\tan w'_s$ und die scheinbare Größe des Objektes $\tan w_s$ mittels

$$\Gamma'_\infty = \frac{\tan w'_s}{\tan w_s} \tag{6.158}$$

miteinander verknüpft, läßt sich für das afokale astronomische Fernrohr mit unendlicher Objektweite (durch den Index gekennzeichnet) spezialisieren. Nach Abb. 6.58 ist

$$\tan w_s = -\frac{y'_{Ob}}{f'_{Ob}}, \quad \tan w'_s = \frac{y'_{Ob}}{f'_{Ok}}, \tag{6.159a, b}$$

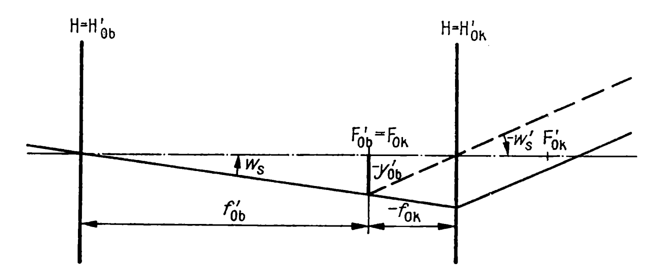


Abb. 6.58
Zur Ableitung der Vergrößerung eines afokalen Systems

also

$$\Gamma'_\infty = -\frac{f'_{Ob}}{f'_{Ok}}. \tag{6.160}$$

Die gleiche Beziehung gilt auch für das holländische Fernrohr.

Afokales System, endliche Objektweite. Beim astronomischen Fernrohr als afokales System mit endlicher Objektweite entsteht auch das Endbild im Endlichen (Abb.

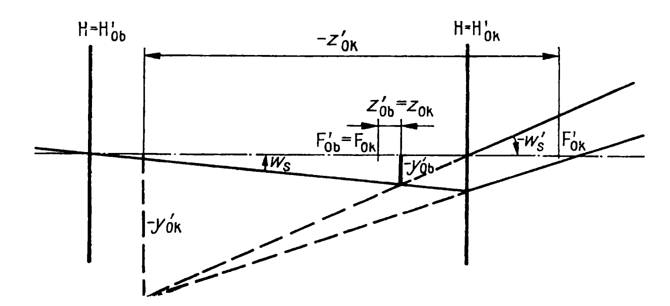


Abb. 6.59
Zur Ableitung der Vergrößerung eines afokalen Systems bei endlicher Objektweite

6.59). Nach der Newtonschen Abbildungsgleichung gilt für den Ort des Zwischenbildes

$$z'_{Ob} = -\frac{f'^2_{Ob}}{z_{Ob}}; \tag{6.161}$$

für den Ort des Endbildes

$$z'_{\mathrm{Ok}} = -\frac{f'^2_{\mathrm{Ok}}}{z_{\mathrm{Ok}}}. \qquad (6.162)$$

Es ist (Größen ohne Index gelten für das Fernrohr insgesamt)

$$z_{\mathrm{Ob}} = z, \qquad z'_{\mathrm{Ob}} = z_{\mathrm{Ok}}, \qquad z'_{\mathrm{Ok}} = z',$$

also

$$z' = \left(\frac{f'_{\mathrm{Ok}}}{f'_{\mathrm{Ob}}}\right)^2 z \qquad (6.163)$$

oder

$$z' = \frac{1}{\Gamma'^2_\infty} z. \qquad (6.164)$$

Die Bildweite $|z'|$ sollte nicht kleiner als die deutliche Sehweite sein. Daraus folgt als kleinste mögliche Entfernung des Objekts

$$z/\mathrm{m} = -0{,}25\Gamma'^2_\infty. \qquad (6.165)$$

Bei $\Gamma'_\infty = -20$ ist z. B. $z = -100$ m.

Das Intervall $z_2 - z_1$ im Objektraum wird auf das Intervall des Bildraumes

$$z'_2 - z'_1 = \frac{1}{\Gamma'^2_\infty}(z_2 - z_1) \qquad (6.166)$$

gestaucht. Im Fernrohr entsteht ein tiefenverkürzter perspektivischer Eindruck.

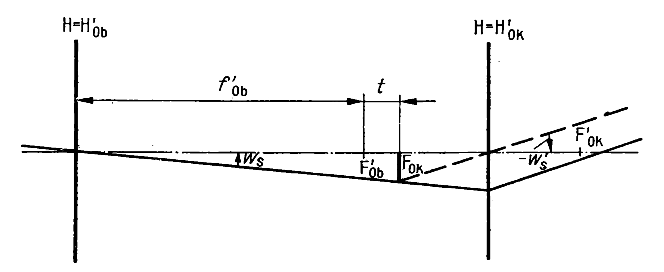


Abb. 6.60
Fernrohr mit endlicher Objektweite und unendlicher Bildweite

Fokussiertes System auf unendliche Bildweite bei endlicher Objektweite. Das Endbild entsteht auch bei einem im Endlichen liegenden Objekt im Unendlichen, wenn das optische Intervall so geändert wird, daß das Zwischenbild in der objektseitigen Brennebene des Okulars bleibt (Abb. 6.60). Das optische Intervall muß den Betrag

$$z'_{\mathrm{Ob}} = t = -\frac{f'^2_{\mathrm{Ob}}}{z} \qquad (6.167)$$

haben.

Die Vergrößerung ist damit neu zu berechnen. Es ist

$$\tan w_s = -\frac{y'_{\text{Ob}}}{f'_{\text{Ob}} + t}, \quad \tan w'_s = \frac{y'_{\text{Ok}}}{f'_{\text{Ok}}}, \tag{6.168a, b}$$

also

$$\Gamma' = -\frac{f'_{\text{Ob}} + t}{f'_{\text{Ok}}} \tag{6.169}$$

bzw.

$$\Gamma' = \Gamma'_\infty \left(1 + \frac{f'_{\text{Ob}}}{|z|}\right). \tag{6.170}$$

Nur, wenn nicht mehr $|z| \gg f'_{\text{Ob}}$ gilt, weicht die Vergrößerung merklich von Γ'_∞ ab.

Vergrößerung und Pupillenabbildungsmaßstab. Nach Abb. 6.61 beträgt für $z = \infty$ der Abbildungsmaßstab der Pupillen

$$\beta'_{\text{p}} = \frac{\varrho'_{\text{p}}}{\varrho_{\text{p}}} = -\frac{f'_{\text{Ok}}}{f'_{\text{Ob}}} = \frac{1}{\Gamma'_\infty} \tag{6.171}$$

und nach Abb. 6.62 für $z \neq \infty$, aber $z' = \infty$

$$\beta'_{\text{p}} = -\frac{f'_{\text{Ok}}}{f'_{\text{Ob}} + t} = \frac{1}{\Gamma'}. \tag{6.172}$$

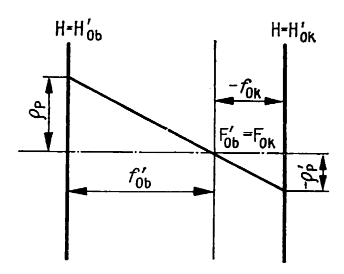


Abb. 6.61
Zur Ableitung des Pupillenmaßstabs für unendliche Objektweite

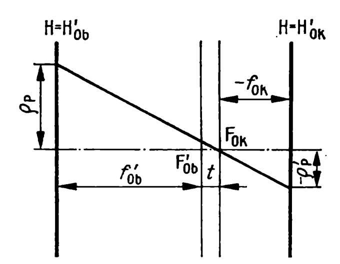


Abb. 6.62
Zur Ableitung des Pupillenmaßstabs für endliche Objektweite

Es wird in beiden Fällen

$$\Gamma' \beta'_{\text{p}} = 1. \tag{6.173}$$

Diese Beziehung stellt die Grundlage für ein Verfahren zur Messung der Vergrößerung dar. Sie gilt nicht für das holländische Fernrohr mit visuellem Gebrauch. Sie ist aber statt dessen anwendbar für die Lukenabbildung, wenn die Eintrittsluke mit der freien Objektivöffnung zusammenfällt:

$$\Gamma' \beta'_{\text{L}} = 1. \tag{6.174}$$

Bei einem binokularen holländischen Fernrohr ist wegen der Pupillendistanz der Augen der Objektivdurchmesser auf etwa 50 mm···60 mm begrenzt. Die Austrittsluke hat den Durchmesser

$$2\varrho'_{\mathrm{L}} = \frac{2\varrho_{\mathrm{L}}}{\Gamma'}. \tag{6.175}$$

Bei hohen Vergrößerungen würde die Austrittsluke sehr klein. Deshalb sollte die Vergrößerung des binokularen Fernrohrs nicht größer als etwa $\Gamma' = 7$ sein. Es ist z. B. mit $2\varrho_{\mathrm{L}} = 56$ mm und $\Gamma' = 7$ nur $2\varrho'_{\mathrm{L}} = 8$ mm.

Ausgleich von Fehlsichtigkeit. Nach Gl. (6.169) beträgt die Entfernung, auf die ein um D Dioptrien fehlsichtiges oder akkommodiertes Auge eingestellt ist

$$a_{\mathrm{A}}/\mathrm{mm} = \frac{1000}{D/\mathrm{dpt}} - 13{,}3. \tag{6.176}$$

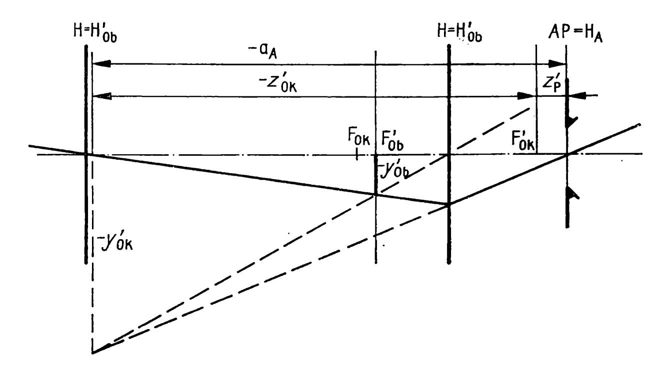


Abb. 6.63
Zur Berechnung des optischen Intervalls bei Fehlsichtigkeit und bei Akkommodation

Das Okular ist bei der Verwendung des Fernrohrs mit einem fehlsichtigen Auge so zu verschieben, daß sein Endbild mit der Einstellentfernung des Auges zusammenfällt. Daraus folgt (Abb. 6.63)

$$-z'_{\mathrm{Ok}} + z'_{\mathrm{p}} = -a_{\mathrm{A}}. \tag{6.177}$$

(Dabei haben wir näherungsweise angenommen, daß die Austrittspupille des Fernrohrs am Ort der objektseitigen Hauptebene des Auges liegt.)

Mit

$$z'_{\mathrm{Ok}} = -\frac{f'^2_{\mathrm{Ok}}}{t}, \qquad z'_{\mathrm{p}} = \frac{f'^2_{\mathrm{Ok}}}{f'_{\mathrm{Ob}}}$$

folgt daraus

$$t/\mathrm{mm} = \frac{f'^2_{\mathrm{Ok}}/\mathrm{mm}^2}{\dfrac{1000}{D/\mathrm{dpt}} - 13{,}3 - \dfrac{f'_{\mathrm{Ok}}/\mathrm{mm}}{\Gamma'_\infty}}. \tag{6.178}$$

Praktisch kann

$$\left|\frac{1000}{D/\mathrm{dpt}}\right| \gg 13{,}3 + \frac{f'_{\mathrm{Ok}}/\mathrm{mm}}{|\Gamma'_\infty|}$$

angenommen werden, so daß

$$t/\mathrm{mm} = 0{,}001(f'^2_{\mathrm{Ok}}/\mathrm{mm}^2)\,(D/\mathrm{dpt}) \tag{6.179}$$

ist.

Die Dioptrieneinstellung des Okulars kann linear in Dioptrien Fehlsichtigkeit geteilt werden.

Akkommodation und Kurzsichtigkeit erfordern ein negatives, Weitsichtigkeit erfordert ein positives optisches Intervall.

Akkommodation auf die deutliche Sehweite bedeutet $D = -4$ dpt. Bei einem Okular mit $f'_{\mathrm{Ok}} = 25$ mm beträgt das erforderliche optische Intervall $t = -2{,}5$ mm.

Auflösungsvermögen. Beim astronomischen Fernrohr wird das Auflösungsvermögen durch den objektseitigen Winkel σ charakterisiert, unter dem zwei auflösbare Punkte erscheinen müssen. In der Zwischenbildebene erhalten wir von beiden

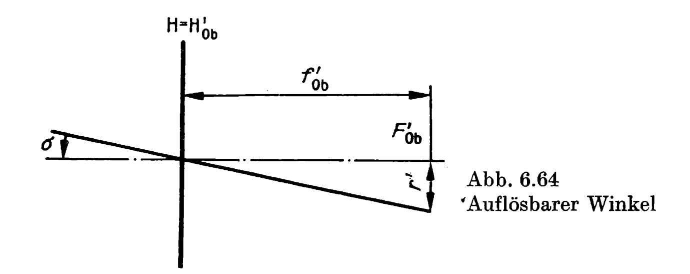


Abb. 6.64
Auflösbarer Winkel

Punkten ein Beugungsbild. Da die Lichtbündel inkohärent zueinander sind, überlagern sich die Intensitäten der Beugungsbilder. Nach Abb. 6.64 und Gl. (4.282) wird im Zwischenbild des Fernrohrs die Strecke

$$r' = 1{,}22\lambda k$$

aufgelöst. Es ist (Abb. 6.64)

$$\sigma \approx \tan\sigma = \frac{r'}{f'_{\mathrm{Ob}}}, \qquad k = \frac{1}{K} \qquad (K = \text{Öffnungsverhältnis}), \tag{6.180a, b}$$

also

$$\sigma = 1{,}22\,\frac{\lambda}{f'_{\mathrm{Ob}}K}. \tag{6.181}$$

Großes Öffnungsverhältnis und große Objektivbrennweite sind günstig für ein gutes Auflösungsvermögen.

Wegen der Kleinheit der auflösbaren Winkel ist

$$\Gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma}.$$

Mit σ nach Gl. (6.181) und $K = 2\varrho_p/f'_{Ob}$ ergibt sich

$$\Gamma' = \frac{\sigma'\varrho_p}{0{,}61\lambda}. \tag{6.182}$$

Bei $\lambda = 500$ nm und $1' \leqq |\sigma'| \leqq 4'$ ist

$$0{,}96\varrho_p/\text{mm} \leqq |\Gamma'_f| \leqq 3{,}84\varrho_p/\text{mm}. \tag{6.183}$$

Außerdem gilt mit den gleichen Werten nach Gl. (6.173)

$$1\ \text{mm} \geqq \varrho'_p \geqq 0{,}26\ \text{mm}. \tag{6.184}$$

(ϱ'_p ist der Radius der Austrittspupille des gesamten Fernrohrs.)

$|\Gamma'_f|$ ist die förderliche Vergrößerung, bei der das Auflösungsvermögen des Fernrohrs und des Auges günstig angepaßt sind.

Bei $\sigma' = 1'$ gilt näherungsweise

$$|\Gamma'_f| = \varrho_p/\text{mm} \quad \text{und} \quad \varrho'_p = 1\ \text{mm}.$$

Es liegt dann die förderliche Vergrößerung im engeren Sinne vor.

Von der Normalvergrößerung spricht man beim astronomischen Fernrohr, wenn dessen Austrittspupille und die Augenpupille gleichen Durchmesser haben. Beim Schulfernrohr des VEB Carl Zeiss JENA liegt die Vergrößerung bei $\Gamma' = -21$ bis -140, die förderliche Vergrößerung beträgt $|\Gamma'_f| = 30\cdots120$. Es ist mit einem Objektiv ausgerüstet, dessen Eintrittspupille den Durchmesser $2\varrho_p = 63$ mm hat. Bei $\lambda = 516{,}4$ nm folgt aus Gl. (6.181) für den auflösbaren Winkel $\sigma = 10^{-5} \mathrel{\hat{=}} 2''$. Dieser Wert stellt den theoretischen Grenzfall dar. Abbildungsfehler, Zentrierfehler, Luftunruhe u. a. setzen praktisch das Auflösungsvermögen herab. Zum Vergleich seien einige Zahlen angegeben. So beträgt der größte scheinbare Äquatordurchmesser der Sonne 32′ 36″, des Mars 25,1″ und des Neptun 2,4″. Das Spiegelfernrohr des Mt. Palomar mit $2\varrho_p = 5$ m hat die förderliche Vergrößerung $|\Gamma'_f| = 2400\cdots9600$. Es löst bei $\lambda = 500$ nm theoretisch den Winkel $\sigma = 1{,}22 \cdot 10^{-7}$ auf. Unter diesem Winkel würden die Endpunkte eines Stabes mit 1 m Länge in ca. 8200 km Entfernung erscheinen.

6.3.3. Fernrohrleistung

Begriffe. Die Vergrößerung und das Auflösungsvermögen kennzeichnen die Leistungsfähigkeit des Fernrohrs noch nicht ausreichend. Das liegt besonders daran, daß die Benutzungsart, die Objektleuchtdichte und -farbe sowie das Zusammenspiel mit den physiologisch-optischen Eigenschaften des Auges stark wechselnden Bedingungen unterworfen sind.

Als weitere Kennzahl wird deshalb die Sehschärfe eingeführt. Die Sehschärfe W_A ist der Kehrwert des visuell auflösbaren Sehwinkels w_A.

$$W_A = \frac{1}{w_A}. \tag{6.185}$$

Als Fernrohrleistung wird definiert:

> Die Fernrohrleistung ist das Verhältnis aus der Sehschärfe mit Fernrohr und der Sehschärfe ohne Fernrohr.

$$A = \frac{W'_A}{W_A}. \tag{6.186}$$

Beim Tagessehen ist die Austrittspupille des Fernrohrs im allgemeinen größer als die Augenpupille, deren Durchmesser bei großen Objektleuchtdichten etwa 2 mm beträgt. Die Fernrohrleistung ist dann der Vergrößerung proportional, d. h., es ist

$$A = \eta\, |\Gamma'|. \tag{6.187}$$

Die Größe η ist der Nutzungsgrad des Fernrohrs.

Messungen an unvergüteten Feldstechern ergaben z. B. die Werte der Tab. 6.13 (nach [9]). Die Vergrößerung $|\Gamma'| = 8$ ist ungefähr die Grenze für freihändiges Beobachten.

Tabelle 6.13
Fernrohrleistung und Nutzungsgrad von Feldstechern

$\|\Gamma'\| \times 2\varrho_p$	A	η (aufgelegt)	A	η (freihändig)
6 × 30	5,02	0,84	3,95	0,66
8 × 30	6,40	0,80	5,00	0,62
7 × 50	6,48	0,93	4,55	0,65
10 × 50	9,12	0,91	5,62	0,56
15 × 60	11,75	0,78	6,48	0,43

Beim Dämmerungssehen bzw. Nachtsehen (Umfeldleuchtdichte unter 1 asb) ist die Austrittspupille des Fernrohrs kleiner als die Augenpupille. Es gilt:

$$\text{Augenpupillendurchmesser} > 2\varrho'_p > 2\text{ mm}.$$

Durch experimentelle und theoretische Untersuchungen auf der Grundlage der physiologischen Optik wurde für die Fernrohrleistung

$$A = \eta(2\varrho_p)^{2m}\, |\Gamma'|^{1-2m} \tag{6.188}$$

gefunden. Die empirischen Konstanten η und m haben folgende Werte:

$L > 1$ asb	(Tagessehen)	$m = 0$
$0{,}01$ asb $< L < 1$ asb	(mittlere Dämmerung)	$m \approx 0{,}25,\ \eta \approx 0{,}3$
$L < 10^{-3}$ asb	(Dunkelsehen)	$m \approx 0{,}5.$

Im Bereich der mittleren Dämmerung gilt damit

$$A = 0{,}3\sqrt{2\varrho_p\, |\Gamma'|}. \tag{6.189}$$

Die Größe

$$Z = \sqrt{2\varrho_p |\Gamma'|} \tag{6.190}$$

ist die Dämmerungszahl des Fernrohrs. Ein Fernrohr mit $2\varrho_p = 30$ mm und $|\Gamma'| = 6$ hat die Dämmerungszahl $Z = 13{,}4$ und die Fernrohrleistung $\Lambda \approx 4$.

Beim Dunkelsehen hängt die Fernrohrleistung nicht von der Vergrößerung, aber linear vom Durchmesser der Eintrittspupille ab.

Lichtstärke bei ausgedehnten Objekten. Für die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut ist die Lichtstärke in der Austrittspupille bestimmend. Diese beträgt

$$I' = L' \cdot \text{(Fläche der Austrittspupille)},$$

also

$$I' = \frac{1}{4}\,\pi L'(2\varrho_p')^2. \tag{6.191}$$

Die Größe $(2\varrho_p')^2$ wurde früher als geometrische Fernrohrlichtstärke bezeichnet. Davon sollte jedoch Abstand genommen werden, weil es sich um eine rein geometrische Größe handelt.

Ohne Lichtstromverluste im Fernrohr ist die Leuchtdichte in der Eintrittspupille gleich der Objektleuchtdichte. Die Verluste können durch den wellenlängenabhängigen Durchlaßgrad τ erfaßt werden. Es gilt dann

$$I' = \frac{\pi}{4}\,\tau L(2\varrho_p')^2. \tag{6.192}$$

Für den Ausdruck $\tau(2\varrho_p')^2$ findet man in der Literatur die Bezeichnung „physikalische Fernrohrlichtstärke".

Kleine Objekte hoher Lichtstärke stellen z. B. die Fixsterne dar. Ihr geometrisch-optisches Bild ist wesentlich kleiner als der zentrale Teil ihres Beugungsbildes in der Zwischenbildebene.

Für solche Objekte gilt der Riccosche Satz:

> Kleine Objekte hoher Lichtstärke werden erkannt, wenn der ins Auge gelangende Lichtstrom über dem Schwellenwert Φ_0 liegt.

Der Lichtstrom, den das Fernrohr von einem Stern aufnimmt und der die Beleuchtungsstärke E in der Eintrittspupille erzeugt, beträgt

$$\Phi = \pi E \varrho_p^2. \tag{6.193}$$

Fixsterne werden also wahrgenommen, wenn die von ihnen hervorgerufene Beleuchtungsstärke die Bedingung

$$E \geqq \frac{\Phi_0}{\pi \varrho_p^2} \tag{6.194}$$

erfüllt.

In erster Linie ist also der Eintrittspupillenradius für die Sichtbarkeit der Fixsterne bestimmend. Da jedoch der Schwellenwert des Lichtstroms mit der Umfeldleuchtdichte wächst, wirkt sich auch eine höhere Vergrößerung günstig aus. Die Umfeldleuchtdichte sinkt mit der Vergrößerung. Auch mit dem Fernrohr werden die Fixsterne als punktförmige Objekte nicht linear vergrößert abgebildet; es wird lediglich ihre scheinbare Helligkeit erhöht. Außerdem ist verständlich, daß z. B. am Tage bei großen Umfeldleuchtdichten der Schwellenwert Φ_0 stark heraufgesetzt ist.

6.3.4. Spezielle Fernrohre

Wir wollen noch ausgewählte Beispiele für den Einsatz der Fernrohre in der Meßtechnik angeben.

Kollimator. Der Kollimator ist hinsichtlich seiner Funktion kein Fernrohr, aber sein optisches System besteht im allgemeinen aus einem Fernrohrobjektiv. Mit dem Kollimator wird durch optische Abbildung ein unendlich fernes Objekt

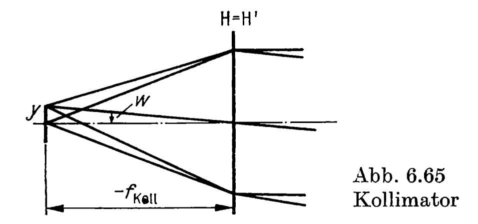


Abb. 6.65
Kollimator

erzeugt. Das Optik-Schema besteht aus dem Objekt, das eine Lochblende, eine Spaltblende, ein Fadenkreuz, eine Teilung u. a. darstellen kann und dem Objektiv, in dessen Brennebene das Objekt steht (Abb. 6.65). Die Abweichung von der Achsparallelität des Bündels beträgt ($\tan w \approx w$)

$$w = \frac{y}{f'_{\text{Ob}}}. \qquad (6.195)$$

Der Kollimator wird oft mit einer Lupe verglichen, weil diese ebenfalls das Objekt ins Unendliche abbildet. Es ist aber zu bedenken, daß der Kollimator ein kleines Feld abbildet und die Lupenvergrößerung wegen der großen Objektivbrennweite wesentlich unter Eins liegen würde.

Ablesefernrohr. Zur Ablesung von Marken und Teilungen dient das Ablesefernrohr. Es wird mit endlicher Objektweite angewendet (Abb. 6.66). Die Einstellung soll so vorgenommen werden, daß das Zwischenbild immer in der objektseitigen Brennebene des Okulars entsteht. Dazu dient entweder die Okularverstellung, wobei $a' = f'_{\text{Ob}} + t$ (t = optische Tubuslänge) ist, oder die Brennweite des Objektivs wird durch eine Linsenverschiebung stetig geändert (Innenfokussierung), so daß $a' = \bar{f}'_{\text{Ob}} + \bar{t}$ wird.

Die *Fernrohrvergrößerung* für die endliche Objektweite ist nach Gl. (6.170)

$$\Gamma' = \Gamma'_\infty \left(1 + \frac{f'_{\text{Ob}}}{|z|}\right). \tag{6.196}$$

In diesem Fall ist die Bezugssehweite ohne Fernrohr von dessen Eintrittspupille aus gemessen ($a_s = a$).

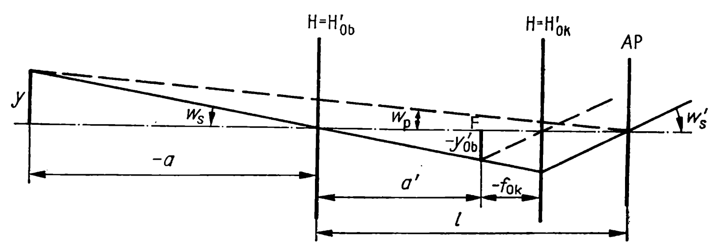


Abb. 6.66
Ablesefernrohr

Als Ablesevergrößerung bezeichnet man die Vergrößerung, bei der die Bezugssehweite ohne Fernrohr von dessen Austrittspupille aus gemessen wird ($a_s = a - l$). Das hat offenbar Bedeutung, wenn die Betrachtungsentfernung so klein ist, daß l nicht mehr gegenüber $|a|$ zu vernachlässigen ist. Wegen

$$\tan w'_s = \frac{y'_{\text{Ob}}}{f'_{\text{Ok}}}, \tag{6.197}$$

$$\tan w_s = \frac{y}{-a + l} \tag{6.198}$$

gilt

$$\Gamma'_{\text{Abl}} = \frac{y'_{\text{Ob}}(-a + l)}{f'_{\text{Ok}} y}. \tag{6.199}$$

Weiter ist

$$\frac{y'_{\text{Ob}}}{y} = \frac{a'}{a}, \tag{6.200}$$

also

$$\Gamma'_{\text{Abl}} = \frac{a'(-a + l)}{f'_{\text{Ok}} a} = -\frac{f'_{\text{Ob}} + t}{f'_{\text{Ok}}} \cdot \frac{a - l}{a}. \tag{6.201}$$

Daraus folgt mit Gl. (6.169)

$$\Gamma'_{\text{Abl}} = \Gamma' \frac{a - l}{a}. \tag{6.202}$$

Schließlich kann das Fernrohr wie ein Mikroskop mit großer Objektweite angesehen werden, wenn Marken gemessen werden sollen. Die Bezugssehweite ist dann die

deutliche Sehweite. Mit

$$\tan w'_s = \frac{y'_{Ob}}{f'_{Ok}}, \qquad \tan w_d = -\frac{y}{a_d} \tag{6.203}$$

und Gl. (6.200) erhält man

$$\Gamma'_M = -\Gamma' \frac{250}{a/\text{mm}}. \tag{6.204}$$

Richtungsmessung. Zur Messung der Winkel, die zwei Achsen miteinander bilden, verwendet man die Kombination aus Kollimator und Fernrohr (Abb. 6.67). Die Marke des Kollimators wird beleuchtet. Bei den kleinen Winkeln gilt für die Markenversetzung $y'_{Ob} = -wf'_{Ob}$. Eine Parallelverschiebung des Fernrohrs ergibt keinen Meßfehler, sondern lediglich eine Randabschattung.

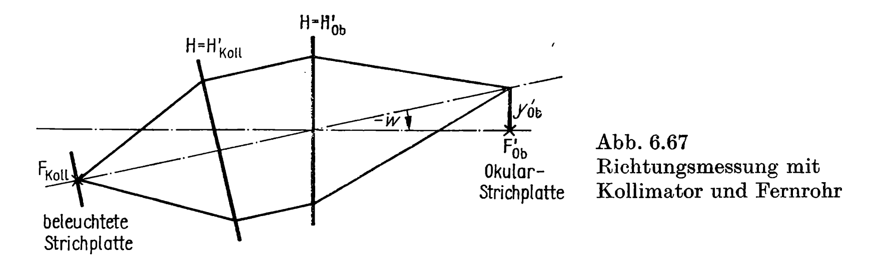


Abb. 6.67
Richtungsmessung mit Kollimator und Fernrohr

Fluchtungsmessung. Zur Messung der seitlichen Versetzung zweier Achsen in einer vorgegebenen Ebene, beleuchtet der Kollimator lediglich eine vor seinem Objektiv angebrachte Strichmarke. Es ist ein Ablesefernrohr zu verwenden, das auf die Strichmarke eingestellt wird (Abb. 6.68).

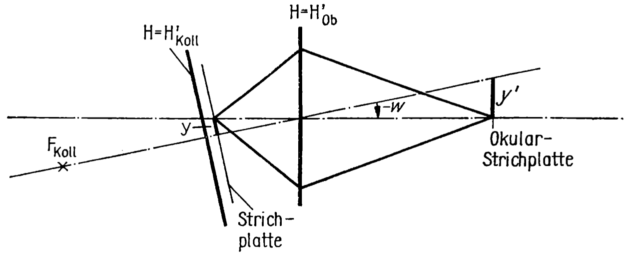


Abb. 6.68
Fluchtungsmessung mit Kollimator und Fernrohr

Das Autokollimationsfernrohr vereinigt Kollimator und Fernrohr in einem Gerät (Abb. 6.69). Das Fernrohrobjektiv dient gleichzeitig als Kollimatorobjektiv. Die relative Lage eines Planspiegels gegenüber der optischen Achse läßt sich genau messen. Wegen der Reflexion gilt

$$y'_{Ob} = -f'_{Ob} \cdot 2w. \tag{6.205}$$

Das Zielfernrohr, wie es z. B. bei Gewehren angewendet wird, zeichnet sich durch ein Umkehrsystem und die große Entfernung der Austrittspupille aus (Abb. 6.70). In der Feldblende befindet sich das sogenannte Abkommen zum Zielen. Die Fokussierung auf die endliche Objektweite wird mittels Verschieben des Umkehrsystems vorgenommen.

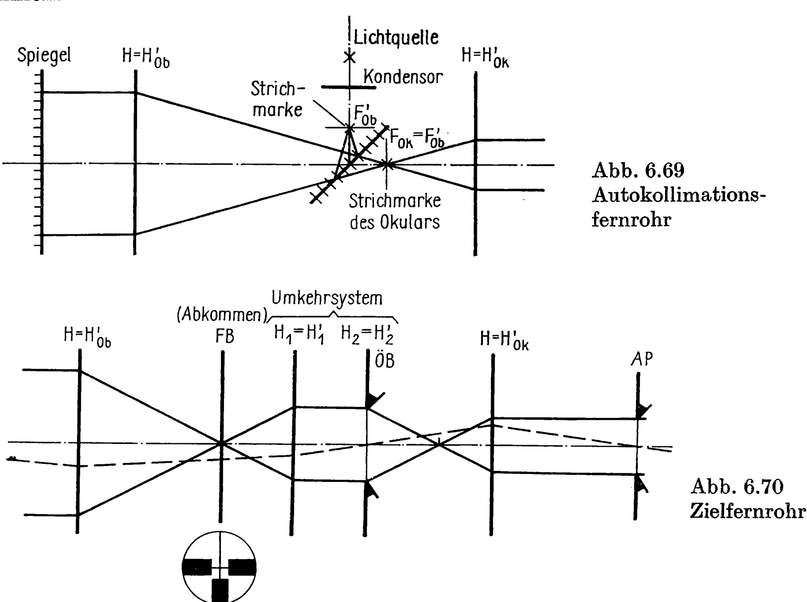


Abb. 6.69
Autokollimationsfernrohr

Abb. 6.70
Zielfernrohr

Gewehrzielfernrohre haben Vergrößerungen zwischen $\Gamma' = 2$ und 8, die Austrittspupille hat 6 bis 8 mm Durchmesser und ist vom Okular etwa 80 bis 100 mm entfernt.

6.4. Fotografie

6.4.1. Abbildungsarten

Die fotografischen Objektive gehören zu den objektiven optischen Instrumenten, weil das von ihnen erzeugte Bild im allgemeinen nicht unmittelbar betrachtet wird.

> Die Aufgabe der Fotoobjektive besteht darin, einen Ausschnitt der Einstellebene so in die Auffangfläche reell abzubilden, daß das Bild die für den jeweiligen Anwendungszweck erforderlichen Qualitätsmerkmale aufweist.
> In den meisten Fällen ist die Auffangfläche eben.

In diesem Abschnitt idealisierten wir ein Fotoobjektiv als ein sammelndes optisches System, das ideal abbildet. Das Bild eines Objektes, das sich in der unendlich fernen

Einstellebene befindet, liegt in der Brennebene. Der Abbildungsmaßstab beträgt $\beta' = 0$. Ein im Endlichen liegender Gegenstand wird mit dem Maßstab

$$\beta' = -\frac{z'}{f'} = -\frac{f}{z}$$

abgebildet. β' ist stets negativ, das Bild also umgekehrt. Die Entfernung

$$z' = -\beta' f'$$

der Auffangebene von der Brennebene wird optische Kameralänge genannt.

Je nach dem Abbildungsmaßstab beziehungsweise der optischen Kameralänge unterscheidet man verschiedene Aufnahmearten.

Makroaufnahmen. Bei einer Makroaufnahme ist der Betrag des Abbildungsmaßstabes

$$|\beta'| \leqq 1.$$

Wir unterteilen weiter:

Bei Fernaufnahmen gilt

$$\beta' = 0 \quad \text{und} \quad z' = 0.$$

Die Abbildung ist einstufig, d. h., sie wird durch ein optisches System vermittelt.

Bei Normalaufnahmen gilt

$$0 < |\beta'| \leqq 0{,}1 \quad \text{und} \quad 0 < z' \leqq 0{,}1 f'.$$

Die Abbildung ist einstufig. Die normale Entfernungseinstellung der Kamera ist ausreichend.

Bei Nahaufnahmen gilt

$$0{,}1 < |\beta'| \leqq 1 \quad \text{und} \quad 0{,}1 f' < z' \leqq f'.$$

Die Abbildung ist einstufig. Die Kamera muß entweder mit einem Objektiv kurzer Brennweite ausgestattet sein, oder die optische Kameralänge ist über den normalen Auszug hinaus zu vergrößern. Das kann z. B. durch einen sogenannten doppelten Auszug oder durch Zwischenringe erreicht werden.

Mikroaufnahmen. Bei einer Mikroaufnahme ist der Betrag des Abbildungsmaßstabs größer als Eins.

Wir unterteilen weiter:

Bei Lupenaufnahmen gilt

$$1 < |\beta'| \leqq 100 \quad \text{und} \quad f' < z' \leqq 100 f'.$$

Zur Aufnahme dient die einstufige Lupenkamera mit stark veränderlichem Auszug und mit einem kurzbrennweitigen mikrofotografischen Objektiv. Dieses ist für die geringe Objektweite korrigiert.

Bei Mikroskopaufnahmen gilt im allgemeinen

$$20 \leqq |\beta'| \leqq 2000 \quad \text{und} \quad 20f' \leqq z' \leqq 2000f'.$$

(In Ausnahmefällen, z. B. beim „Doppelmikroskop“ nach LAU, kann $|\beta'| > 2000$ sein.)

Zur Aufnahme wird die zweistufig abbildende Mikrokamera verwendet. Diese besteht aus einem zusammengesetzten Mikroskop und einer speziellen Kamera.

6.4.2. Bündelbegrenzung

Begrenzung der Öffnung. Die Öffnungsblende befindet sich stets im optischen System des Fotoobjektivs oder in seiner unmittelbaren Nähe. Bei einfachen Kameras können klappbare oder drehbare Lochblenden vorkommen. Im allgemeinen werden Irisblenden verwendet, mit denen die stufenlose Einstellung des Durchmessers möglich ist. Wegen der geringen Entfernung der Öffnungsblende von den Linsengruppen des optischen Systems ist im allgemeinen bei einer Vorderblende die Austrittspupille und bei einer Hinterblende die Eintrittspupille virtuell. Bei einer Mittelblende sind die Eintritts- und die Austrittspupille virtuelle Bilder, die in der Nähe der Hauptflächen des Objektivs liegen. Dadurch weicht der Abbildungsmaßstab der Pupillenabbildung

$$\beta'_{\mathrm{P}} = \frac{\varrho'_{\mathrm{P}}}{\varrho_{\mathrm{P}}}$$

im allgemeinen wenig von Eins ab.

Tabelle 6.14
Abbildungsmaßstab der Pupillen

Objektivtyp	β'_{P}
Biotessar	0,92
Biotar	1,4
Sonnar	0,63
symmetrische Objektive	1,0

Tabelle 6.14 enthält einige Beispiele für β'_{P}. Als Meßgröße für die Öffnung dient bei Fotoobjektiven die Blendenzahl

$$k = \frac{f'}{2\varrho_{\mathrm{P}}}.$$

Diese wird als Systemkonstante angegeben, obwohl sie nur bei unendlicher Objektweite die wirksame Öffnung angibt.

(Es sei darauf hingewiesen, daß bei der Berechnung des Eintrittspupillendurchmessers für ausgeführte Objektive wegen der zulässigen Toleranz der Brennweite nicht die aufgedruckten Werte für k und f' verwendet werden dürfen. Die Berechnung von k setzt die Messung von ϱ_{P} und f' voraus.)

Für endliche Objektweiten wird die wirksame Öffnung durch die numerische Apertur $A = \sin u$ (für $n = 1$) beschrieben.

Nach Abb. 6.71 ist

$$\tan u = -\frac{\varrho_p}{p}.$$

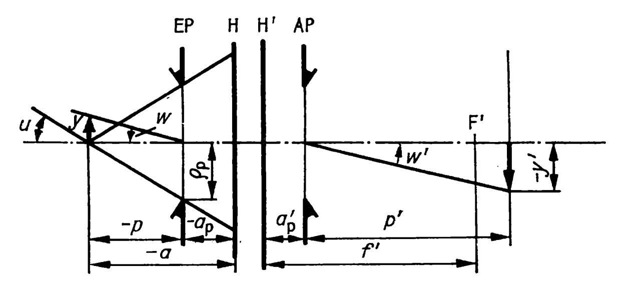


Abb. 6.71
Zur Berechnung der numerischen Apertur und des Feldwinkels eines Fotoobjektivs

Daraus folgt

$$\sin u = -\frac{\varrho_p}{p} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varrho_p}{p}\right)^2}}. \tag{6.206}$$

Für $\varrho_p \ll p$ gilt angenähert

$$\sin u = -\frac{\varrho_p}{p} \tag{6.207}$$

oder

$$\sin u = -\frac{f'}{2kp} = -\frac{f'}{2k(a - a_p)}. \tag{6.208}$$

Weiter ist

$$a = f'\left(\frac{1}{\beta'} - 1\right) \quad \text{und} \quad a_p = f'\left(\frac{1}{\beta'_p} - 1\right).$$

Damit geht Gl. (6.208) über in

$$\sin u = \frac{\beta'}{2k\left(\frac{\beta'}{\beta'_p} - 1\right)}. \tag{6.209}$$

Der Zusammenhang zwischen der numerischen Apertur und dem Abbildungsmaßstab ist in der Abb. 6.72 für $\beta'_p = 1$ graphisch dargestellt.

Die Begrenzung des Feldes. Beim Einsatz des Fotoobjektivs in der Kamera stellt die in deren Filmbühne befindliche rechteckige oder quadratische Maske die Feldblende dar. Diese ist damit auch Austrittsluke, und das Feld ist scharf begrenzt. Die Eintrittsluke fällt in die Einstellebene.

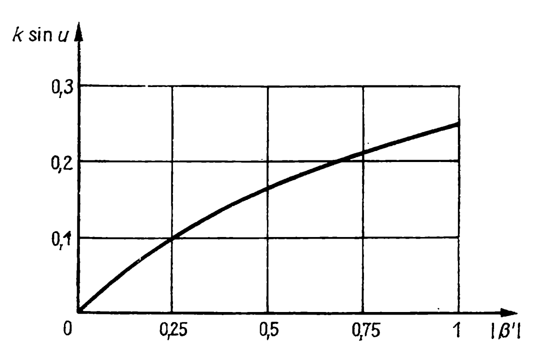


Abb. 6.72
Zusammenhang zwischen numerischer Apertur und Abbildungsmaßstab

$w' = 0°$ $w' = 13°$ $w' = 26°$

Abb. 6.73
Eintrittspupille bei Randabschattung

In den meisten Fällen sind eine oder mehrere Linsenfassungen zusätzlich für die schrägen Bündel begrenzend wirksam. Es liegt dann Randabschattung vor.

Abb. 6.73 zeigt für ein Beispiel, welche Form die wirksame Eintrittspupillenfläche bei verschiedenen Feldwinkeln haben kann.

Bei einem im Unendlichen liegenden Gegenstand gilt für den Tangens des halben Bildwinkels

$$\tan w' = -\frac{y'}{p'}. \tag{6.210}$$

Für das Winkelverhältnis ergibt sich

$$\gamma'_p = \frac{\tan w'}{\tan w} = \frac{f}{z'_p} = \frac{f'}{p'}. \tag{6.211}$$

Daraus folgt mit Gl. (6.210) für den Tangens des halben Objektwinkels

$$\tan w = -\frac{y'}{f'}. \tag{6.212}$$

Abb. 6.74 enthält den Zusammenhang zwischen Objektwinkel und Bildfelddiagonale sowie die zugeordneten Brennweiten für einige wichtige Bildformate.

Bei Objektiven, deren Pupillen mit den Hauptebenen zusammenfallen, sind Objekt- und Bildwinkel gleich (Definition der Knotenpunkte).

Allgemein gilt

$$\tan w = \beta'_p \tan w'. \tag{6.213}$$

Als Standardobjektive werden Objektive bezeichnet, deren Brennweite etwa in den Bereichen

$$1{,}8y'_{max} \leqq f' \leqq 2{,}5y'_{max} \quad \text{(Fotoobjektive)},$$

$$2{,}0y'_{max} \leqq f' \leqq 2{,}7y'_{max} \quad \text{(Kinoobjektive)}$$

liegt. Die Brennweite hat also ungefähr die Größe der Bildfelddiagonale.

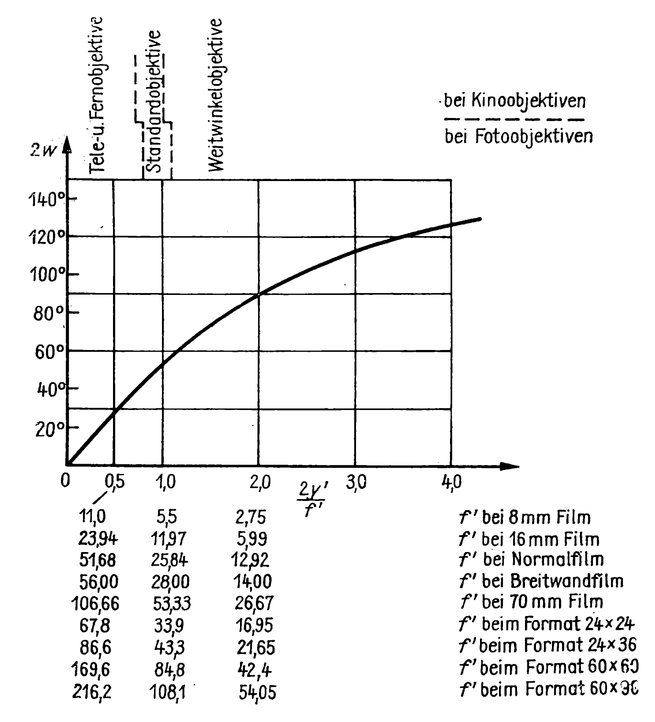


Abb. 6.74
Zusammenhang zwischen Objektwinkel und Bildfelddiagonale

Die Brennweite der Fernobjektive und der Teleobjektive ist merklich größer als die Bildfelddiagonale:

$$f' > 2{,}5y'_{max} \quad \text{(Fotoobjektive)},$$

$$f' > 2{,}7y'_{max} \quad \text{(Kinoobjektive)}.$$

Unter einem Fernobjektiv verstehen wir ein System, das ebenso aufgebaut ist wie ein Standardobjektiv. Die bildseitige Hauptebene liegt normalerweise im Objektiv, so daß die optische Baulänge größer als die Brennweite ist. Fernobjektive haben infolgedessen relativ große Baulängen.

Das Teleobjektiv ist ein System aus einem sammelnden Glied und einem zerstreuenden Glied. Der Abstand beider Glieder liegt in der Größenordnung ihrer Brennweiten. Durch diesen Aufbau entsteht ein System, bei dem die optische Baulänge kleiner als die Brennweite ist. Die optische Baulänge eines zweigliedrigen Systems beträgt (Abb. 6.75)

$$L_{opt} = e_1' + a_{2F'}'. \tag{6.214}$$

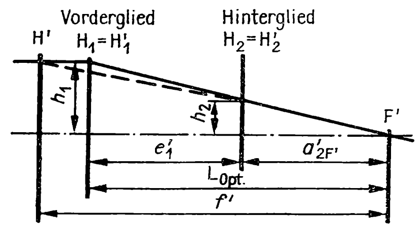


Abb. 6.75
Optische Baulänge eines Teleobjektivs

Mit

$$a_{2F'}' = \omega_2 f', \tag{6.215}$$

$$e_1' = (1 - \omega_2) f_1'$$

und

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{\omega_2}{f_2'}$$

ergibt sich

$$\frac{L_{opt}}{f'} = 1 + \frac{f_1'}{f_2'} \omega_2(1 - \omega_2). \tag{6.216}$$

Wegen $f_1' > 0$, $f_2' < 0$ und $0 < \omega_2 < 1$ ist

$$\frac{L_{opt}}{f'} < 1.$$

L_{opt}/f' hat den kleinsten Wert bei $\omega_2 = 0{,}5$.

Die Brennweiten der Objektive mit langer Schnittweite und der Weitwinkelobjektive sind merklich kleiner als die Bildfelddiagonalen:

$$f' < 1{,}8 y_{max}' \text{ (Fotoobjektive)},$$

$$f' < 2{,}0 y_{max}' \text{ (Kinoobjektive)}.$$

Bei einem Weitwinkelobjektiv ist die bildseitige Schnittweite im allgemeinen sehr klein. Das kann zu Platzmangel beim Einbau von optischen Bauelementen zwischen Objektiv und Bildebene führen. Dieses Problem tritt z. B. bei Spiegelreflexkameras auf, bei denen der klappbare Spiegel eine bestimmte Mindestschnittweite des Objektivs erfordert. Es werden deshalb auch kurzbrennweitige Objektive mit langer Schnittweite benötigt, die also im Prinzip einen besonderen Typ des Weitwinkelobjektivs darstellen.

Die Objektive mit langer Schnittweite sind dadurch charakterisiert, daß sie aus einer zerstreuenden Frontlinse und einem sammelnden Glied bestehen. Nach Gl. (6.215) gilt für ein zweigliedriges System $a'_{2F'} = \omega_2 f'$. Mit einem entsprechenden Wert für ω_2 läßt sich erreichen, daß $a'_{2F'}$ wesentlich größer als die Brennweite ist (Abb. 6.76). Die Einfallshöhe des Randstrahls wird wegen $\omega_2 > 1$ am sammelnden Glied besonders groß. Deshalb ist dieses unter anderem für die Korrektion des Öffnungsfehlers mehrlinsig auszuführen.

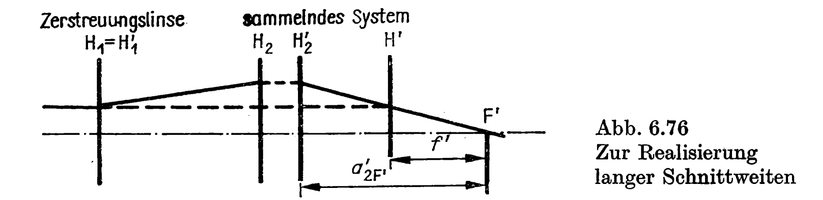


Abb. 6.76
Zur Realisierung langer Schnittweiten

6.4.3. Perspektive und Schärfentiefe

Perspektive. Die grundlegenden, die Perspektive sowie die Schärfentiefe betreffenden Definitionen und Beziehungen wurden bereits im Abschnitt 4.2.4. behandelt. Deshalb beschränken wir uns hier auf eine Zusammenfassung und auf die Anwendung bei Fotoobjektiven. Wir führen die Ergebnisse nochmals an.

— Durch die Begrenzung der Öffnung und das endliche Auflösungsvermögen der Empfänger ist es möglich, nicht nur von der Einstellebene, sondern von gewissen Raumbereichen vor und hinter ihr eine perspektivische Darstellung in der Filmebene zu erhalten. Die Öffnungsblende hat eine Tiefenwirkung für die Abbildung.

— Die Gesamtheit der von den Punkten des Objektfeldes ausgehenden Strahlenbündel ergibt in der Einstellebene die objektseitige Projektionsfigur, welche die Summe der von den Objektpunkten ausgehenden Projektionen der Eintrittspupille ist. Die objektseitige Projektionsfigur wird in die zugeordnete bildseitige Projektionsfigur abgebildet. Die letztere liegt in der Filmebene und ist die bei der fotografischen Aufnahme erhaltene perspektivische Darstellung.

— Der Betrachter projiziert auf Grund seiner Erfahrung die perspektivische Darstellung in den Raum und hat einen perspektivischen Eindruck. Dieser hängt vom Verhältnis des Sehwinkels beim Betrachten des Objekts w_s und beim Betrachten der perspektivischen Darstellung w'_s ab.

Nach Gl. (4.205) gilt

$$\gamma'_s = \frac{\tan w'_s}{\tan w_s} = \frac{vf'\left(1 - \dfrac{\beta'}{\beta'_p}\right) - v\beta'\,\Delta p}{p'_s}, \tag{6.217}$$

$\gamma'_s > 1$ tiefenverkürzter perspektivischer Eindruck,

$\gamma'_s = 1$ tiefenrichtiger perspektivischer Eindruck,

$\gamma'_s < 1$ tiefenverlängerter perspektivischer Eindruck,

(v = Nachvergrößerung der perspektivischen Darstellung,
f' und β'_p Konstanten desAufnahmeobjektivs,
β' = Abbildungsmaßstab der Aufnahme,
Δp = Entfernung der Eintrittspupille des Aufnahmeobjektivs von der Eintrittspupille des Auges bei direkter Betrachtung des Aufnahmegegenstandes,
p'_s = Betrachtungsentfernung der perspektivischen Darstellung.)

Wir diskutieren die Gl. (6.217).

— Fernaufnahmen. Bei $\beta' = 0$ ist

$$\gamma'_s = \frac{vf'}{p'_s}. \tag{6.218}$$

Δp und β'_p haben keinen Einfluß auf den perspektivischen Eindruck. Die Proportionalität zwischen γ'_s und f' führt dazu, daß γ'_s bei Tele- und bei Fernobjektiven größer, bei Weitwinkelobjektiven kleiner als bei Normalobjektiven ist. Aufnahmen mit Fernobjektiven zeigen oft einen tiefenverkürzten perspektivischen Eindruck (z. B.: Fußballtor erscheint, seitlich aufgenommen, weniger breit als bei der Betrachtung mit unbewaffnetem Auge).

— Normalaufnahmen. Mit Gl. (6.217) läßt sich ausrechnen, aus welcher — längs der optischen Achse des Aufnahmeobjektivs gemessenen — Entfernung vom Aufnahmeort Δp der Gegenstand betrachtet werden müßte, damit er mit der gleichen Perspektive erscheint wie die — eventuell nachvergrößerte — Aufnahme. Eine andere Bedeutung hat Δp nicht. Wir setzen im weiteren $\Delta p = 0$.

Der Maßstab der Pupillenabbildung β'_p hat folgenden Einfluß:

Wegen $\beta' < 0$ und $\beta'_p > 0$ wird γ'_s

bei $\beta'_p < 1$ vergrößert (tiefenverlängernde Wirkung),

bei $\beta'_p > 1$ verkleinert (tiefenverkürzende Wirkung).

Bei Fernobjektiven mit $\beta'_p < 1$, wie es bei den Sonnaren vorkommt (z. B. $\beta'_p = 0{,}63$), wird also der tiefenverkürzende Eindruck nicht so stark sein wie bei Fernobjektiven mit $\beta'_p = 1$.

Da meistens $\beta'_p \approx 1$ ist, reicht im allgemeinen die Näherung

$$\gamma'_s = \frac{vf'(1 - \beta')}{p'_s} \tag{6.219}$$

aus. Bei Normalaufnahmen mit $0 < |\beta'| < 0{,}1$ gilt

$$\frac{vf'}{p'_s} < \gamma'_s = \frac{1{,}1 \cdot vf'}{p'_s}. \tag{6.220}$$

Der endliche Abbildungsmaßstab bewirkt also eine geringe Tiefenverkürzung gegenüber der Fernaufnahme.

Beispiel: Bei einer auf 60 mm × 90 mm vergrößerten Kleinbildaufnahme ist $v = -2{,}5$. Mit $f' = 50$ mm (Standardobjektiv), $\beta' = -0{,}1$ und $p'_s = -250$ mm erhalten wir $\gamma'_s = 0{,}55$. Die Aufnahme ist tiefenverlängert. Das stört besonders bei Porträtaufnahmen („lange Nase"). Verwenden wir ein Fernobjektiv mit $f' = 100$ mm, dann wird $\gamma'_s = 1{,}1$. Für Porträtaufnahmen sind also größere Brennweiten als beim Standardobjektiv vorteilhaft.

— Diaprojektion. Die Gl. (6.217) gilt auch bei der Diaprojektion. Ein Beispiel dafür möge genügen.
  Eine Kleinbildaufnahme mit dem Biotar $f' = 58$ mm, $\beta'_p = 1{,}4$ soll auf 1800 mm Breite projiziert werden ($v = -50$). Für eine Fernaufnahme beträgt die Betrachtungsentfernung mit natürlichem perspektivischem Eindruck $p'_s = -2{,}9$ m; bei einer Normalaufnahme mit $\beta' = -0{,}05$ ist $p'_s = -3$ m.

Schärfentiefe. In der Abb. 6.77 sind die Entfernungen der Grenzen des Schärfentiefenbereichs von der Einstellebene b_l und b_r eingetragen.

Nach Abb. 6.77 gilt

$$\frac{\varrho}{\varrho_p} = \frac{-a_l + a}{-a_l + a_p} = \frac{-a - a_r}{-a_r + a_p}. \tag{6.221}$$

In den Nennern von Gl. (6.221) kann bei Fotoobjektiven a_p gegenüber a_l vernachlässigt werden.

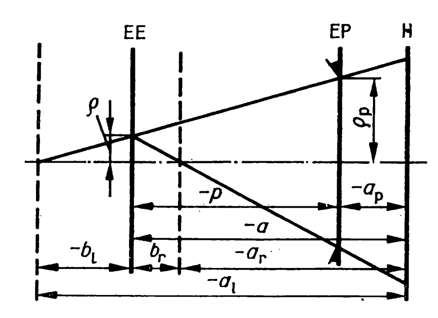


Abb. 6.77
Berechnung der Schärfentiefe

Aus Gl. (6.221) folgt nach entsprechender Umformung

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_l}\right]. \tag{6.222}$$

Mittels

$$\frac{1}{a_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_r} - \frac{1}{a_l}\right] \tag{6.223}$$

führen wir die Bezugsentfernung a_0 ein und setzen

$$\frac{a_0}{a} = m. \tag{6.224}$$

Mit Gl. (6.224) erhalten wir aus Gl. (6.222) und Gl. (6.223) durch Addition bzw. Subtraktion

$$a_l = \frac{a_0}{m-1} \quad \text{und} \quad a_r = \frac{a_0}{m+1}. \qquad (6.225\,\text{a, b})$$

Für $m = 1$ ergibt sich

$$a_l = \infty, \quad a_r = \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad a_0 = a. \qquad (6.226)$$

Daraus folgt die Bedeutung der Bezugsentfernung a_0:

> Von der Objektentfernung $a = a_0$ ab reicht der linke Schärfentiefenbereich bis ins Unendliche. Die Einstellung auf die Objektweite a_0 wird deshalb als „Naheinstellung auf Unendlich" oder „Fixfokuseinstellung" bezeichnet.

Zur Berechnung von a_0 benötigen wir die Größen a_l und a_r. Nach Gl. (4.198) haben die Grenzen des Schärfentiefenbereichs die Entfernungen

$$b_l = \frac{p}{\frac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} - 1} \quad \text{bzw.} \quad b_r = -\frac{p}{\frac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} + 1} \qquad (6.227\,\text{a, b})$$

von der Einstellebene. ϱ' ist der zulässige Zerstreuungskreisradius. Nach Abb. 6.77 ist

$$p = a - a_p, \quad b_l = a_l - a \quad \text{und} \quad b_r = a_r - a. \qquad (6.228)$$

Mit den Gl. (6.228) gehen die Gl. (6.227) über in

$$a_l = \frac{\frac{af'\,|\beta'|}{2k\varrho'} - a_p}{\frac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} - 1} \quad \text{und} \quad a_r = \frac{\frac{af'\,|\beta'|}{2k\varrho'} + a_p}{\frac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} + 1}. \qquad (6.229\,\text{a, b})$$

Es wird nach Gl. (6.223) und Gl. (6.229)

$$\frac{1}{a_0} = \frac{\frac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'}(a - a_p)}{\left[\frac{af'\,|\beta'|}{2k\varrho'}\right]^2 - a_p^2}.$$

Im Nenner kann a_p^2 vernachlässigt werden. Wir erhalten

$$a_0 = \frac{f'\,|\beta'|}{2k\varrho'} \cdot \frac{a^2}{a - a_p}.$$

Unter Verwendung von Gl. (4.56 b, c) läßt sich

$$\frac{a^2}{a - a_p} = \frac{\beta' f' \left(\frac{1}{\beta'} - 1\right)^2}{1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}} \qquad (6.230)$$

schreiben. Es gilt also

$$a_0 = -\frac{f'^2}{2k\varrho'} \cdot \frac{(1-\beta')^2}{1-\frac{\beta'}{\beta'_p}}. \qquad (6.231)$$

Wenn die Aufnahme um den Faktor v nachvergrößert wird, dann erscheint der Zerstreuungskreisdurchmesser bei der Betrachtung aus der Entfernung p'_s unter dem Winkel

$$\chi' = \frac{2v\varrho'}{p'_s}. \qquad (6.232)$$

Mit Gl. (6.232) eliminieren wir ϱ' aus Gl. (6.231), so daß

$$a_0 = -\frac{vf'\left(1-\frac{\beta'}{\beta'_p}\right)}{p'_s}\left[\frac{1-\beta'}{1-\frac{\beta'}{\beta'_p}}\right]^2 \cdot \frac{f'}{k\chi'} \qquad (6.233)$$

entsteht. Mit $\Delta p = 0$ und Gl. (6.217) wird

$$a_0 = -\gamma'_s\left[\frac{1-\beta'}{1-\frac{\beta'}{\beta'_p}}\right]^2 \cdot \frac{f'}{k\chi'}. \qquad (6.234)$$

Für praktische Zwecke genügt es, die Klammer durch Eins zu ersetzen. So erhalten wir schließlich

$$a_0 = -\gamma'_s \frac{f'}{k\chi'}. \qquad (6.235)$$

Für die Konstanten γ'_s und χ' können unterschiedliche Forderungen gestellt werden. Wir geben zwei davon an.

Für χ' wird der physiologische Grenzwinkel (etwa 1') zu

$$\chi' = \frac{1}{3000}$$

angesetzt und natürlicher perspektivischer Eindruck gefordert ($\gamma'_s = 1$). Damit wird

$$a_{0/\mathrm{m}} = -\frac{3f'/\mathrm{mm}}{k}. \qquad (6.236)$$

Es genügt im allgemeinen, die Ansprüche zu reduzieren und mit $\chi' = 1/1500$ sowie mit $\gamma'_s = 0{,}8$ zu rechnen. So wird oft bei Kleinbildobjektiven verfahren, wie z. B. beim Tessar 2,8/50. Dann gilt

$$a_{0/\mathrm{m}} = -\frac{1{,}2f'/\mathrm{mm}}{k}. \qquad (6.237)$$

Mit $f' = 50$ mm und $k = 4$ ergibt sich z. B. aus Gl. (6.237) $a_0 = -15$ m.

Zur Berechnung einer Schärfentiefentabelle können wir auch von Gl. (6.231) ausgehen und einen zulässigen Zerstreuungskreisdurchmesser vorgeben. Als Richtwert gilt

$$2\varrho' = \frac{\text{Formatdiagonale}}{1500}.$$

Die Werte nach Tab. 6.15 weichen bei den kleinen Formaten vom Richtwert ab, weil die Forderungen sonst nur schwer realisierbar wären.

Tabelle 6.15
Durchmesser des zulässigen Zerstreuungskreises für Schärfentiefentabellen, (1) *bedeutet* 16-mm-*Schmalfilm,* (2) *bedeutet* 8-mm-*Schmalfilm*

Format/mm²	$2\varrho'$/mm
90 × 120	0,100
60 × 90	0,075
60 × 60	0,060
45 × 60	0,050
24 × 36	0,033
24 × 24	0,033
18 × 24	0,025
7,5 × 10,5	0,015 (1)
3,6 × 4,8	0,010 (2)

Wir müssen das Problem der Schärfentiefe, das wir bisher nur geometrisch-optisch betrachtet haben, durch einige wellenoptische Aspekte ergänzen. Die Intensitätsverteilung im Bildraum des Objektivs wird durch die Beugung an der Öffnungsblende bestimmt. Im Abschnitt 4.4.2. wurde abgeleitet, daß bei der Abbildung von Achsenpunkten in den Entfernungen

$$b'_\mathrm{r}\ (\text{wellenoptisch}) = -b'_\mathrm{l}\ (\text{wellenoptisch}) = 2\lambda k^2 \tag{6.238}$$

von der Gaußschen Bildebene noch 80% der Intensität vorhanden sind, die im geometrisch-optischen Bildpunkt vorliegt. Diese Intensität reicht zur Bilddefinition aus. Es ist demnach nicht notwendig, die Auffangebene in die Gaußsche Bildebene zu stellen. Es besteht wellenoptisch ein Bereich der bildseitigen Einstelltiefe, der auch wellenoptische Abbildungstiefe genannt wird.

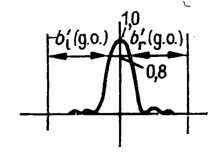


Abb. 6.78
Zur Kombination von geometrisch-optischer und wellenoptischer Abbildungstiefe

Die geometrisch-optische Abbildungstiefe ist von der um $\pm 2\lambda k^2$ aus der Gaußschen Bildebene verschobenen Auffangebene aus zu zählen (Abb. 6.78). Die geometrisch-optische Abbildungstiefe folgt aus

$$b'_\mathrm{r}\ (\text{geom.-opt.}) = -b'_\mathrm{l}\ (\text{geom.-opt.}) = \frac{f'k\chi'}{\gamma'_\mathrm{s}}. \tag{6.239}$$

Die gesamte Abbildungstiefe beträgt

$$b'_r = -b'_l = \frac{f'k\chi'}{\gamma'_s} + 2\lambda k^2. \tag{6.240}$$

Hieraus geht für $\gamma'_s = 0{,}8$, $\chi' = \dfrac{1}{1500}$ und $\lambda = 500$ nm

$$b'_r/\text{mm} = -b'_l/\text{mm} = 0{,}83 \cdot 10^{-3} f'/\text{mm} \cdot k + 10^{-3} k^2 \tag{6.241}$$

hervor. Bei kleinen Blendenzahlen ist die wellenoptische Abbildungstiefe gegenüber der geometrisch-optischen zu vernachlässigen. Die Abb. 6.79 enthält die Funktion $b'_r = f(k)$ für ein Kleinbildobjektiv mit der Brennweite $f' = 50$ mm ($\gamma'_s = 0{,}8$, $\chi' = 1/1500$).

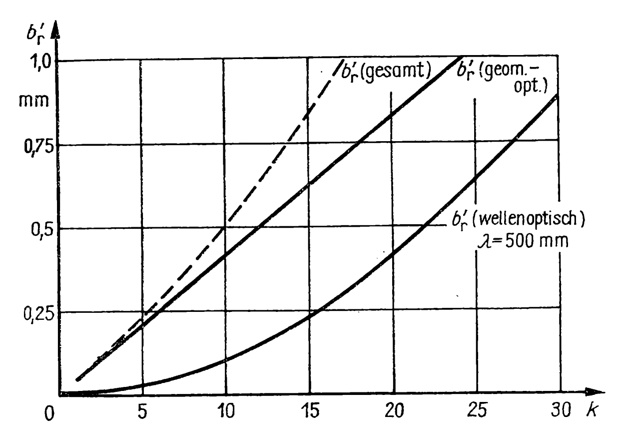


Abb. 6.79
Abbildungstiefe eines Kleinbildobjektivs

Gleichung (6.240) läßt sich nur bis zu einer bestimmten Blendenzahl anwenden. Der Radius des durch Beugung in der Gaußschen Bildebene erzeugten Zerstreuungskreises kann nach Gl. (4.282) mit

$$r' = 1{,}22\lambda k \tag{6.242}$$

abgeschätzt werden (Radius des ersten dunklen Ringes der Beugungsfigur). Bei $\lambda = 500$ nm wird

$$r'/\text{mm} = 0{,}61 \cdot 10^{-3} k. \tag{6.243}$$

Nach Gl. (6.218) und Gl. (6.232) beträgt der Radius des geometrisch-optischen Zerstreuungskreises

$$\varrho' = \frac{\chi' f'}{2\gamma'_s}, \tag{6.244}$$

woraus mit $\chi' = \dfrac{1}{1500}$ und $\gamma_s' = 0{,}8$

$$\varrho' = 0{,}42 \cdot 10^{-3} f' \tag{6.245}$$

folgt.

Wenn r' nach Gl. (6.243) größer wird als ϱ' nach Gl. (6.245), dann ist der beugungsbedingte Zerstreuungskreis größer als der geometrisch-optisch zulässige Zerstreuungskreis.

Das ist ab der Blendenzahl

$$k = 0{,}69 f'/\text{mm} \tag{6.246}$$

der Fall. Bei $f' = 50$ mm ist

$$\varrho' = 0{,}02 \text{ mm} \quad \text{und} \quad k = 34{,}5.$$

Für größere Blendenzahlen, als sie durch Gl. (6.246) gegeben sind, hat es keinen Sinn, den geometrisch-optischen Zerstreuungskreis kleiner als den Radius des Beugungsscheibchens zu fordern. Aus

$$\frac{\varrho_p'}{\varrho'} = \frac{p'}{b_r'} \quad \text{sowie} \quad \varrho' = r'$$

ergibt sich mit Gl. (6.242) und nach Addition von Gl. (6.238)

$$b_r' = -b_l' = 2{,}44\lambda k^2 + 2\lambda k^2 = 4{,}44\lambda k^2, \tag{6.247}$$

beziehungsweise bei $\lambda = 500$ nm

$$b_r'/\text{mm} = -b_l'/\text{mm} = 2{,}22 \cdot 10^{-3} k^2. \tag{6.248}$$

Allerdings ist dann nach Gl. (6.246) notwendig, daß für die Brennweite des Objektivs

$$f' \geqq 1{,}45 k \tag{6.249}$$

gilt ($\lambda = 500$ nm). Sonst erscheint der Zerstreuungskreis bei der Betrachtung des — eventuell nachvergrößerten ($\gamma_s' = 0{,}8$) — Positivs unter einem Winkel $\chi' > 1/1500$.

Der Einfluß der Beugung ist bei großen Blendenzahlen zu berücksichtigen. Die Aberrationen der optischen Systeme sind dann praktisch zu vernachlässigen, so daß die angegebenen Formeln auch bei der Abbildung von Achsenpunkten mit konkreten Fotoobjektiven anwendbar sind.

Beispiel: Eine Kleinbildaufnahme mit der Objektivbrennweite $f' = 100$ mm wurde mit der extrem großen Blendenzahl $k = 60$ ausgeführt.

1. Wir berechnen unter obigen Annahmen die Nachvergrößerung für den Perspektivefaktor $\gamma_s' = 0{,}8$ und die Betrachtungsentfernung $p_s' = -250$ mm.
2. Wie groß sind der Radius des Zerstreuungskreises in der Gaußschen Bildebene und die Abbildungstiefe?
3. Wie groß ist a_r bei $\beta' = 0$?

Lösung:

1. Aus Gl. (6.218) folgt

$$v = \frac{p'_s \gamma'_s}{f'} = \frac{-250 \cdot 0{,}8}{100} = -2.$$

2. Aus Gl. (6.244) oder aus Gl. (6.243) ergibt sich $r' = \varrho' \approx 0{,}04$ mm. Aus Gl. (6.248) erhalten wir wegen $k > 0{,}69f'$

$$b'_r = -b'_1 = 8 \text{ mm}.$$

3. Die Abbildungsgleichung

$$z_r = -\frac{f'^2}{z'_r} = -\frac{f'^2}{b'_r}$$

ergibt $z_r = -1250$ mm.
Also ist $a_r = z_r - f' = -1350$ mm.

6.4.4. Fotometrie

Bei Fotoobjektiven verwendet man statt der auf die relative Augenempfindlichkeit bezogenen („V_λ-bewerteten") lichttechnischen Größen vorteilhafter die äquivalenten in physikalischen Einheiten gemessenen strahlungsphysikalischen Größen.

Die hier benötigten Beziehungen wurden in Abschnitt 4.2.5. abgeleitet.

Die Bestrahlungsstärke in Flächenelementen, die der optischen Achse benachbart sind, beträgt nach Gl. (4.232) ohne Berücksichtigung der Reflexions- und Absorptionsverluste

$$E_e = \pi \Omega_0 L_e \frac{1}{4k^2 \left[1 - \frac{\beta'}{\beta'_p}\right]^2}. \tag{6.250}$$

Die Schwärzung der fotografischen Schicht ist im linearen Teil der Schwärzungskurve proportional der Bestrahlungsstärke und der Belichtungszeit. Für gleiche Schwärzung gilt also

$$E_{e1} t_1 = E_{e2} t_2. \tag{6.251}$$

Bei gleichem Aufnahmegegenstand (L_e = konstant) und gleicher Einstellung (β' = konstant) ist nach Gl. (6.250)

$$\frac{t_1}{k_1^2} = \frac{t_2}{k_2^2}. \tag{6.252}$$

Für $t_1 = 2t_2$ erhalten wir

$$k_1 = \sqrt{2}\, k_2. \tag{6.253}$$

Eine Vergrößerung der Blendenzahl auf das $\sqrt{2}$fache erfordert bei gleicher Schwärzung eine Verdopplung der Belichtungszeit.

Die Blendenzahlreihe ist deshalb so aufgebaut, daß sich benachbarte Werte um den Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden.

Sie lautet:

0,7; 1,0; 1,4; 2,0; 2,8; 4,0; 5,6; 8,0; 11,0; 16,0 usw.

Bei einer Fernaufnahme ist

$$E_e = \pi \Omega_0 L_e \frac{1}{4k^2}. \quad (6.254)$$

Bei Normal- und Nahaufnahmen mit $\beta_p' \approx 1$, der gleichen Strahldichte und Blendenzahl gilt

$$E_e = \pi \Omega_0 L_e \frac{1}{4k^2(1-\beta')^2}. \quad (6.255)$$

Gleiche Schwärzung erhalten wir für

$$t = t_\infty (1 - \beta')^2. \quad (6.256)$$

Wegen $\beta' < 0$ erfordern Aufnahmen mit nichtverschwindendem Abbildungsmaßstab unter sonst gleichen Bedingungen eine längere Belichtungszeit als Fernaufnahmen.

Abbildung 6.80 enthält die Auswertung der Gl. (6.256). Bei einer Lupenaufnahme mit $\beta' = -10$ ergibt sich $t/t_\infty = 121$.

Für die Bestrahlungsstärke in außeraxialen Flächenelementen gilt nach Gl. (4.241) unter der Annahme, daß keine Randabschattung, keine Reflexions- und Absorptionsverluste sowie keine Aberrationen auftreten,

$$E_{ew} = E_{eo} \cos^4 w. \quad (6.257)$$

E_{eo} ist die Bestrahlungsstärke in axialen Flächenelementen, w der Winkel, den der Hauptstrahl mit der optischen Achse einschließt.

Die nach dem „$\cos^4 w$-Gesetz" vorhandene Abnahme der Bestrahlungsstärke im Bildfeld wird als „natürliche Vignettierung" oder als „natürliche Abnahme" der Bestrahlungsstärke bezeichnet.

In der Abb. 6.81 ist die Funktion $E_{ew}/E_{eo} = f(w)$ grafisch dargestellt. Die natürliche Vignettierung kann bei Weitwinkelobjektiven, besonders bei solchen mit sehr großem Objektwinkel, untragbare Werte annehmen. Es wurden deshalb verschiedene Maßnahmen getroffen, durch die die Bestrahlungsstärke bei Weitwinkelobjektiven nicht nach dem „$\cos^4 w$-Gesetz" abnimmt.

Die einfachste Möglichkeit besteht darin, die Bestrahlungsstärke in der Umgebung der optischen Achse durch eine rotierende Sternblende, durch Grauglasscheiben oder durch teildurchlässig verspiegelte Scheiben zu schwächen. Damit ist ein Verlust an Gesamtstrahlungsfluß verbunden.

Bei einem Objektiv mit tonnenförmiger Verzeichnung sinkt die Bestrahlungsstärke mit dem Objektwinkel langsamer als nach dem „$\cos^4 w$-Gesetz". Einen Beweis dafür findet sich bei WANDERSLEB. Die extremen Weitwinkelobjektive mit Objektwinkeln in der Nähe von $2w = 180°$ haben starke tonnenförmige Verzeichnung, da sonst entsprechend Abb. 6.81 kaum Licht in die Bildecken käme.

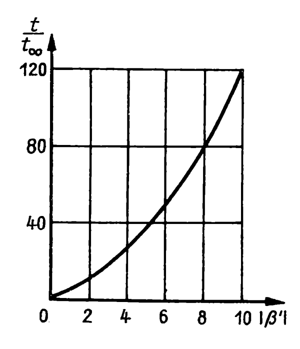


Abb. 6.80
Verlängerungsfaktor der Belichtungszeit ($\beta' \neq 0$)

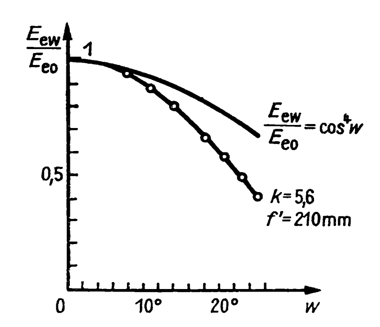


Abb. 6.81
Natürliche Vignettierung und Abnahme der Bestrahlungsstärke bei einem realen Objektiv (Kreise)

Bei Objektiven mit geeigneten Abweichungen von der idealen Pupillenabbildung, also mit günstigen Pupillenaberrationen, nimmt die Bestrahlungsstärke angenähert nach einem „$\cos^n$-Gesetz" mit $n < 4$ ab. Ein solches Objektiv ist z. B. das Flektogon. (Beim Flektogon mit $f' = 20$ mm beträgt bei $k = 2{,}8$ der Wert $n = 3{,}6$; beim Abblenden ändert er sich stetig bis auf $n = 1{,}2$.)

Weitere Einflüsse auf die Bestrahlungsstärke. Bei realen Fotoobjektiven ist die Bestrahlungsstärke in der Filmebene geringer, als wir sie mit Gl. (6.250) ausrechnen. Die Ursache dafür sind Absorptionsverluste in den Gläsern, Reflexionsverluste an den Oberflächen der Linsen und Reste von Abbildungsfehlern, die die Strahlenvereinigung in einem Punkt verhindern. Bei der Abbildung außeraxialer Flächenelemente wird im allgemeinen die nach Gl. (6.257) berechnete Bestrahlungsstärke zusätzlich durch Randabschattung herabgesetzt. Da diese Einflüsse quantitativ nur schwer voneinander zu trennen sind, berücksichtigen wir sie durch einen empirischen Durchlässigkeitsfaktor τ, indem wir setzen

$$E_e \text{ (reales Objektiv)} = \tau E_e \text{ (idealisiertes Objektiv)}. \tag{6.258}$$

Die Größe der Absorptionsverluste in den Linsen wird von den Glasarten und von der Länge des Glasweges bestimmt. Die Wellenlängenabhängigkeit der Absorption kann zu einer Verfärbung des Lichtes führen. Viele optische Gläser, z. B. sämtliche Schwerflinte, erscheinen in der Durchsicht gelb, absorbieren also blaues Licht am stärksten. Der „Farbort des Objektivs" (im Farbendreieck) läßt sich jedoch mittels Entspiegelung der Linsenoberflächen verändern, bei der die Reflexion der von den

Gläsern bevorzugt absorbierten Farbe unterdrückt wird. Die Linsenoberfläche erscheint in dieser Farbe. Gelbstich durch Absorption wird also durch eine gelb (oder bräunlich) reflektierende dünne Interferenzschicht teilweise ausgeglichen.

Die Reflexionsverluste wachsen vor allem mit der Anzahl der Glas-Luft-Flächen in den Objektiven. Der Einsatz von hochbrechenden Gläsern erhöht die Reflexionsverluste. Durch die Entspiegelung lassen sie sich auf so kleine Beträge verringern, daß auch die Konstruktion von Objektiven mit relativ vielen Linsen ermöglicht wird. Bei älteren Objektiven ohne Entspiegelung liegen die Verluste durch Absorption und Reflexion je nach der Linsenzahl zwischen 30% und 60%.

Die Randabschattung oder künstliche Vignettierung wird bei Fotoobjektiven im allgemeinen absichtlich eingeführt, um die Abweichungen durch Koma in zulässigen Grenzen zu halten. Die Randabschattung bewirkt eine stärkere Abnahme der Bestrahlungsstärke mit dem Feldwinkel, als sie nach dem „$\cos^4 w$-Gesetz" zu erwarten ist. Die Abb. 6.81 enthält auch Werte für die Abnahme der Bestrahlungsstärke mit dem Feldwinkel, wie sie an einem realen Objektiv gemessen werden. Darin spiegelt sich der Einfluß sämtlicher behandelten Faktoren wider.

6.5. Optische Systeme

6.5.1. Beleuchtungssysteme

Optische Systeme zur Beleuchtung, also zur Bündelung des Lichtstroms in optischen Geräten und zur gleichmäßigen Ausleuchtung von Flächen oder abzubildenden Objekten, sind bei der Projektion, im Mikroskop sowie bei speziellen Aufgaben innerhalb optischer Geräte erforderlich.

Die Diaprojektion ist ein Beispiel für die gleichmäßige Ausleuchtung eines durchstrahlten Objektes. Die Grundaufgabe besteht zunächst in der einstufigen Abbildung des Objektfeldes mittels des Projektionsobjektivs. Innerhalb des Objektivs liegt dessen Eintrittspupille. Wir symbolisieren das Objektiv durch zusammenfallende Hauptebenen, an deren Ort auch die Öffnungsblende angenommen werden soll. Abbildung 6.82a zeigt die direkte Beleuchtung mit einer punktförmigen Lichtquelle, dem Grenzfall der sehr kleinen Lichtquelle. Durch jeden Objektpunkt geht von der Lichtquelle aus nur ein Lichtstrahl. Eine sehr kleine Lichtquelle hat also den Nachteil, daß die Beleuchtungsapertur sehr klein ist. Dafür ist eine hohe Leuchtdichte möglich. Abbildung 6.82b zeigt die direkte Beleuchtung mit einer so großen Lichtquelle, daß für jeden Objektpunkt die Beleuchtungs- und die Abbildungsapertur gleich sind. Es wird eine so große Lichtquelle benötigt, daß im allgemeinen eine geringe Leuchtdichte erreicht wird.

Abbildung 6.82c demonstriert, daß die Abbildung der Lichtquelle in die Eintrittspupille des Objektivs die maximal mögliche Beleuchtungsapertur bei nicht zu großer Lichtquelle ermöglicht. Das Beleuchtungssystem wird auch hier als Kondensor bezeichnet.

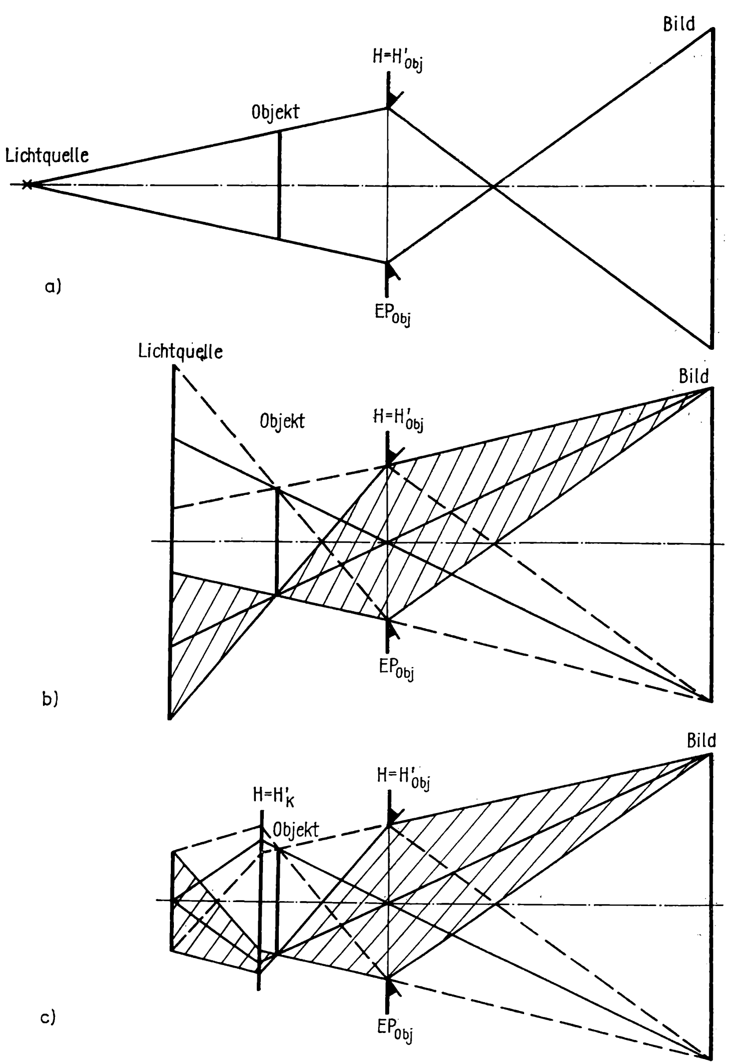


Abb. 6.82
Beleuchtung bei der Projektion
a) punktförmige Lichtquelle, b) große Lichtquelle, c) mit Kondensor

Nach Abb. 6.83 gilt bei erfüllter Sinusbedingung

$$\sin u_K = \frac{h}{a_K}, \quad \sin u'_K = \frac{h}{a'_K} \tag{6.259a, b}$$

und

$$\frac{\varrho_P}{y_L} = \frac{a'_K}{a_K}. \tag{6.260}$$

Division von Gl. (6.259a) durch Gl. (6.259b) und Einsetzen von a'_K/a_K nach Gl. (6.260) ergibt mit den numerischen Aperturen $A_K = \sin u_K$, $A'_K = \sin u'_K$

$$\frac{A_K}{A'_K} = \frac{\varrho_P}{y_L}. \tag{6.261}$$

Die Bildweite bei der Projektion ist groß, so daß das Objekt nahezu in der Brennebene des Objektivs steht. Es gilt angenähert

$$\sin u'_K \approx \frac{y}{f'_{Ob}}. \tag{6.262}$$

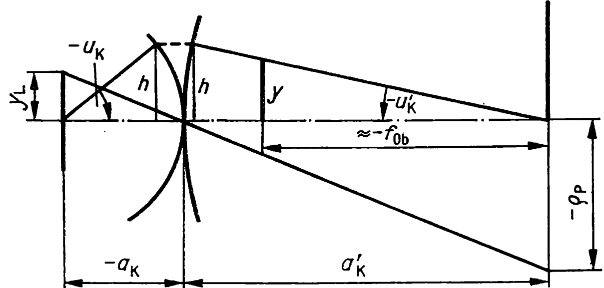


Abb. 6.83
Zur Ableitung der Gleichungen (6.259) bis (6.263)

Aus Gl. (6.261) und Gl. (6.262) folgt

$$2y_L A_K = \frac{y}{k} \tag{6.263}$$

worin $k = f'_{Ob}/2\varrho_P$ die Blendenzahl des Objektivs ist.

Das Produkt aus der Lichtquellengröße und der Kondensorapertur ist bei vorgegebenem Format und vorgegebenem Objektiv konstant.

Beim Kleinbildformat 24 mm × 36 mm ist z. B. $y \approx 21$ mm, so daß mit einem Objektiv $k = 3$

$$2y_L A_K \approx 7$$

sein muß (z. B. $A_K = 0{,}25$; $2y_L = 28$ mm und $A_K = 0{,}7$, $2y_L = 10$ mm).

Der Kondensor bildet ein relativ kleines Feld mit relativ großen Aperturen ab. Daraus ergibt sich, daß besonders

— der Öffnungsfehler klein gehalten und
— die Sinusbedingung beachtet

werden müssen. Da es sich nur um die Abbildung der Lichtquelle in die Eintrittspupille handelt, sind die Forderungen im allgemeinen nicht so streng zu erfüllen. Hinsichtlich des Öffnungsfehlers gilt die Korrektion als ausreichend, wenn die vom

Achsenpunkt der Eintrittspupille aus zurückverfolgten Strahlen die Lichtquelle treffen (Abb. 6.84). Es ist im allgemeinen zweckmäßig, die Lichtquelle aus ihrem paraxialen Ort herauszurücken (Abb. 6.84). Ein vollständiger Überblick wird erzielt, wenn zusätzlich die Bündel, die vom Rand der Eintrittspupille ausgehen, zurückverfolgt werden. Es läßt sich eine Regel ablesen:

Kleine Lichtquellen ermöglichen hohe Leuchtdichten, sie erfordern hohe Beleuchtungsaperturen und gut korrigierte Kondensoren. Die Gleichmäßigkeit der Ausleuchtung ist schwierig zu erreichen.

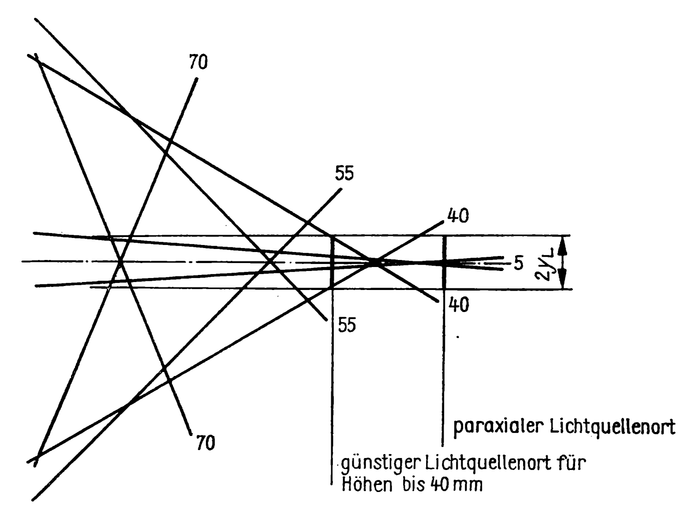


Abb. 6.84
Strahlenverlauf im Objektraum bei Rückwärtsrechnung

Große Lichtquellen stellen geringere Anforderungen an das Beleuchtungssystem. Es sind nicht so hohe Leuchtdichten, aber leichter eine gleichmäßige Ausleuchtung zu realisieren.

Einzellinse. Bei nicht zu großen Aperturen genügt eine Einzellinse als Kondensor. Sie kann als Linse mit kleinem Öffnungsfehler ausgebildet werden. Bei der dünnen Einzellinse (d = 0) muß die Durchbiegung

$$Q = \frac{n}{n+2}\left(\frac{2}{s} + F'\right) \tag{6.264}$$

betragen. Mit

$$s = a_K = f'_K\left(\frac{1}{\beta'_K} - 1\right) \quad \text{und} \quad s' = a'_K = f'_K(1 - \beta'_K) \tag{6.265a, b}$$

gilt

$$Q = \frac{nF'_K}{n+2}\cdot\frac{1+\beta'_K}{1-\beta'_K} \quad \text{bzw.} \quad Q = \frac{n}{n+2}\cdot\frac{1+\beta'_K}{a'_K}. \tag{6.266a, b}$$

Oftmals läßt sich auch eine Plankonvexlinse verwenden, deren konvexe Fläche der größeren Schnittweite zugekehrt sein muß. Mit einer geeigneten Brechzahl stellt die Plankonvexlinse zugleich die Linse minimalen Öffnungsfehlers dar. Dabei kann es aber vorkommen, daß die erforderliche Brechzahl praktisch nicht zu realisieren ist.

Zwei Linsen. Höhere Anforderungen lassen sich mit zweilinsigen Kondensoren erfüllen. Werden zwei dünne Linsen bei verschwindendem Abstand mit dem kleinsten Öffnungsfehler verwendet, dann müssen beide gleiche Brechkraft haben:

$$F'_1 = F'_2 = \frac{1}{2} F'. \tag{6.267}$$

Hodam hat für dicke Linsen durch trigonometrische Rechnung festgestellt, daß sich mit wachsendem Betrag des Abbildungsmaßstabs das Brechkraftverhältnis F'_1/F'_2 geringfügig erhöht und zwar bei $|\beta'| = \infty$ auf etwa 1,4, bei $|\beta'| = 2$ auf etwa 1,2 (Abb. 6.85). Für die bei Kondensoren im allgemeinen üblichen Abbildungsmaß-

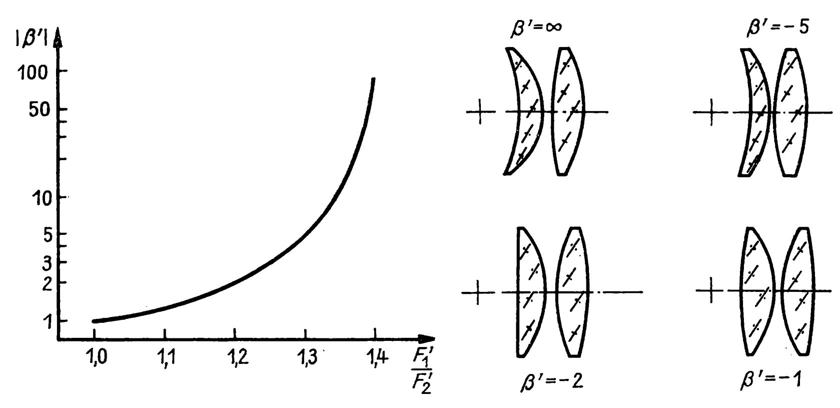


Abb. 6.85
Brechkraftverhältnis als Funktion des Abbildungsmaßstabs

Abb. 6.86
Kondensoren für verschiedene Abbildungsmaßstäbe (Öffnungsfehler-Minimum)

stäbe und bei Berücksichtigung der durch die Dickeneinführung entstehenden Veränderungen ist das im Ansatz unwesentlich (Beispiele Abb. 6.86). Zwei zusammenfallende dünne Plankonvexlinsen bilden mit dem kleinsten Öffnungsfehler ab, wenn ihre Brechkräfte so aufgeteilt werden, daß

$$\frac{F'_1}{F'} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{n+2}{n} - \dfrac{4f'}{s}\cdot\dfrac{n^2-1}{n}}{2n+1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F'_1}{F'} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{n+2}{n} - \dfrac{4\beta'_K}{1-\beta'_K}\cdot\dfrac{n^2-1}{n}}{2n+1} \tag{6.268}$$

und

$$\frac{F'_2}{F'} = 1 - \frac{F'_1}{F'} \tag{6.269}$$

ist (Abb. 6.87a). Es ist z. B.

für $-f'/s = 0{,}8$ und $n = 1{,}6$ $F_1'/F' = 0{,}64$;
für $-f'/s = 0{,}5$ und $n = 1{,}6$ $F_1'/F' = 0{,}5$.

Die Abb. 6.87b enthält den Fall der Abbildung ins Unendliche.

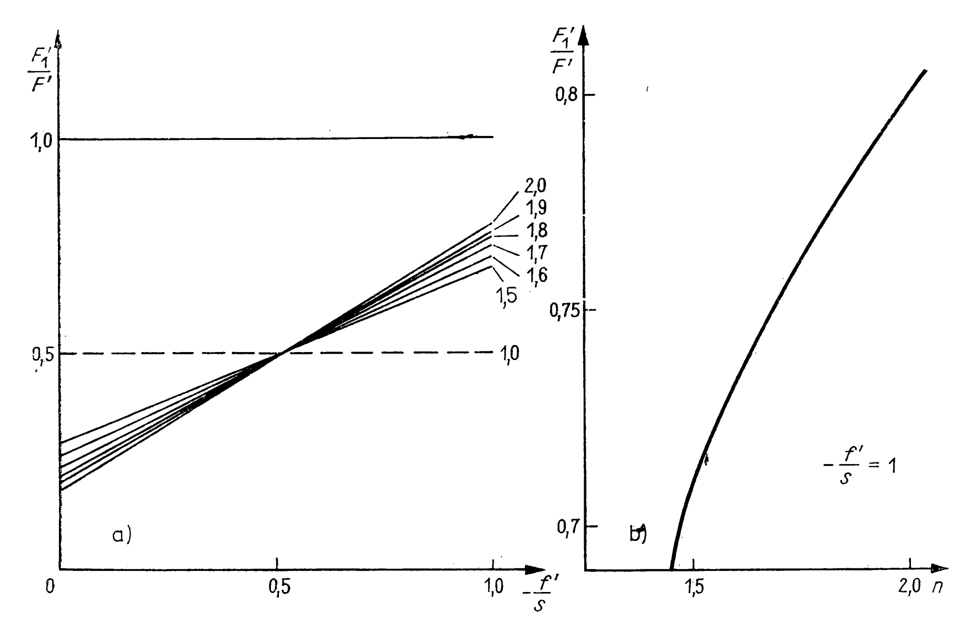


Abb. 6.87
Brechkraft der ersten Plankonvexlinse
a) als Funktion des Abbildungsmaßstabs und der Brechzahl,
b) als Funktion der Brechzahl bei Abbildung ins Unendliche

Drei Linsen. Die Apertur kann zunächst verringert werden, wenn vor die beiden Linsen eine dritte Linse gesetzt wird. Diese könnte plankonvex sein. Es läßt sich aber auch ein aplanatischer Meniskus verwenden. Dieser hat die Radien

$$r_1 = s, \qquad r_2 = \frac{n(r_1 - d)}{n + 1}.$$

Anschließend sind zwei Plankonvexlinsen möglich, deren Brechkraftverhältnis wie beim zweilinsigen Kondensor berechnet ist (Abb. 6.88).

Asphärische Linsen. Der Einsatz von asphärischen Flächen ermöglicht es, Kondensoren ausreichender Bildgüte aus wenigen Linsen zu berechnen. Wegen des höheren Fertigungsaufwandes wird das Bestreben dahin gehen, mit einer asphärischen Fläche auszukommen. Bereits mit einem Paraboloid, dessen Koordinaten durch den Scheitelradius bestimmt sind, lassen sich oftmals gute Strahlenvereinigungen erzielen. Die

Abb. 6.89 enthält ein Beispiel für die Strahlenvereinigung bei einem dreilinsigen Kondensor mit einer Plan-Paraboloid-Linse, das HODAM angegeben hat [10]. (Das Ausgangssystem mit sphärischen Flächen ergab den Strahlenverlauf nach Abb. 6.84.) Weitere Variationsmöglichkeiten bieten Ellipsoid- oder Hyperboloidflächen, bei denen zwei Parameter variiert werden können.

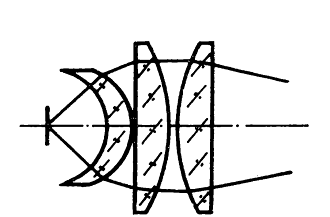


Abb. 6.88
Dreilinsiger Kondensor mit aplanatischem Meniskus

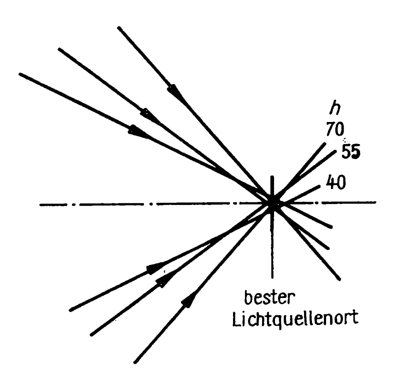


Abb. 6.89
Kondensor mit einer asphärischen Fläche (Rückwärtsrechnung durch einen Kondensor nach Abb. 6.88, bei dem die 4. Fläche ein Rotationsparaboloid ist)

Aus zwei asphärischen Linsen lassen sich Kondensoren ebenfalls aufbauen. Geht man vom Spezialfall achsparallelen Lichtes zwischen den Linsen aus, dann gilt für kleinen Öffnungsfehler:

Die Plan-Paraboloid-Linsen sollten aus Glas mit möglichst großer Brechzahl bestehen (theoretisch $n = 2$) (Abb. 6.90a).

Bei Ellipsoidflächen an Plankonvexlinsen mit der Brechzahl $n = 1{,}5$ ist die große Halbachse $1{,}2f'$, die kleine Halbachse $0{,}77f'$ zu wählen (Abb. 6.90b). (Die angegebenen Regeln wurden für das Seidelsche Gebiet dünner Linsen abgeleitet.) Die Korrektion von Öffnungsfehler und Koma erfordern den Einsatz von zwei geeignet berechneten asphärischen Flächen.

Wabenkondensor (Abb. 6.90c). Zur gleichmäßigen Ausleuchtung mit kleinen, stark strukturierten Lichtquellen kann die Kombination eines üblichen Kondensors mit einem Wabenkondensor verwendet werden. Der Kondensor bildet die Lichtquelle in die Eintrittspupille des Projektionsobjektivs ab. Hinter dem Kondensor steht eine Wabenlinse, die kleine kreisförmige Bereiche trägt. Eine daran angepaßte Platte trägt ebenfalls eine größere Anzahl von kleinen Linsen (es wird auch der Begriff der „Fliegenaugenlinse" verwendet). Jede dieser Linsen bildet ein Element der ersten Wabenlinse in die gesamte Eintrittspupille des Objektivs ab. Damit wird erreicht, daß das Licht von jedem Lichtquellenelement auf die gesamte Eintrittspupille verteilt wird.

Zur Ausleuchtung eines rechteckigen Feldes muß die erste Wabenlinse rechteckige Elemente tragen. Die Fliegenaugenlinsen können auch aus einer Struktur von gekreuzten Zylinderlinsen bestehen, die wie in der Abb. 4.72 in zwei senkrechten Schnitten dieselbe Bildweite haben. Damit wäre z. B. bei einem quadratischen Raster in der ersten Linse ein rechteckiges Feld auszuleuchten.

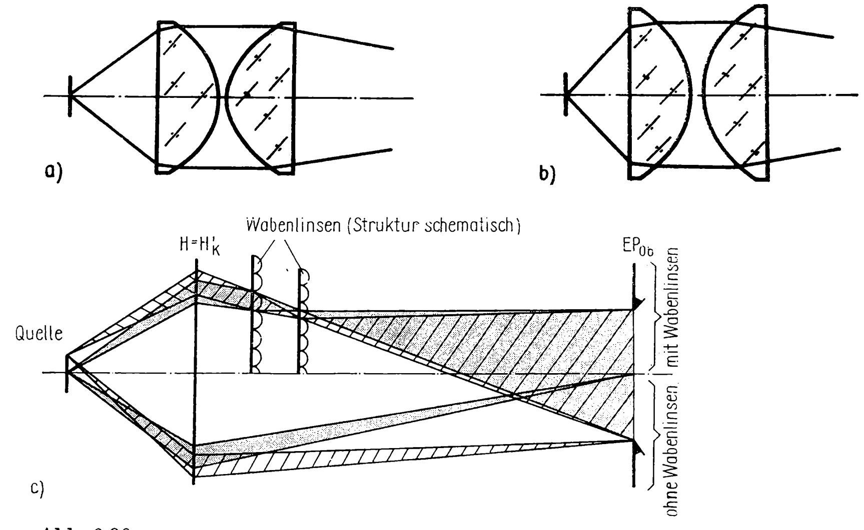


Abb. 6.90
Zweilinsiger Kondensor
a) zwei Paraboloidflächen,
b) zwei Ellipsoidflächen,
c) gleichmäßige Ausleuchtung bei einer kleinen Lichtquelle mit Wabenkondensor

Remittierte Leuchtdichte. Dieser Abschnitt soll noch durch eine lichttechnische Betrachtung ergänzt werden. Bei der Projektion wird die Projektionsfläche beleuchtet und die von dieser remittierte Leuchtdichte wirksam.

Für die mit ausreichender Näherung gültigen Voraussetzungen

$$\beta'_p = 1, \qquad |\beta'| \gg 1$$

gilt nach Gl. (4.233) für die Beleuchtungsstärke

$$E = \frac{\tau\pi\Omega_0 L}{4\beta'^2 k^2} \tag{6.270}$$

(τ = Transmissionsfaktor des Projektionsgegenstandes).

Der Lichtstrom beträgt

$$\Phi = \frac{\tau\pi\Omega_0 L q'}{4\beta'^2 k^2} = \frac{\tau\pi\Omega_0 L q}{4k^2} \tag{6.271}$$

(L = Leuchtdichte der Quelle, q = Objektfläche, q' = Bildfläche, k = Blendenzahl des Objektivs).

Der von einem Lambert-Strahler in den Raumwinkel dΩ remittierte Lichtstrom ergibt sich wegen Gl. (3.11) zu (Abb. 6.91)

$$\mathrm{d}\Phi_\varrho = I\,\mathrm{d}\Omega = I_0 \sin\vartheta \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi.$$

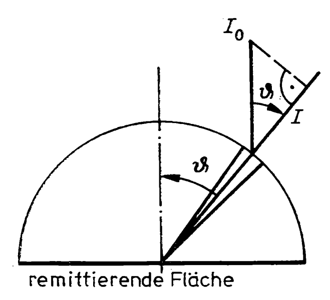


Abb. 6.91
Zur Ableitung des remittierten Lichtstroms

Integration führt mit

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}$$

auf

$$\Phi_\varrho = \pi I_0. \tag{6.272}$$

Der Remissionsfaktor wird als

$$\varrho = \frac{\Phi_\varrho}{\Phi} \tag{6.273}$$

definiert, woraus mit Gl. (6.270) bis Gl. (6.272)

$$\varrho = \frac{\pi I_0 \Omega_0}{Eq'} \tag{6.274}$$

folgt.

Die remittierte Leuchtdichte wird zu

$$L_\varrho = \frac{I_0}{q'} = \frac{1}{\pi\Omega_0}\,\varrho E. \tag{6.275}$$

Gl. (6.275) wird zweckmäßig als Zahlenwertgleichung geschrieben, z. B. in der Form

$$L_\varrho/\mathrm{sb} = \frac{10^{-4}}{\pi\Omega_0}\,\varrho E/\mathrm{lx}. \tag{6.276}$$

Für die Projektion auf Lambert-Strahler kann man etwa remittierte Leuchtdichten zwischen 10^{-1} sb und 10^{-2} sb ansetzen.

6.5.2. Achromatische Fotoobjektive

Die dünne Einzellinse. Wir untersuchen die Eigenschaften der dünnen Einzellinse, weil das Bestreben stets darauf gerichtet ist, die gestellte Aufgabe mit einem möglichst geringen Aufwand zu lösen. Außerdem stellt die Einzellinse das Funktionselement für mehrlinsige Fotoobjektive dar, so daß die Kenntnis ihrer Eigenschaften auch für das Verständnis der Wirkung komplizierter Systeme nützlich ist. In der Abb. 6.92 sind für eine dünne Einzellinse ($d = 0$) mit $s = -\infty$, $n = 1{,}5$ und $F' = 1\ \text{mm}^{-1}$ folgende für das Seidelsche Gebiet gültige Größen als Funktionen der normierten Durchbiegung $Q_0 = Q/F'$ dargestellt:

- Für die Gebiete $Q_0 \leqq -3$ und $Q_0 \geqq 6$ ist die Entfernung der Eintrittspupille von der Linse angegeben, bei der der Astigmatismus verschwindet. Im Intervall $-3 < Q_0 < 6$ gibt es keine „astigmatismusfreie Eintrittspupille". Für diesen Bereich ist die Entfernung der Eintrittspupille eingetragen, bei der der Astigmatismus ein Minimum hat.
- Für die Linse mit der astigmatismusfreien Eintrittspupille mit der kleineren Schnittweite s_{p0} sind der Astigmatismuskoeffizient C_0, der Komakoeffizient K_0 und der Verzeichnungskoeffizient E_0 dargestellt. Der Index „Null" deutet an, daß sämtliche Koeffizienten auf die Brechkraft Eins normiert sind. C_0, K_0 und E_0 sind ein Maß für die Größe der Abweichungen, die durch die einzelnen Abbildungsfehler im Seidelschen Gebiet hervorgerufen werden.
- Der Öffnungsfehlerkoeffizient B_0, der unabhängig von der Eintrittspupillenlage ist, ist ebenfalls in der Abb. 6.92 enthalten.

Abb. 6.92 ist zu entnehmen:

> Die dünne Einzellinse mit dem Öffnungsfehlerminimum hat starken Astigmatismus. Die Gleichmäßigkeit der Korrektion für das gesamte Bildfeld erfordert einen Kompromiß zwischen der Korrektion des Öffnungsfehlers und des Astigmatismus.

Es ist also notwendig, die Durchbiegung der Linse so zu wählen, daß der Öffnungsfehler nicht minimal ist. Das ist aber in der Umgebung des Minimums nicht so kritisch.

Aus Abb. 6.92 folgen zwei Formen dünner Linsen, die für eine fotografische Abbildung günstig sind.

> Astigmatismus- und komafrei bei nicht zu großem Öffnungsfehler sind die dünne Linse mit der Durchbiegung $Q_0 = -3$ und dem Abstand der Eintrittspupille $s_{p0} = -0{,}33$ sowie die dünne Linse mit der Durchbiegung $Q_0 = 6$ und dem Abstand der Eintrittspupille $s_{p0} = 0{,}22$.

Die zuerst genannte Linse ist plankonvex und hat eine Vorderblende, die zweite Linse ist ein nach der Bildseite konkaver Meniskus mit Hinterblende.

Wir untersuchen die Linse mit der Durchbiegung $Q_0 = -3$ und dem Abstand der Eintrittspupille $s_{p0} = -0{,}33$ genauer. Auf die Brennweite $f' = 100$ mm umgerechnet

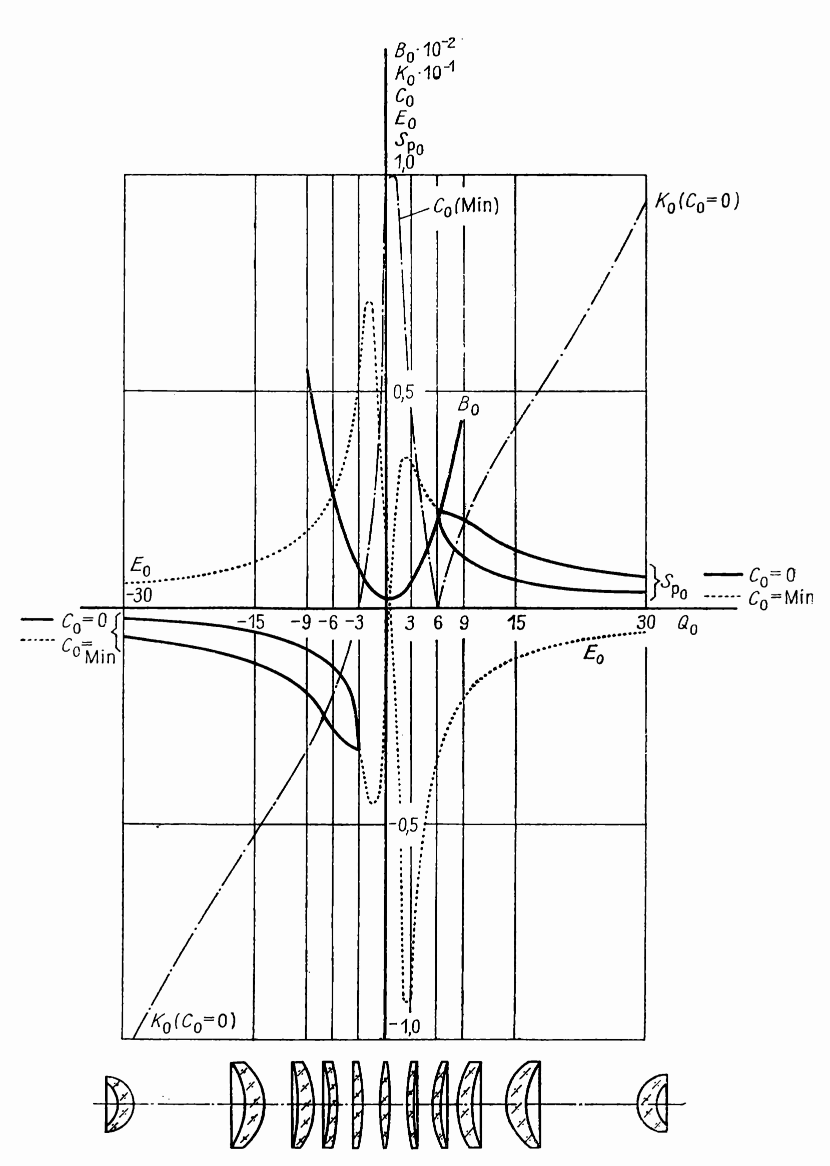


Abb. 6.92
Größen für die dünne Linse im Seidelschen Gebiet

erhalten wir $Q = 3 \cdot 10^{-2}\,\text{mm}^{-1}$ und $s_p = -33$ mm. Der auf die Brechkraft Eins bezogene Öffnungsfehlerkoeffizient beträgt nach Abb. 6.92 $B_0 = 9$. Ohne Beweis geben wir an, daß die Querabweichung in der Gaußschen Bildebene bei Öffnungsfehler dritter Ordnung und $s = -\infty$ aus

$$\Delta y' = -\frac{1}{16}\frac{f'}{k^3}B_0 \tag{6.277}$$

folgt. Daraus erhalten wir mit $f' = 100$ mm, $k = 12{,}5$ und $B_0 = 9$ die Querabweichung $\Delta y' = 0{,}0288$ mm. Der Zerstreuungskreis hat den Durchmesser $2\,|\Delta y'| = 0{,}0576$ mm. In der um $b' \approx -0{,}36$ mm vor der Gaußschen Bildebene liegenden Auffangebene beträgt der Zerstreuungskreisdurchmesser $2\,|(\Delta y')_{b'}| = 0{,}0144$ mm. Die außeraxialen Bildpunkte liegen wegen der Astigmatismusfreiheit auf der Petzval-Schale. Deren Krümmung beträgt

$$\frac{1}{r_p} = -\frac{F'}{n}, \tag{6.278}$$

woraus $r_p = -150$ mm folgt. Ohne Beweis sei für diesen Fall die Formel für die Querabweichung in der Gaußschen Bildebene angeführt:

$$\Delta y' = -\frac{1}{4}\frac{y'^2F'}{kn}. \tag{6.279}$$

Daraus ergibt sich, daß der Zerstreuungskreis in den Ecken des Formats doppelt so groß wie auf der optischen Achse ist [$\Delta y'$ nach Gl. (6.279) gleich $\Delta y'$ nach Gl. (6.277), die Querabweichungen addieren sich im Seidelschen Gebiet], wenn wir $y' \leqq 14{,}7$ mm wählen. Der ausnutzbare Objektwinkel ergibt sich daraus zu $2w \approx 17°$.

Die relative Querabweichung durch Verzeichnung dritter Ordnung ($s = -\infty$)

$$\frac{\Delta y'}{y'} = -\frac{1}{2}\frac{y'^2}{f'^2}E_0 \tag{6.280}$$

hat bei $y' = 14{,}7$ mm den Wert $100 \cdot \Delta y'/y' = -1{,}08\%$, es liegt tonnenförmige Verzeichnung vor (Abb. 6.92 entnehmen wir $E_0 = 0{,}56$).

Mit einem Kronglas der Abbeschen Zahl $\nu = 60$ führt der Farblängsfehler zu einer Schnittweitendifferenz zwischen C′ und F′ von $\Delta_\lambda s' = s'_{F'} - s'_{C'} = -1{,}7$ mm.

Mit einer Linse aus höherbrechendem Glas sind noch etwas günstigere Werte als in unserem Beispiel möglich. Die geringen Linsendicken, die bei den kleinen in Frage kommenden Öffnungsverhältnissen notwendig sind, ändern das Ergebnis nicht grundlegend ab. Wir fassen zusammen:

> Mit einer dünnen Einzellinse geeigneter Durchbiegung und Blendenlage ist eine brauchbare Abbildung zu erzielen, wenn das Öffnungsverhältnis etwa auf 1:10 und der Objektwinkel etwa auf 25° begrenzt bleiben.

Dicke Einzellinsen. Linsen mit großer Dicke kommen als Einzellinsen zur fotografischen Abbildung im allgemeinen nicht vor. Sie sind aber oft wesentliche Grundelemente in mehrlinsigen Systemen. Zwei Formen sind besonders ausgezeichnet.

Der Hoeghsche Meniskus hat verschwindende Petzval-Summe. Er stellt eine dicke Linse dar, bei der beide Flächen gleichen Radius haben. In bestimmten Fällen läßt sich der Hoeghsche Meniskus mit einer geeigneten Lage der Öffnungsblende als anastigmatische Einzellinse ausbilden. Die übrigen Abbildungsfehler sind jedoch vorhanden, so daß der Hoeghsche Meniskus als Einzellinse nicht gut verwendbar ist.

Der konzentrische Meniskus. Eine Linse, deren Flächen konzentrisch zur Öffnungsblende liegen, ist koma-, astigmatismus- und verzeichnungsfrei. Die Petzval-Schale liegt ebenfalls konzentrisch zur Öffnungsblende. Die Brechkraft beträgt

$$F' = -\frac{(n-1)\,d}{n r_1 (r_1 - d)}. \tag{6.281}$$

Für $r_1 < 0$, bei $d < r_1$ und $r_1 > 0$ erhalten wir eine Zerstreuungslinse, die wegen ihrer negativen Petzval-Summe in mehrlinsigen Systemen verwendet wird, wenn auch meistens in etwas abgeänderter Form.

Achromate. Der Farblängsfehler läßt sich mit zwei verkitteten Linsen korrigieren. Wenn die beiden Linsen gleiche Brechzahl haben, bleiben die übrigen Abbildungsfehler der Einzellinse in ihrer Größe erhalten. Die Maßstabsbedingung für zwei dünne zusammenfallende Linsen

$$F' = F_1' + F_2' \tag{6.282}$$

und die Dichromasiebedingung

$$0 = \frac{F_1'}{\nu_1} + \frac{F_1'}{\nu_2} \tag{6.283}$$

legen die Brechkräfte eindeutig fest. Aus Gl. (6.282) und Gl. (6.283) folgt

$$F_1' = \frac{1}{1 - \dfrac{\nu_2}{\nu_1}} F', \qquad F_2' = -\frac{\dfrac{\nu_2}{\nu_1}}{1 - \dfrac{\nu_2}{\nu_1}} F', \tag{6.284a, b}$$

$$\frac{F_2'}{F_1'} = -\frac{\nu_2}{\nu_1} \quad \text{und} \quad \frac{|F_1'| + |F_2'|}{F'} = \frac{1 + \dfrac{\nu_2}{\nu_1}}{1 - \dfrac{\nu_2}{\nu_1}}. \tag{6.285a, b}$$

Für $\nu_2 < \nu_1$ ergibt sich die Anordnung Zerstreuungslinse — Sammellinse, für $\nu_2 > \nu_1$ die umgekehrte Anordnung. Es gilt:

> Kleine Einzelbrechkräfte und damit kleine Krümmungen erfordern ein ν_2/ν_1-Verhältnis, das möglichst stark von Eins verschieden ist.

Die Erfüllung der Dichromasiebedingung gewährleistet, daß die paraxiale Schnittweite für jeweils zwei Farben gleich ist. Wegen der hohen Empfindlichkeit der Foto-

schichten im kurzwelligen Spektralbereich legt man die Schnittweite für d und g zusammen. Diese Dichromatisierung reicht für Fotoobjektive im allgemeinen aus.

Die Auswahl von Gläsern mit gleicher Brechzahl und sehr verschiedener Abbeschen Zahl ist schwierig. Im allgemeinen haben die Gläser mit einer großen Abbeschen Zahl eine kleine Brechzahl und umgekehrt. Es ist deshalb in einem Dichromaten normalerweise notwendig, daß die Sammellinse eine niedrigere Brechzahl hat als die Zerstreuungslinse. Damit ist auch eine Änderung der geometrischen Abbildungsfehler gegenüber der Einzellinse verbunden. Der Meniskus mit Hinterblende enthält eine konkave Kittfläche. Wegen $n_1 < n_2$ wirkt diese zerstreuend. Sie verbessert damit die Öffnungsfehlerkorrektion. Wir können also auch absichtlich unterschiedliche Brechzahlen einführen und den Öffnungsfehler korrigieren. Dann darf ν_2/ν_1 nicht extrem stark von Eins abweichen, weil sonst die Zerstreuungslinse eine zu kleine Brechkraft erhält und den Öffnungsfehler der Sammellinse nicht ausgleichen kann.

Da es bereits vor der Eröffnung der Jenaer Glashütte Gläser gab, bei denen eine kleine Brechzahl mit einer großen Abbeschen Zahl und umgekehrt gekoppelt waren, nennt man einen hinsichtlich Öffnungsfehler und Koma korrigierten Dichromaten einen Altachromaten.

> Eine zerstreuende Kittfläche ist ein Mittel zur Öffnungsfehlerkorrektion. Ein Altachromat ist ein Dichromat, dessen Öffnungsfehler unter Zuhilfenahme einer zerstreuenden Kittfläche korrigiert wurde.

Die Kittfläche verschlechtert allerdings die Abweichungen, die durch die Feldfehler hervorgerufen werden.

Die Petzval-Summe für das System aus dünnen Linsen beträgt

$$P = \frac{F_1'}{n_1} + \frac{F_2'}{n_2}. \tag{6.286}$$

Mit Gl. (6.282) eliminieren wir F_2':

$$P = \frac{F'}{n_2} + \frac{F_1'}{n_1 n_2}(n_2 - n_1). \tag{6.287}$$

Die Petzval-Summe ist also bei einem Dichromaten mit $n_2 > n_1$ größer als bei einer Einzellinse mit der Brechzahl n_2. Ein achromatisches Objektiv, bei dem aber wegen

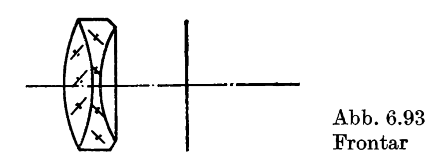


Abb. 6.93
Frontar

des geringen Brechzahlunterschiedes der Linsen der Öffnungsfehler nicht auskorrigiert ist, stellt das Frontar dar. Es hat ein Öffnungsverhältnis $K = 1:9$ und wird mit dem Objektwinkel $2w = 34°$ benutzt (Abb. 6.93).

6.5.3. Aplanatische Fotoobjektive

Bereits den Ausführungen im Abschnitt 6.5.2. ist zu entnehmen, daß es mit alten Gläsern schwierig ist, die Petzval-Summe der Objektive klein zu halten. Die Bildfeldwölbung der Objektive kann also nicht durch eine geeignete Auswahl dieser Gläser behoben werden. Obwohl es andere Möglichkeiten gäbe, auch mit alten Gläsern eine kleine Petzval-Summe zu erreichen, wurden Objektive ohne Bildfeldwölbung viel verwendet.

Ein System, dessen Öffnungsfehler und Koma korrigiert ist, das aber Bildfeldwölbung hat, nennen wir einen Aplanaten.

Wir behandeln drei Grundformen der Aplanate.

Simplet. Aplanatische Simplets, die gleichzeitig auch Achromate sind, haben wir im Prinzip bereits im Abschnitt 6.5.2. untersucht. Sie eignen sich wegen der starken Bildfeldwölbung und wegen des Astigmatismus schlecht als „Landschaftslinsen". Für Fernobjektive sehr langer Brennweite, bei denen der Objektwinkel klein ist, werden sie gelegentlich eingesetzt. Sie haben dann ein relativ kleines Öffnungsverhältnis.

Das Petzval-Objektiv ist ein Aplanat vom Dublettyp. Es besteht aus zwei Dichromaten, die einen größeren Abstand voneinander haben. Der objektseitige Dichromat hat eine Kittfläche, der bildseitige nicht (Abb. 6.94). Das Objektiv ist bemerkenswert, weil es bereits 1840 von PETZVAL mit der Theorie der Abbildungs-

Abb. 6.94
Petzval-Objektiv

fehler dritter Ordnung berechnet wurde. Es hatte das bis dahin noch nicht erreichte Öffnungsverhältnis $K = 1:3{,}4$. Die beiden Glieder des Petzval-Objektivs sind sammelnd. Es ergibt sich eine Brechkraftaufteilung auf Vorder- und Hinterglied, so daß das Öffnungsverhältnis für das Vorderglied kleiner ist als für das gesamte System. Vorder- und Hinterglied sind einzeln im Öffnungsfehler korrigiert. Das Hinterglied kompensiert die Koma und den Astigmatismus des Vordergliedes. Beide Glieder bestehen aus Altdichromaten, deren Petzval-Summe nicht verschwindet. Die Petzval-Summen der Glieder addieren sich wegen deren positiver Brechkraft. Das Petzval-Objektiv hat deshalb eine stärkere Bildfeldwölbung als eine Einzellinse, so daß das ausnutzbare Bildfeld klein ist. Auch die große Baulänge schränkt den Bildwinkel ein, weil Randabschattung eintritt. Durch das kleine Bildfeld und das relativ große Öffnungsverhältnis bei sehr guter Korrektion des Öffnungsfehlers eignete sich das Petzval-Objektiv als „Porträtobjektiv". In Abwandlungen ist die Bildfeldwölbung etwas verbessert worden, so daß auch Ausführungsformen mit gegenüber dem Original vergrößertem Bildfeld existieren.

Doppelaplanate. Bei der Behandlung der Abbildungsfehler hatte sich folgendes ergeben:

> Ein System, das symmetrisch zur Öffnungsblende aufgebaut ist und mit dem Maßstab $\beta' = -1$ abbildet, ist frei von Koma, Verzeichnung und Farbfehler des Hauptstrahls. Der Astigmatismus läßt sich bei geeigneter Wahl der Systemhälften durch die Lage der Öffnungsblende beheben.

Bei der Benutzung des symmetrischen Systems für einen anderen Abbildungsmaßstab als $\beta' = -1$ (z. B. $\beta' = 0$) treten Koma, Verzeichnung und Farbfehler des Hauptstrahls in Erscheinung. Aber bei nicht zu großem Öffnungsverhältnis bleibt eine befriedigende Korrektion erhalten.

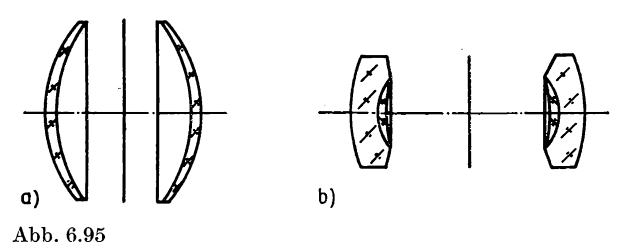


Abb. 6.95
a) Periskop von Steinheil
b) Landschaftsaplanat von Steinheil

Eines der ersten Fotoobjektive auf der Basis der symmetrischen Systeme stellt das Periskop von Steinheil dar (Abb. 6.95a). Es besteht aus zwei symmetrisch zur Blende stehenden Menisken. Öffnungsfehler und Farblängsfehler sind nicht korrigiert, es handelt sich also weder um einen Aplanaten noch um einen Dichromaten. Der Astigmatismus ist durch die Blendenlage so beeinflußt worden (überkorrigiert worden), daß die mittlere Bildschale nur schwach gewölbt ist.

> Die Ebnung der mittleren Bildschale in einem System, das Astigmatismus besitzt, wird als „Bildfeldebnung im übertragenen Sinne" bezeichnet.

Das Periskop konnte zwar nur mit dem Öffnungsverhältnis 1:40, aber mit dem für die damalige Zeit (1865) großen Objektwinkel $2w = 90°$ benutzt werden.

In einem symmetrischen Dublet ist der Farblängsfehler korrigiert, wenn beide Glieder aus Dichromaten bestehen. Die Korrektion des Öffnungsfehlers in den Gliedern ermöglicht ein größeres Öffnungsverhältnis, auch bei Abbildungsmaßstäben $\beta' \neq -1$. Die dazu notwendige zerstreuende Kittfläche beeinflußt jedoch die Astigmatismuskorrektion ungünstig. Es ist deshalb üblich gewesen, Porträtobjektive mit verbesserter Öffnungsfehlerkorrektion und Landschaftsobjektive mit verbesserter Astigmatismuskorrektion bei nicht so großem Öffnungsverhältnis zu entwickeln.

Ein Beispiel ist der Landschaftsaplanat 1:10,5, $2w = 60°$ von Steinheil (Abb. 6.95b). Die Kittfläche wirkt nur schwach zerstreuend, weil an ihr die Brechzahl-

differenz klein ist ($\Delta n = 0{,}0356$). Der wenig von Eins abweichende Quotient $\nu_2/\nu_1 = 0{,}87$ der beiden Gläser eines Gliedes bedingt große Brechkräfte.

Durch die Korrektion der Glieder eines symmetrischen Dublets können diese auch ganz gut für sich allein benutzt werden. Es besteht die Möglichkeit, verschiedene Brennweiten anzuwenden (Satzobjektive).

6.5.4. Anastigmatische Fotoobjektive

Die bisher behandelten optischen Systeme haben merkliche Bildfeldwölbung, weil bei ihnen die Petzval-Bedingung nicht erfüllt ist. Wir wollen nun die Bedingungen untersuchen, die im Ansatz eines Anastigmaten aus zwei dünnen zusammenfallenden Linsen zu verwenden sind. Grundsätzlich gilt:

> Bei einem Anastigmaten, also bei einem System, bei dem Astigmatismus und Bildfeldwölbung korrigiert sind, muß bereits im Ansatz die Petzval-Bedingung berücksichtigt werden.

Für ein anastigmatisches Simplet aus zwei dünnen Linsen, das außerdem dichromatisiert ist, gelten die Ansatzbedingungen

$$F' = F'_1 + F'_2 \qquad \text{(Maßstabsbedingung),} \qquad (6.288)$$

$$\frac{F'}{\nu} = \frac{F'_1}{\nu_1} + \frac{F'_2}{\nu_2} \qquad \text{(Dichromasiebedingung) und} \qquad (6.289)$$

$$\frac{F'}{n} = \frac{F'_1}{n_1} + \frac{F'_2}{n_2} \qquad \text{(Petzval-Bedingung).} \qquad (6.290)$$

Die Äquivalentwerte n und ν müssen ausreichende Größe haben (z. B. $1/n = 0{,}3$, $1/\nu = 0{,}003$). Die drei Gleichungen für die Brechkräfte der beiden Linsen haben nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\begin{vmatrix} F' & 1 & 1 \\ \dfrac{F'}{\nu} & \dfrac{1}{\nu_1} & \dfrac{1}{\nu_2} \\ \dfrac{F'}{n} & \dfrac{1}{n_1} & \dfrac{1}{n_2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.291)$$

ist. Die Auflösung von Gl. (6.291) ergibt

$$\frac{1}{n} = \frac{\dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2}}{\dfrac{1}{\nu_1} - \dfrac{1}{\nu_2}} \frac{1}{\nu} + \frac{\dfrac{1}{n_2\nu_1} - \dfrac{1}{n_1\nu_2}}{\dfrac{1}{\nu_1} - \dfrac{1}{\nu_2}}. \qquad (6.292)$$

Aus Gl. (6.292) ist abzulesen:

> In einem $1/n$ — $1/\nu$-Diagramm liegen die Punkte mit den Koordinaten $(1/n_1, 1/\nu_1)$, $(1/n_2, 1/\nu_2)$ und $(1/n, 1/\nu)$ auf einer Geraden (Abb. 6.96).

Schwenkt man im $1/n$ — $1/\nu$-Diagramm ein Lineal um den Punkt mit den vorgegebenen Koordinaten $(1/n, 1/\nu)$, dann ergeben sämtliche auf den dadurch festgelegten Geraden liegende Gläser diese Äquivalentwerte.

Für $1/n = 1/\nu = 0$ geht Gl. (6.292) in

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{6.293}$$

über. In diesem Falle muß die Gerade im $1/n$, $1/\nu$-Diagramm, auf der die Gläser liegen, durch den Ursprung gehen.

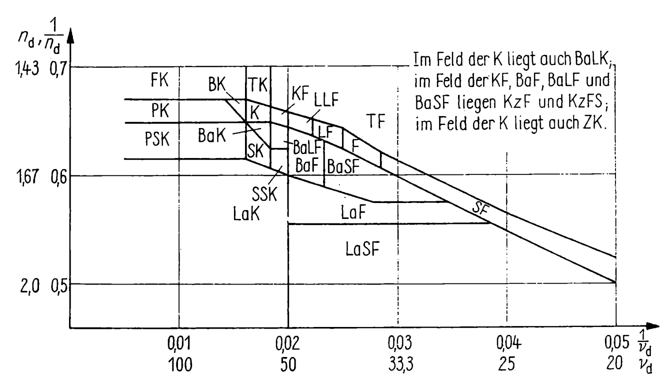


Abb. 6.96
$1/n$, $1/\nu$-Diagramm der optischen Gläser

Die Brechkräfte folgen nach der Erfüllung von Gl. (6.292) aus Gl. (6.288) und Gl. (6.289). Wir erhalten

$$F_1' = \frac{1}{1 - \dfrac{\nu_2}{\nu_1}} \left(1 - \frac{\nu_2}{\nu}\right) F' \quad \text{und} \quad F_2' = -\frac{\dfrac{\nu_2}{\nu_1}}{1 - \dfrac{\nu_2}{\nu_1}} \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu}\right) F'. \tag{6.294a, b}$$

Ein Wert $\nu < \infty$ verringert die Brechkräfte gegenüber denjenigen für $\nu = \infty$. Solange $\nu \gg \nu_1$, und $\nu \gg \nu_2$ gilt, bleibt jedoch im wesentlichen der Quotient ν_2/ν_1 bestimmend für die Brechkräfte.

Es ist schwierig, kleine Brechkräfte zu erreichen, weil die durch Gl. (6.292) bestimmte Gerade sehr steil ist und quer zum schmalen Bereich der optischen Gläser im $1/n$ — $1/\nu$-Diagramm verläuft. Die realisierbaren Quotienten ν_2/ν_1 sind im allgemeinen nicht sehr verschieden von Eins. Es sind Gläser notwendig, die bei einer großen Brechzahl eine große Abbesche Zahl haben und Gläser, die bei einer kleinen Brechzahl eine kleine Abbesche Zahl haben. Derartige Gläser wurden erstmalig von Schott auf Anregung von Abbe erschmolzen. Sie werden „neue Gläser" genannt, wobei sich diese Bezeichnung auf die Situation Anfang unseres Jahrhunderts bezieht.

Insbesondere eignen sich Schwerkrone und Leichtflinte. In letzter Zeit sind die Lanthankrone, Lanthanflinte und Tiefflinte hinzugekommen.

Ein dichromatisches Simplet mit kleiner Petzval-Summe hat außer dem Nachteil relativ großer Brechkräfte noch den Nachteil einer sammelnden Kittfläche. Dadurch wird die Öffnungsfehler-Korrektion erschwert. Sie ist im Seidelschen Gebiet nur für bestimmte Parameter möglich.

> Ein Dichromat aus „neuen Gläsern", dessen Öffnungsfehler trotz der sammelnden Kittfläche korrigiert ist, ist ein Neuachromat.

Ein anastigmatisches Simplet entsteht, wenn der Astigmatismus mittels einer geeigneten Lage der Öffnungsblende beseitigt wird. Ein solches System läßt sich jedoch nicht gleichzeitig hinsichtlich Öffnungsfehler und Koma korrigieren. Es sind im allgemeinen alte und neue Gläser miteinander zu kombinieren.

Anastigmate vom symmetrischen Dublettyp. Es liegt nahe, die günstigen Eigenschaften, die ein Doppelaplanat hat, für den Aufbau eines Anastigmaten zu nutzen. Dazu ist es notwendig, die Petzval-Summe der symmetrisch zur Öffnungsblende angeordneten Systemhälften klein zu halten. Damit ist das Prinzip der symmetrischen Anastigmaten gegeben:

> Im symmetrischen Anastigmaten sind die Koma, die Verzeichnung und der Farbfehler des Hauptstrahls für den Abbildungsmaßstab $\beta' = -1$ durch den symmetrischen Aufbau korrigiert.
> Die Petzval-Summe der beiden Glieder ist klein, und der Astigmatismus ist mittels eines geeigneten Abstandes der Glieder von der Öffnungsblende korrigiert.

Beim Hoeghschen Meniskus ist die Petzval-Summe gleich Null. Zwei Hoeghsche Menisken, die mit ihren konkaven Flächen der Blende zugekehrt sind (wegen der Astigmatismuskorrektion), ergeben also einen symmetrischen Anastigmaten. Ein derartiges System stellt das im Jahre 1900 von Hoegh angegebene Hypergon dar (Abb. 6.97a). Öffnungsfehler und Farblängsfehler sind nicht korrigiert, so daß das Öffnungsverhältnis auf 1:40 beschränkt bleibt. Die gute Korrektion der „Feldfehler" erlaubt Objektwinkel $2w = 140°$; es handelt sich also um ein Weitwinkelobjektiv.

Zur Korrektion des Öffnungsfehlers und des Farblängsfehlers müssen die Hälften des symmetrischen Anastigmaten mindestens aus zwei Linsen bestehen. Der Einsatz zweier Neuachromate mit Kittfläche ist wegen der geschilderten Nachteile hinsichtlich der Öffnungsfehlerkorrektion schwierig. Unverkittete zweilinsige Glieder sind jedoch möglich. So entsteht z. B. der Doppelanastigmat von Hoegh (1898), der für $K = 1:7{,}6$ und $2w = 60°$ ausgelegt war (Abb. 6.97b).

Aber auch mit alten Gläsern ist ein Anastigmat aufzubauen, wenn die beiden Linsen jedes Gliedes einen merklichen Abstand voneinander haben. Strenggenommen liegt dann kein Dublettyp, sondern ein Quadruplettyp vor. Für ein Glied gelten

die Ansatzbedingungen (bei $n = \nu = \infty$):

$$F'_1 = F'_{11} + \omega_{12} F'_{12}, \tag{6.295}$$

$$0 = \frac{F'_{11}}{\nu_{11}} + \omega_{12}^2 \frac{F'_{12}}{\nu_{12}} \quad \text{und} \tag{6.296}$$

$$0 = \frac{F'_{11}}{n_{12}} + \frac{F'_{12}}{n_{12}}, \tag{6.297}$$

woraus

$$\frac{F'_{11}}{F'_{12}} = -\frac{\nu_{11}}{\nu_{12}} \omega_{12}^2 = -\frac{n_{11}}{n_{12}} \tag{6.298}$$

folgt. Statt Gl. (6.293) ist also die weniger strenge Forderung

$$\omega_{12}^2 \frac{\nu_{11}}{\nu_{12}} = \frac{n_{11}}{n_{12}} \tag{6.299}$$

mit Hilfe einer geeigneten Glasauswahl zu erfüllen.

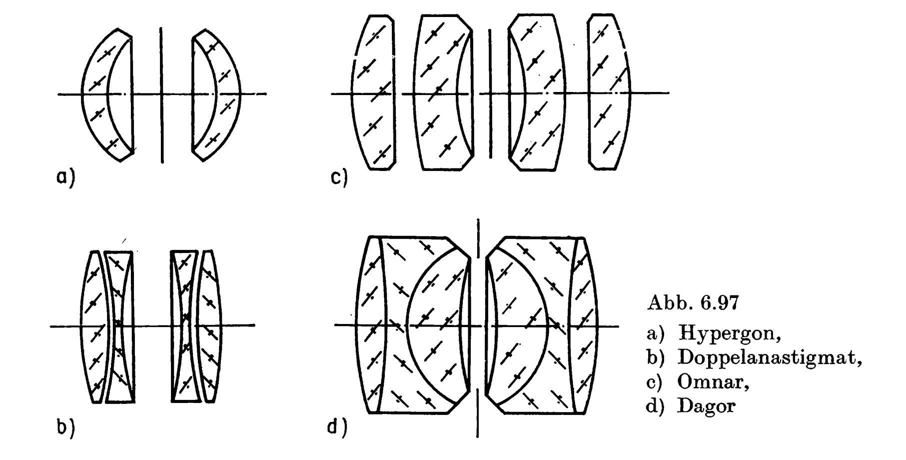


Abb. 6.97
a) Hypergon,
b) Doppelanastigmat,
c) Omnar,
d) Dagor

Bei $\nu_{11} = 1{,}5\nu_{12}$ ist mit $\omega_{12} = 1$ $n_{11} = 1{,}5n_{12}$ notwendig, bei $\omega_{12} = 0{,}8$ dagegen nur $n_{11} = 0{,}96n_{12}$, was mit alten Gläsern möglich ist.

Ein Beispiel für diese Ausführung des symmetrischen Anastigmaten ist das Omnar von Busch mit $K = 1:4{,}5$, bei dem $\nu_{11}/\nu_{12} = 1{,}76$, $n_{11}/n_{12} = 0{,}93$ ist (Abb. 6.97c).

In älteren Formen des symmetrischen Anastigmaten sind die Glieder dreilinsig mit einer sammelnden und einer zerstreuenden Kittfläche (Kopplung von Alt- und Neuachromaten). Die Kittflächen waren notwendig, weil die Entspiegelung noch nicht bekannt war und deshalb Glas-Luft-Flächen unerwünschte Reflexe mit sich bringen konnten. Die Abb. 6.97d zeigt als Beispiel das Dagor von Hoegh (1892), das für $K = 1:13$ und $2w = 70°$ verwendbar war. Die Vorrechnung eines zweilinsigen

Simplets ergibt zwei Lösungen, deren prinzipielle Linsenanordnung in Abb. 6.98a und Abb. 6.98b enthalten sind. Die Abb. 6.98a stellt ein System dar, wie es von FRAUNHOFER als Fernrohrobjektiv eingesetzt wurde. Das System nach Abb. 6.98b ist von GAUSS als Fernrohrobjektiv angegeben worden. Es hat den Vorteil eines kleinen Gauß-Fehlers. Wegen der starken Krümmungen ist es jedoch schwer zu fertigen, insbesondere zu zentrieren. Die Komakorrektion bereitet Schwierigkeiten.

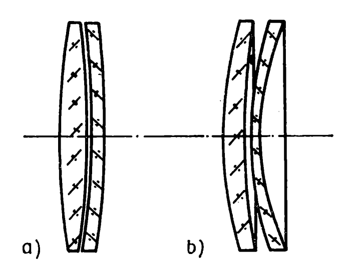


Abb. 6.98
a) Fraunhofer-Objektiv,
b) Gauß-Objektiv

Zwei symmetrisch zur Öffnungsblende aneordngete Gaußsche Fernrohrobjektive ergeben das Grundsystem für die Anastigmate vom Gauß-Typ. Bei diesem ist allerdings die Dicke der Menisken, die der Blende benachbart sind, oft wesentlich größer als beim Fernrohrobjektiv. Dadurch ist die Beseitigung der Petzval-Wölbung in den Gliedern leichter möglich (es sind die günstigen Eigenschaften des konzentrischen Meniskus angenähert übertragen).

Ein Beispiel für das symmetrische Gaußobjektiv ist das Omnar (Abb. 6.97c).

Anastigmate vom unsymmetrischen Dublettyp. Bei großen Öffnungsverhältnissen ist der symmetrische Aufbau ungünstig, wenn der Abbildungsmaßstab stark von $\beta' = -1$ abweicht. Deshalb sind unsymmetrische Dublets entwickelt worden, die in der Grundtendenz noch wesentliche Züge des symmetrischen Anastigmaten besitzen. Besonders deutlich zeigt sich dies beim Topogon von ZEISS (Abb. 6.99a), bei dem die erste und die letzte Linse geringfügig verschiedene Radien und Dicken haben. Es handelt sich um ein Weitwinkelobjektiv mit korrigiertem Öffnungs- und Farblängsfehler. Das Topogon wird wegen seiner kleinen Verzeichnung auch als Luftbildobjektiv verwendet. Es gab z. B. eine Ausführungsform mit $K = 1:6{,}3$ und $2w = 100°$ sowie eine Ausführung für Kleinbildaufnahmen mit $K = 1:4$, $2w = 82°$ und $f' = 25$ mm.

Auch das Orthometar von MERTÉ (1926) hat etwas verschiedene dreilinsige Glieder mit einer Kittfläche ($K = 1:4{,}5$, $2w = 70°$).

Vom symmetrischen Gauß-Typ leitet sich das Planar $1:3{,}3$, $2w = 50°$ ab (Abb. 6.99b), bei dem nur die letzte und die erste Fläche etwas verschiedene Radien haben. Das Planar kann als das Ausgangssystem der unsymmetrischen Anastigmate vom Gauß-Typ angesehen werden. Es besitzt die typischen dicken Menisken, die ihre konkave Fläche der Blende zukehren und im allgemeinen eine Kittfläche haben. Dazu kommen die beiden objekt- bzw. bildseitigen Sammellinsen, die oft wenig von der plankonvexen Form abweichen. Für große Öffnungsverhältnisse ist der Gauß-Typ besonders ausgezeichnet. Die abbildenden Strahlen werden an vielen

Flächen gebrochen, wobei die Einfallswinkel an den meisten Flächen klein bleiben. Der Öffnungsfehler ist deshalb mit kleinem Zonenfehler korrigierbar. Auch der Hauptstrahl hat an den einzelnen Flächen kleine Einfallswinkel, was günstig für die Astigmatismuskorrektion ist. Die Symmetrie geht bei großen Öffnungsverhältnissen und $\beta' \neq -1$ völlig verloren, so daß die Voraussetzungen für die Komakorrektion ungünstiger als bei symmetrischen Systemen sind. Ein bekanntes Objektiv vom Gauß-Typ war das Biotar, z. B. mit $K = 1:1{,}4$, $2w = 35°$ von Zeiss, das allerdings nicht mehr gefertigt wird (Abb. 6.99c).

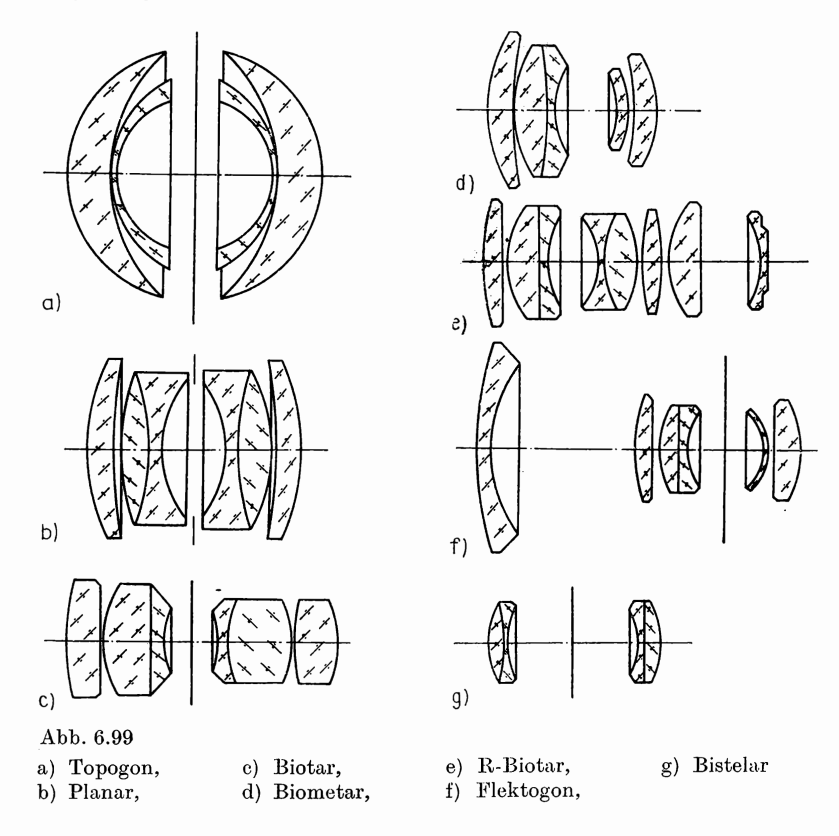


Abb. 6.99
a) Topogon, b) Planar, c) Biotar, d) Biometar, e) R-Biotar, f) Flektogon, g) Bistelar

Eine fünflinsige Gauß-Variante, die als Weitwinkelobjektiv eingesetzt wird, ist das Biometar $K = 1:2{,}8$, $2w = 60°$, $f' = 35$ mm (Abb. 6.99d). Es hat fast keine Farbkoma und einen sehr kleinen Farbvergrößerungsfehler.

Eine Weiterentwicklung des Gauß-Typs in Richtung von Systemen mit extremem Öffnungsverhältnis ist z. B. das R-Biotar $K = 1:0{,}85$, $2w = 32°$ (Abb. 6.99e), das für Oszillographen- und Röntgenschirmbildaufnahmen verwendet wird. Die Bildfeldebnung wird durch eine Smyth-Linse unterstützt. Diese stellt eine Zerstreuungslinse dar, die direkt vor der Bildebene steht und deren Petzval-Summe etwa entgegengesetzt gleich der Petzval-Summe des übrigen Objektivs ist. Die

Smyth-Linse wirkt sich nur in einer Verringerung der Petzval-Wölbung aus, weil bei ihr $\omega_K \approx 0$ ist und in sämtlichen Ansatz- und Vorrechnungsbedingungen, außer in der Petzval-Bedingung, der ihr zugeordnete Summand verschwindet. Da die Smyth-Linse mindestens den Durchmesser des Bildfeldes haben muß, ist sie schwer und konstruktiv ungünstig. Die Lage in der Bildebene bringt den Nachteil mit sich, daß Blasen in der Linse und Staub auf der Oberfläche im Bild zu sehen sind.

Bei den Flektogonen des VEB Carl Zeiss JENA ist vor eine Gauß-Variante in größerem Abstand ein zerstreuender Meniskus gesetzt. Es entsteht ein Objektiv mit langer Schnittweite. Als Beispiel diene das Flektogon $K = 1:2{,}8$, $2w = 63°$, $f' = 35$ mm (Abb. 6.99f).

Auch das Petzval-Objektiv läßt sich zu einem unsymmetrischen Anastigmaten vom Dublettyp ausbauen. Es muß dann aus Gliedern mit kleiner Petzval-Summe zusammengesetzt werden, indem in diesen moderne Gläser oder auch mehr als zwei Linsen zur Anwendung kommen.

Ein weiteres Beispiel für die unsymmetrischen anastigmatischen Dublets ist das Teleobjektiv. Durch den Aufbau aus einem sammelnden und einem zerstreuenden Glied hat es günstige Voraussetzungen für die Erfüllung der Petzval-Summe, ohne deren Korrektion in den Gliedern zu erfordern. Eines der ersten Teleobjektive war das Bistelar von BUSCH ($K = 1:11$, $2w = 36°$), für das $a'_{2F'} = 0{,}625 f'$ galt (Abb. 6.99g).

Heute werden Teleobjektive für fotografische Zwecke nur noch selten gefertigt, weil die Verkürzung der Schnittweite nicht so erheblich ist und sowohl die Öffnungsfehler- wie auch die Verzeichnungskorrektion schwierig ist. Bei Öffnungsverhältnissen $K = 1:5$ reicht der einfache Aufbau aus zweilinsigen Gliedern nicht aus. Für Kleinbildaufnahmen mit Brennweiten $f' < 500$ mm sind Fernobjektive auf der Basis der noch zu behandelnden Sonnare geeignet. Etwa ab Brennweite $f' = 500$ mm sind Spiegelobjektive vorteilhafter.

Anastigmate vom Triplettyp. Das einfache Triplet ist ein System aus drei Einzellinsen, die nicht vernachlässigbare Abstände voneinander haben. Bei einer Anordnung Sammellinse—Zerstreuungslinse—Sammellinse läßt sich das einfache Triplet als Anastigmat ausbilden. Die Petzval-Summe wird durch eine geeignete Brechkraftaufteilung auf die Einzellinsen genügend klein, so daß auch ältere Gläser verwendbar sind. Die Öffnungsfehlerkorrektion ist mit den zur Zeit verfügbaren Gläsern bis zu dem Öffnungsverhältnis $K = 1:2{,}8$ gut möglich. Weil jedoch die dritte Fläche konkav und die zerstreuende Wirkung der Mittellinse, die eine relativ hohe Brechkraft besitzt, besonders für die Randstrahlen wirksam ist, haben Triplets eine große Zone des Öffnungsfehlers.

Zu den ersten Triplets gehört die „Cooke-lens“ $K = 1:5{,}6$, $2w = 68°$ der englischen Firma Taylor, Taylor and Hobson (Abb. 6.100a). Durch das Einführen von Kittflächen oder das Aufspalten der Einzellinsen leiten sich aus dem einfachen Triplet eine ganze Reihe weiterer unsymmetrischer Anastigmate ab, die also als Tripletvarianten aufgefaßt werden können.

Besonders bekannt sind die Tessare, die Tripletvarianten mit verkittetem Hinterglied darstellen (Abb. 6.100b). Im allgemeinen ist die Kittfläche sammelnd, so daß

das Hinterglied mit einem Neuachromaten verwandt ist. Der Zonenfehler wird gegenüber demjenigen des einfachen Triplets verringert. Die Tessare zeichnen sich durch eine für den einfachen Aufbau sehr gute Bildschärfe aus, allerdings bei manchen Systemen erst nach einer gewissen Abblendung.

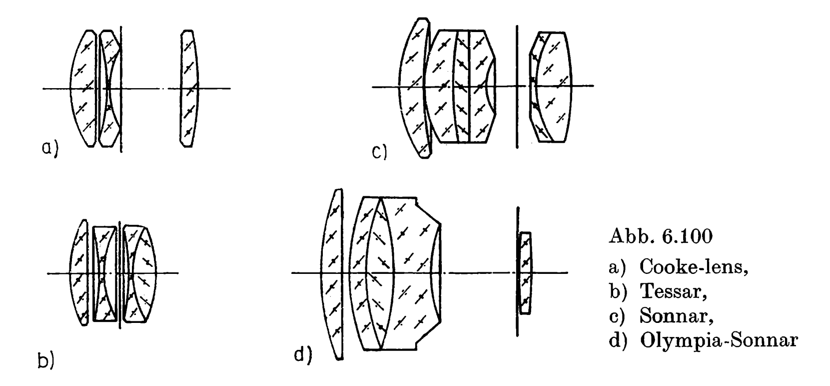


Abb. 6.100
a) Cooke-lens,
b) Tessar,
c) Sonnar,
d) Olympia-Sonnar

Auch die Gruppe der Sonnare geht aus dem einfachen Triplet hervor. Die Sonnare lassen sich als Tripletvarianten mit dreilinsigem Mittelglied und teilweise auch mit zweilinsigem Hinterglied auffassen. Als Beispiele seien das Sonnar $K = 1:2$, $2w = 45°$ (Abb. 6.100c), das Sonnar $K = 1:2{,}8$, $2w = 14°$, $f' = 108$ mm, das sogenannte „Olympiasonnar" (Abb. 6.100d) und das Sonnar $K = 1:4$, $2w = 8°$, $f' = 300$ mm genannt. Sonnare eignen sich wegen der guten Korrektion und der kleinen Baulänge als Fernobjektive. So hat z. B. das Sonnar $K = 1:4$, $f' = 135$ mm die Schnittweite $s' = 87{,}8$ mm, das Triotar (einfaches Triplet) mit sonst gleichen Daten die Schnittweite $s' = 134{,}2$ mm. Mit dem Sonnar lassen sich bei einfacherem Aufbau die gleichen Öffnungsverhältnisse erzielen wie mit Gauß-Varianten. Allerdings ist die Korrektion der Feldfehler nicht so gut wie bei diesen.

Weitere Tripletvarianten, bei denen jedes Glied mehrlinsig sein kann, gibt es in vielen Ausführungen. Wir können hier nicht weiter darauf eingehen.

6.5.5. Objektive mit veränderlicher Brennweite

In der Fotografie, besonders jedoch in der Kinematografie, besteht oft der Wunsch, den Objektwinkel an das Motiv anpassen zu können. Das ist mit einer Änderung der Brennweite des Aufnahmeobjektivs verbunden. Eine unstetige Brennweitenänderung ist bei den modernen Kameras mit Schlitzverschluß auf einfache Weise durch den Wechsel der Objektive möglich. Der hohe Aufwand (es werden im allgemeinen neben dem Standardobjektiv ein kurz- und ein langbrennweitiges Objektiv benötigt) erscheint dadurch gerechtfertigt, daß jedes System optimal korrigiert werden kann. Gegenüber dem Austausch des vollständigen Objektivs ist die Verwendung von Satzobjektiven preisgünstiger. Verschiedene Brennweiten lassen sich dadurch erzielen, daß die Teilglieder getrennt benutzt werden können bzw. einzelne

Glieder auswechselbar sind. Sie sind auch in Kameras zu verwenden, bei denen der Verschluß innerhalb des Objektivs liegt. Das Hinterglied mit dem Verschluß muß fest mit der Kamera verbunden bleiben. Die selbständige Benutzung der Teilglieder ist bei der Berechnung des Objektivs von vornherein zu berücksichtigen, um die Abbildungsfehler in Grenzen zu halten. Die Anforderungen an die Bildqualität sind aber durch die Kleinbildfotografie so gewachsen, daß der Korrektionszustand von

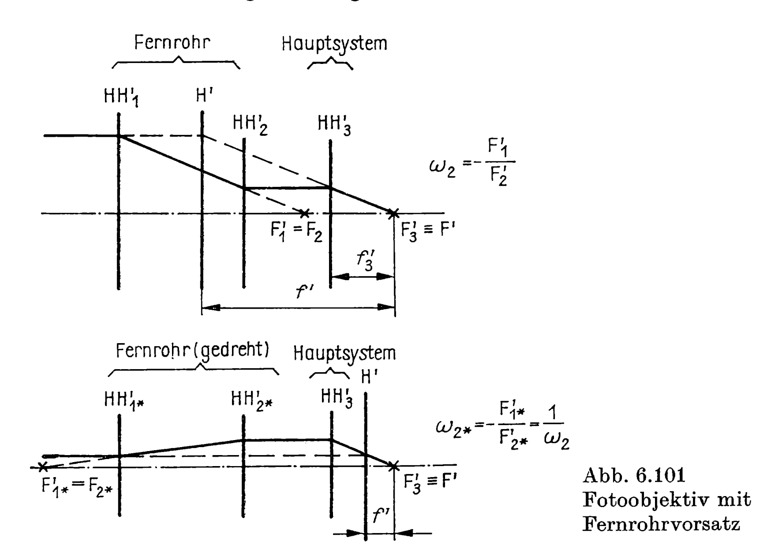


Abb. 6.101 Fotoobjektiv mit Fernrohrvorsatz

Teilgliedern heute nicht mehr befriedigen kann. Eine weitere Möglichkeit, die Brennweite unstetig zu verändern, ist durch das Vorschalten eines afokalen Vorsatzes, der im Prinzip ein holländisches Fernrohr darstellt, vor das eigentliche Aufnahmeobjektiv gegeben. Die Abb. 6.101 zeigt den Aufbau eines solchen Systems. Die Gesamtbrechkraft von Fernrohr und Hauptsystem erhalten wir aus

$$F' = F_1' + \omega_2 F_2' + \omega_3 F_3'. \tag{6.300}$$

Nach Abb. 6.101 ist

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{f_2}{f_1'} = -\frac{F_1'}{F_2'}. \tag{6.301}$$

Aus Gl. (6.300) folgt mit Gl. (6.301)

$$F' = \omega_2 F_3'. \tag{6.302}$$

Für die Gesamtbrennweite des Systems ist der Faktor ω_2 bestimmend, der je nach Stellung des Vorsatzes im Strahlengang größer oder kleiner als Eins werden kann. Für $\omega_2 > 1$ wird die Gesamtbrennweite gegenüber derjenigen des Hauptsystems vergrößert (Abb. 6.101 oben), für $\omega_2^* = \dfrac{1}{\omega_2} < 1$ dagegen verkleinert (Abb. 6.101

unten). Da das Hauptsystem auch ohne Vorsatz verwendet werden kann, stehen insgesamt drei Brennweiten zur Verfügung.

Größere praktische Bedeutung besitzen variofokale oder pankratische Systeme, die eine stetige Brennweitenänderung erlauben. Sie werden besonders in Film- und Fernsehkameras zur Erzielung sogenannter „Fahreffekte" eingesetzt. Bei der Anwendung in der Fotografie müssen für pankratische Systeme beim Durchfahren des Brennweitenbereichs folgende Forderungen erfüllt sein:

- Die Auffangebene muß ihre Lage unverändert beibehalten.
- Das Öffnungsverhältnis darf sich nicht ändern.
- Die Abbildungsqualität des Objektivs muß innerhalb gewisser Grenzen erhalten bleiben.

Um bei einer Änderung der Brennweite die Lage der Bildebene konstant zu halten, muß das optische System aus mindestens zwei Gliedern bestehen, die sich in axialer Richtung verschieben lassen. Die Verhältnisse bei der Abbildung der unendlich fernen Objektebene durch ein pankratisches System zeigt Abb. 6.102.

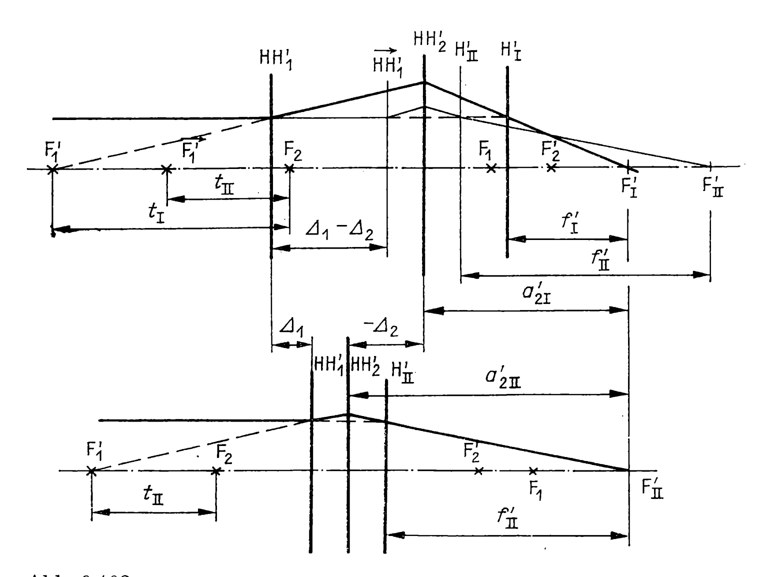


Abb. 6.102
Pankratisches System aus zwei Linsen

Für die Brennweite eines zweigliedrigen Systems gilt die Beziehung

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{t}. \tag{6.303}$$

Bei konstanten Einzelbrennweiten kann die Gesamtbrennweite durch Änderung der optischen Tubuslänge stetig variiert werden. Wird die dazu notwendige Verschiebung

nur von einem Teilglied, z. B. dem Vorderglied, ausgeführt, so verlagert sich auch die Bildebene. Das wird verhindert, wenn t in entsprechender Weise auf beide Glieder aufgeteilt wird. Aus Gl. (6.303) folgt

$$f'_{\mathrm{I}} t_{\mathrm{I}} = f'_{\mathrm{II}} t_{\mathrm{II}}. \tag{6.304}$$

Mit

$$t_{\mathrm{II}} = t_{\mathrm{I}} - \Delta t = t_{\mathrm{I}} + \Delta_2 - \Delta_1$$

ergibt sich aus Gl. (6.304)

$$\Delta_1 - \Delta_2 = f'_1 f'_2 \left(\frac{1}{f'_{\mathrm{II}}} - \frac{1}{f'_{\mathrm{I}}}\right) = -f'_1 f'_2 \frac{\Delta f'}{f'(f' + \Delta f')}. \tag{6.305}$$

Die Bildebene bleibt an ihrem Ort, wenn (Abb. 6.102)

$$a'_{2\mathrm{II}} = a'_{2\mathrm{I}} - \Delta_2 \tag{6.306}$$

gilt.

Über die Beziehungen

$$\beta'_2 = \frac{a'_2}{a_2} = -\frac{a'_2}{t + f'_2} = -\frac{f'_2}{t} \tag{6.307}$$

und Gl. (6.303) erhält man Δ_2 zu

$$\Delta_2 = \frac{f'_2}{f'_1} (f'_{\mathrm{II}} - f'_{\mathrm{I}}) = \frac{f'_2}{f'_1} \Delta f'. \tag{6.308}$$

Durch Einsetzen von Gl. (6.308) in Gl. (6.305) kann Δ_1 berechnet werden:

$$\Delta_1 = \frac{f'_2}{f'_1} \Delta f' \left[1 - \frac{f_1'^2}{f'(f' + \Delta f')}\right]. \tag{6.309}$$

Wie sich aus den Bestimmungsgleichungen für Δ_1 und Δ_2 ablesen läßt, ist bei einer Veränderung der Brennweite f' um $\Delta f'$ die Verschiebung Δ_2 des Hintergliedes linear, die Verschiebung Δ_1 des Vordergliedes nichtlinear. Beide Bewegungen müssen durch ein kompliziertes Getriebe gekoppelt werden. Derartige pankratische Systeme werden in der Literatur als Systeme mit mechanischem Ausgleich bezeichnet.

Die Korrektion der pankratischen Systeme über den gesamten Brennweitenbereich ist mit Schwierigkeiten verbunden. Es wird deshalb der Varioteil so angelegt, daß er ein virtuelles Bild in großer Entfernung liefert und zusammen mit einem Grundobjektiv verwendet werden kann. Trotzdem läßt sich das Gesamtsystem nur für eine mittlere Brennweite korrigieren. Bei jeder anderen Einstellung treten Bildverschlechterungen auf. Als Beispiel für ein Variosystem mit mechanischem Ausgleich wird in Abb. 6.103 das Vario-Glaukar (1:2,8, $f' = 25$ mm$\cdots$80 mm) gezeigt. Aus Abb. 6.103 ist zu erkennen, daß sich die Öffnungsblende hinter dem eigentlichen pankratischen System befindet. Das ist notwendig, um die Forderung nach einem konstanten Öffnungsverhältnis zu erfüllen. Zum Beweis dieser Aussage dient Abb. 6.104.

Die relative Öffnung ist definiert zu:

$$K = \frac{2\varrho_p}{f'}. \tag{6.310}$$

Daraus folgt mit

$$\beta'_p = \frac{\varrho'_p}{\varrho_p} = -\frac{z'_p}{f'}$$

die Beziehung

$$K = -\frac{2\varrho'_p}{z'_p}. \tag{6.311}$$

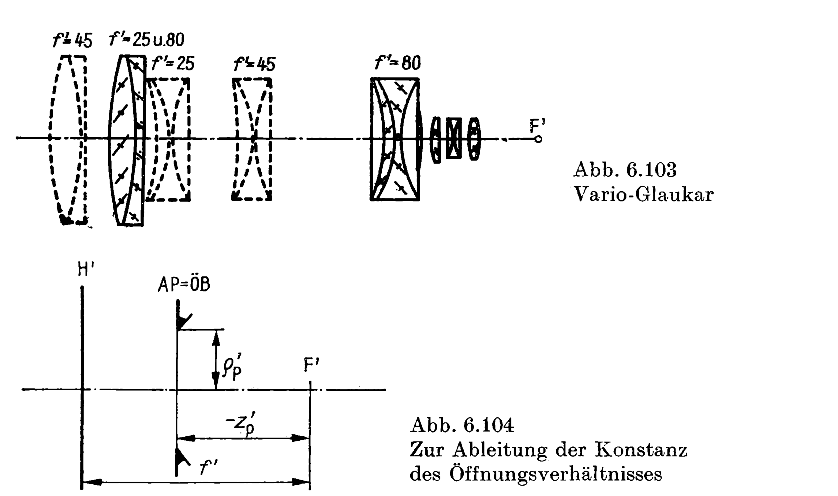


Abb. 6.103
Vario-Glaukar

Abb. 6.104
Zur Ableitung der Konstanz des Öffnungsverhältnisses

Für $a_1 = -\infty$ fällt die ortsfeste Bildebene des pankratischen Systems mit der Brennebene zusammen. Der Abstand $-z'_p$ zwischen Brennebene und Öffnungsblende (Austrittspupille) bleibt stets der gleiche, so daß das Öffnungsverhältnis unabhängig von der Brennweite einen konstanten Wert behält.

Bei den pankratischen Systemen mit mechanischem Ausgleich ist die Koppelung zwischen den ungleich bewegten Stellgliedern nur mit hohem konstruktivem Aufwand zu verwirklichen. Daher hat man nach Lösungen gesucht, die eine gemeinsame Verschiebung zweier fest miteinander verbundener Glieder gestatten.

Abb. 6.105a zeigt ein optisches System aus drei Gliedern. Seine Brennweite ergibt sich mit

$$\omega_2 = -\frac{t_{12} + f'_2}{f'_1}$$

und

$$\omega_3 = \frac{h_3}{h_2} \cdot \omega_2 = \frac{t_{12}(t_{23} + f'_3) - f'^2_2}{f'_1 f'_2}$$

zu

$$f' = \frac{f_1' f_2' f_3'}{t_{12} t_{23} - f_2'^2}. \tag{6.312}$$

Werden die Glieder 1 und 3 gemeinsam in Lichtrichtung um $+v$ gegenüber dem 2. Glied verschoben, so ändern sich in Gl. (6.312) die optischen Tubuslängen und damit die Gesamtbrennweite des Systems:

$$f_v' = \frac{f_1' f_2' f_3'}{(t_{12} - v)(t_{23} + v) - f_2'^2}. \tag{6.313}$$

Der Ort der Bildebene (Brennebene) bleibt konstant, wenn die Bedingung

$$\Delta l' = l_v' - l' = v - z_3' + z_{3v}' = v + \Delta z_3' = 0 \tag{6.314}$$

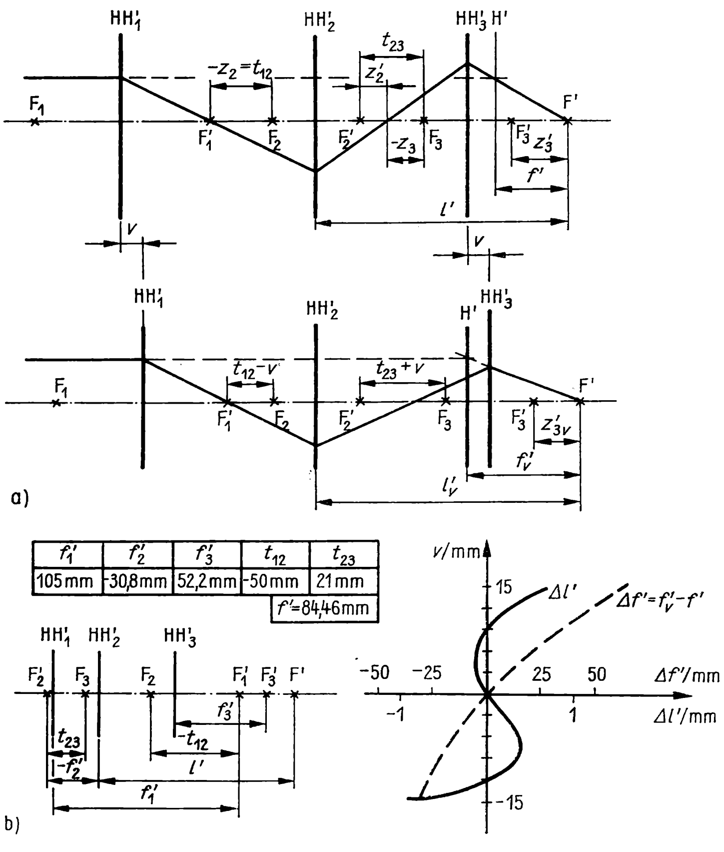


Abb. 6.105

a) Pankratisches System aus drei Gliedern,
b) Brennweitenänderung im System nach Abb. a)

für alle Werte v erfüllt ist. Durch Anwendung der Newtonschen Abbildungsgleichung können z_3' und z_{3v}' bestimmt werden, und man erhält

$$\Delta l' = v + \frac{(t_{12} - v) f_3'^2}{(t_{12} - v)(t_{23} + v) - f_2'^2} - \frac{t_{12} f_3'^2}{t_{12} t_{23} - f_2'^2} = 0. \qquad (6.315)$$

Die Gl. (6.315) ist 3. Grades in v. Daraus folgt, daß sich der Ort der Bildebene mit der Verschiebung v ändert, aber dreimal gleich ist (für die drei Nullstellen der Gl. (6.315)).

Die Abb. 6.105b zeigt an einem Beispiel den Gang der Brennweitenänderung $\Delta f'$ und die Abweichungen von der Konstanz der Bildebenenlage $\Delta l'$ als Funktion der Verschiebung v.

Wird der Varioteil zusammen mit einem Grundsystem benutzt, dann lassen sich bei geeigneter Wahl seiner Parameter nach Gl. (6.315) Werte für $\Delta l'$ erzielen, die innerhalb der Schärfentiefe des Grundsystems liegen und dadurch zu vernachlässigen sind. Da die Auswanderung der Bildebene dieser Systeme durch optische Mittel ausgeglichen wird, hat sich für sie die Bezeichnung Systeme mit optischem Ausgleich eingebürgert.

Ein solches System ist das Voigtländer-Zoomar (1 : 2,8, $f' = 36$ mm$\cdots$82 mm), dessen Aufbau in Abb. 6.106 dargestellt ist.

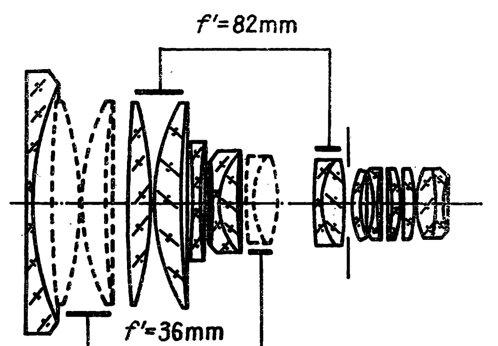


Abb. 6.106
Zoomar

6.5.6. Spiegelobjektive

Um weit entfernte Objekte formatfüllend abbilden zu können, z. B. bei Sportaufnahmen, sind große Objektivbrennweiten erforderlich. Damit ist, selbst bei Teleobjektiven, eine große Baulänge verbunden. Durch den Einsatz von Spiegelflächen kann die Baulänge klein gehalten werden.

Spiegelsysteme haben gegenüber Linsensystemen drei weitere Vorteile:

— Bei der Reflexion treten keine chromatischen Abbildungsfehler auf. Daher bilden Spiegelsysteme völlig farbfehlerfrei ab.

— Die Querabweichung des Öffnungsfehlers eines sphärischen Hohlspiegels ist im Seidelschen Gebiet für $s = -\infty$ etwa 1/7 derjenigen einer Linse gleicher Brennweite, deren Durchbiegung so bestimmt worden ist, daß der Öffnungsfehler

seinen kleinsten Wert hat. Deshalb lassen sich Spiegelobjektive im allgemeinen bei gleichem Öffnungsverhältnis mit kleinerem Zonenfehler korrigieren als Linsensysteme.

— Ein sphärischer Hohlspiegel ist frei von Astigmatismus und Koma, wenn er mit einer Öffnungsblende in der Ebene seines Krümmungsmittelpunktes benutzt wird („natürliche Blende"). Außeraxiale Punkte werden dann nur mit Öffnungsfehler und anastigmatischer Bildfeldwölbung abgebildet.

Für die Korrektion des Öffnungsfehlers bestehen mehrere Möglichkeiten. Mit einer parabolischen Spiegelfläche wird der unendlich ferne Achspunkt öffnungsfehlerfrei abgebildet. Bei der Abbildung von Punkten, die sich außerhalb der optischen Achse befinden, wirken sich dann jedoch Koma und Astigmatismus sehr störend auf das Bild aus. Mit Hilfe einer Spiegellinse nach MANGIN (Abb. 4.66) kann der Öffnungs-

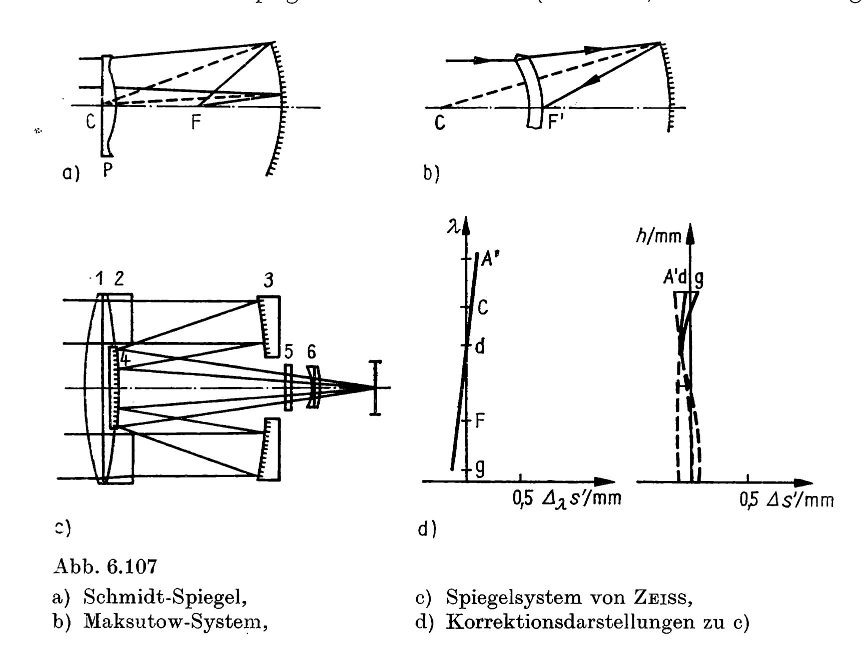


Abb. 6.107
a) Schmidt-Spiegel,
b) Maksutow-System,
c) Spiegelsystem von ZEISS,
d) Korrektionsdarstellungen zu c)

fehler durch die zweimalige Brechung an der Vorderfläche der Linse korrigiert werden. Von Nachteil sind u. a. die dabei entstehenden außeraxialen Abbildungsfehler sowie der Farbfehler. Eine wesentliche Verbesserung der Spiegelsysteme hinsichtlich der Korrektion des Öffnungsfehlers wurde durch die Erfindung von B. SCHMIDT (1931) und D. D. MAKSUTOW (1941) erreicht. SCHMIDT beseitigte die sphärische Unterkorrektion durch eine Korrektionsplatte in der Ebene des Krümmungsmittelpunktes des Hohlspiegels, deren eine Fläche in der Mitte konvex und am Rande konkav ausgebildet ist (Abb. 6.107a). Dadurch werden nahezu alle Strahlen eines achsparallelen Bündels im Spiegelbrennpunkt einer mittleren Zone vereinigt. Schmidt-Systeme sind außerdem weitgehend frei von Koma, Astigmatismus und Farbfehler. MAKSUTOW

benutzte einen zum Krümmungsmittelpunkt des sphärischen Hohlspiegels konzentrischen Meniskus, der weder Koma noch Astigmatismus einführt (Abb. 6.107b). Der Öffnungsfehler des Hohlspiegels wird durch eine entsprechend gewählte Dicke des Meniskus korrigiert. Der Farbfehler kann durch Achromatisierung der Korrektionslinse beseitigt werden.

Eine ausreichende Korrektion des Öffnungsfehlers ist auch mit Linsensystemen möglich, die vor dem sphärischen Hohlspiegel angeordnet sind (Abb. 6.107c). Werden beide Linsen aus dem gleichen Glas hergestellt und besitzen sie entgegengesetzt gleiche Brechkräfte, dann bilden sie ein nahezu afokales und farbfehlerfreies System.

Die Korrektion der Bildfeldwölbung kann durch einen sammelnden Achromaten in der Nähe der Auffangebene erreicht werden (Smyth-Linse). Dadurch verlagert sich die „natürliche" Blende vom Krümmungsmittelpunkt in Richtung auf den Spiegel, was zu einer wesentlichen Verkürzung der Baulänge führt.

Neben Vorteilen besitzen Spiegelsysteme jedoch auch Nachteile. Durch die Umkehrung der Lichtrichtung am Spiegel muß sich die Auffangebene vor dem Spiegel befinden. Das ist nur bei speziellen Anwendungszwecken möglich. Meistens werden mit einem zweiten Spiegel (Hilfsspiegel) die Strahlen wieder in ihre ursprüngliche Richtung reflektiert. Der Hauptspiegel ist durchbohrt, um dem abbildenden Bündel den Durchtritt zu gestatten. In beiden Fällen wird der mittlere Teil des Bündels abgeschattet. Als Maß für die Abschattung kann das Verhältnis der abgeschatteten Pupillenfläche A_a zur Fläche der Eintrittspupille ohne Zentralabschattung A_0 benutzt werden; Spiegelsysteme mit Hilfsspiegel besitzen eine ringförmige Eintrittspupille, so daß

$$\tau = \left(\frac{\varrho_a}{\varrho_0}\right)^2 \tag{6.316}$$

gilt.

Die wirksame relative Öffnung K_w ist dann gegeben durch

$$K_w = \frac{2\varrho_0}{f'} \sqrt{1 - \tau}. \tag{6.317}$$

Eine ringförmige Eintrittspupille verändert auch die Intensitätsverteilung im Beugungsbild. Abbildung 4.192 zeigt die Intensitätsverteilung in der Bildebene bei der Abbildung eines leuchtenden Punktes mit voller und ringförmiger Eintrittspupille. Durch das Ausblenden des zentralen Bündelteils verlagert sich die Intensität vom Hauptmaximum auf die Nebenmaxima. Das ist mit einer Abnahme des Bildkontrastes verbunden. Das Auflösungsvermögen ist verbessert, weil die erste Nullstelle näher am Hauptmaximum liegt als bei voller Öffnung.

Für normale fotografische Zwecke ist jedoch die Steigerung des Kontrastes vorteilhafter als die des Auflösungsvermögens. Außerdem kann durch Fremdlicht, das seitlich am Hilfsspiegel vorbei unmittelbar in die zentrale Durchlaßöffnung des Hauptspiegels fällt, der Bildkontrast wesentlich verschlechtert werden. Deshalb müssen in das System Blenden eingebaut werden, die das schräg einfallende Fremdlicht abfangen. Ein weiterer Nachteil der Spiegelsysteme ist die Empfindlichkeit

der Spiegelflächen gegenüber Falschlagen. Die vorzusehenden Justierstellen und die Justierung selbst bedeuten einen hohen konstruktiven und fertigungstechnischen Aufwand. Abbildung 6.107c zeigt als Beispiel das Zeiss-Spiegelobjektiv 4/500. Außer Haupt- und Hilfsspiegel, den beiden Frontlinsen zur Korrektion des Öffnungsfehlers und dem Achromaten vor der Auffangebene (Smyth-Linse) befindet sich im Strahlengang ein Filterrevolver. Hier können neben Farbfiltern auch Graufilter zur Schwächung des Lichtstroms eingesetzt werden, da das Objektiv keine veränderliche Öffnungsblende besitzt. Die ausgezeichnete Farb- und Öffnungsfehlerkorrektion ist in Abb. 6.107d zu erkennen.

6.5.7. Fernrohrobjektive

Bei Fernrohrobjektiven müssen wir zwischen Objektiven für den visuellen Gebrauch und Objektiven für die Astrofotografie unterscheiden. Letztere sind im eigentlichen Sinne keine Fernrohr- sondern Fotoobjektive, so daß wir sie zunächst ausklammern wollen.

Fernrohrobjektive haben die Aufgabe, ein kleines Feld mit großer Öffnung und polychromatischem Licht abzubilden. Daraus folgt, daß

— der Öffnungsfehler,
— die Koma für kleine Flächen (Erfüllung der Sinusbedingung),
— der Farblängsfehler

korrigiert sein müssen. Großen Einfluß auf die Bildqualität hat die Korrektion der Farbfehler. Trichromatische Korrektion mit beseitigtem Gauß-Fehler ist deshalb bei Hochleistungsobjektiven anzustreben.

Zweilinsige Achromate. Es bereitet keine Schwierigkeiten, aus einer Sammel- und einer Zerstreuungslinse einen Achromaten herzustellen. Bei Geräteoptik und nicht zu großen Linsendurchmessern lassen sich beide Linsen verkitten oder ansprengen (Abb. 6.108a). Das Öffnungsverhältnis kann etwa bis zu 1 : 3,5 betragen.

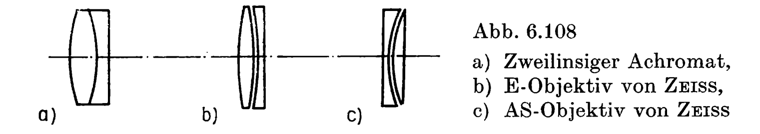


Abb. 6.108
a) Zweilinsiger Achromat,
b) E-Objektiv von Zeiss,
c) AS-Objektiv von Zeiss

Die für astronomische Zwecke verwendeten Objektive haben Öffnungsverhältnisse um 1 : 10 herum. Bei größeren Durchmessern (etwa ab 60 mm) wäre eine Verkittung nicht stabil. Außerdem ist bei nichtverkitteten Linsen ein weiterer Radius für Korrektionszwecke frei. Die Abb. 6.108b enthält das E-Objektiv von Zeiss.

Zweilinsige Halbapochromate. Durch den Einsatz von Kurzflint in der Zerstreuungslinse kann das sekundäre Spektrum verringert werden. Das Öffnungsverhältnis muß auf etwa 1 : 11 begrenzt bleiben. Ein derartiger Halbapochromat ist das AS-Objektiv (Abb. 6.108c).

Dreilinsige Achromate. Für größere Öffnungsverhältnisse und höhere Ansprüche an die Bildqualität müssen die Fernrohrobjektive dreilinsig sein. Es sind sowohl Systeme mit verkitteten Linsen (Abb. 6.109a) wie auch mit einem Luftabstand in Gebrauch (Abb. 6.109b).

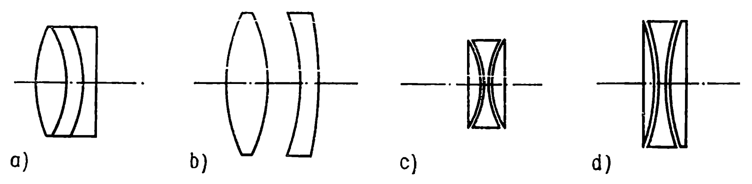


Abb. 6.109
a) Dreilinsiger Achromat,
b) Dreilinsiger Achromat mit Luftlinse,
c) B-Objektiv von Zeiss,
d) F-Objektiv von Zeiss

Dreilinsige Apochromate. Trichromate mit korrigiertem Gauß-Fehler beruhen vorwiegend auf dem Einsatz von Gläsern mit ungewöhnlichem Dispersionsverlauf. Zwei Glasarten sind ausgezeichnet, die Kurzflinte und die Schwerflinte. Entsprechend gibt es Kurzflint- und Schwerflintapochromate.

Die Kurzflintapochromate (Abb. 6.109c, B-Objektiv 1 : 15) enthalten Linsen stärkerer Krümmung; das erreichbare Öffnungsverhältnis ist eingeschränkt, und die Linsen sind empfindlich gegen Dezentrierung.

Schwerflintapochromate haben etwas günstigere Krümmungen. Sie werden verkittet (mit Öffnungsverhältnissen bis 1 : 3 bei Geräteoptik), unverkittet (als Fernrohrobjektive wie z. B. das F-Objektiv 1 : 11, Abb. 6.109d) und mit einem größeren Luftabstand zwischen zwei Linsen hergestellt.

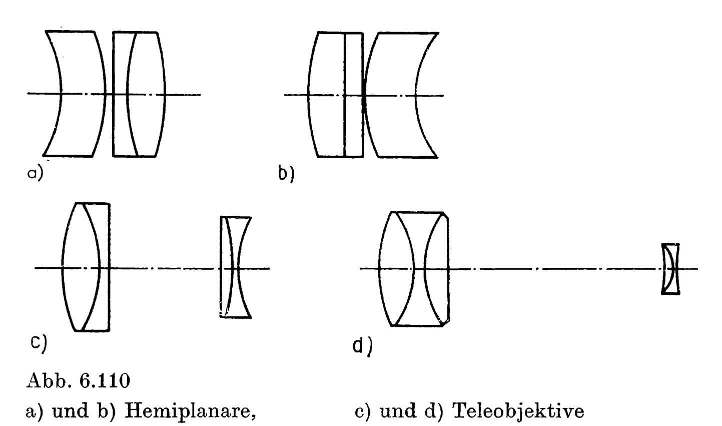


Abb. 6.110
a) und b) Hemiplanare,
c) und d) Teleobjektive

Hemiplanare. Diese Objektive enthalten einen Meniskus auf der Objektseite (Abb. 6.110a) oder auf der Bildseite (Abb. 6.110b), mit dem der Astigmatismus und die Bildfeldwölbung günstig zu beeinflussen sind. Sie werden eingesetzt, wenn etwas größere Felder benötigt werden (bis etwa $2w = 20°$).

Teleobjektive können auch als Fernrohrobjektive ausgebildet werden. Mit ihnen sind besonders Fernrohre in geodätischen Geräten ausgerüstet.

Die Einstellung eines Fernrohrs mit Teleobjektiv auf eine endliche Objektweite wird oftmals nicht durch das Verschieben des Okulars, sondern durch das Verschieben des zerstreuenden Gliedes im Teleobjektiv vorgenommen (Innenfokussierung).

Normale Teleobjektive können bis zu einem Feldwinkel $2w = 38°$ und dem Öffnungsverhältnis 1 : 5,6 verwendet werden (Abb. 6.110c). Der Gauß-Fehler ist zu verringern, wenn das sammelnde Glied als Schwerflintapochromat ausgebildet wird (Abb. 6.110d).

Astrofotografie. Objektive für Astrokameras benötigen im allgemeinen bei guter Korrektion in der Umgebung der optischen Achse und für polychromatisches Licht auch die Korrektion für ein größeres Feld als die visuell benutzten Systeme. Sie sind deshalb aus den Grundtypen der Fotoobjektive abzuleiten.

Es gibt z. B. den Fernrohraplanaten (Grundtyp Petzval-Objektiv), Triplets, auf die auch der Astrovierlinser von Sonnefeld zurückzuführen ist (in der Abb. 4.59 als Beispiel für ein System mit einer deformierten Fläche angegeben), Tessare, Sonnare und Planare.

Dabei ist zu beachten, daß alle diese Systeme bei großen Brennweiten nur für geringere Feldwinkel als bei den normalen Fotoobjektiven korrigierbar sind.

Spiegelobjektive. In der historischen Entwicklung der Fernrohre und bei Fernrohren mit sehr großer Eintrittspupille spielen die Spiegelobjektive eine hervorragende Rolle.

Die historische Bedeutung resultiert einmal daraus, daß es Newton als unmöglich ansah, den Farbfehler von den Linsen zu beseitigen, zum anderen auch daraus, daß selbst nach dem Erkennen von Newtons Irrtum die praktische Realisierung von Achromaten nicht lösbar war.

Heute sprechen für die Spiegelobjektive die völlige Farbfehlerfreiheit der Oberflächenspiegel, die günstige Öffnungsfehlerkorrektion bei Parabolspiegeln oder bei Kugelspiegeln mit Hilfslinsen und das relativ geringe Gewicht bei großen Durchmessern.

Der Nachteil der Spiegel sind die geringeren zulässigen Fertigungstoleranzen der Oberfläche.

Über 1 m Durchmesser sind Linsenobjektive praktisch nicht verwendbar. Die große Glasmasse und Linsendicke bringen es mit sich, daß Glasfehler schwierig zu vermeiden sind und das Glas als amorpher Stoff zeitlich instabil ist. Die Linse kann regelrecht fließen.

Ein Problem bei den Spiegelobjektiven stellt die Rückläufigkeit des Lichtes dar. Es sind Maßnahmen notwendig, mit denen das bildseitige Bündel aus dem objektseitigen ausgekoppelt wird. Dazu dienen vor allem Fangspiegel und Bohrungen im Hauptspiegel. Diese führen jedoch leicht zu Spannungen im Spiegelmaterial.

Die Spiegelfernrohre von Gregory, Cassegrain und Newton enthalten einen parabolischen Hauptspiegel.

Bei der Variante von GREGORY ist der Hauptspiegel durchbohrt, der Fangspiegel ist elliptisch (Abb. 6.111a). Der bildseitige Brennpunkt des Objektivs und der objektseitige Brennpunkt des Okulars liegen in je einem geometrischen Brennpunkt des Ellipsoids. Das Bild ist aufrecht, die Baulänge groß.

Bei der Cassegrainschen Ausführung ist der Hauptspiegel ebenfalls durchbohrt. Der Fangspiegel ist hyperbolisch, das Bild höhen- und seitenvertauscht, die Baulänge gegenüber dem Gregoryschen System kleiner (Abb. 6.111b).

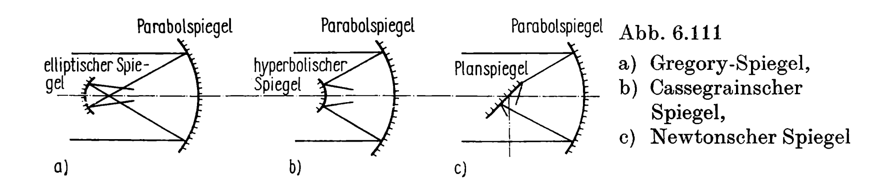


Abb. 6.111
a) Gregory-Spiegel,
b) Cassegrainscher Spiegel,
c) Newtonscher Spiegel

NEWTON vermeidet das Durchbohren des Hauptspiegels, indem er das Licht mittels eines Planspiegels seitlich herausführt (Abb. 6.111c).

SCHMIDT erfand 1930 in Hamburg-Bergedorf das nach ihm benannte Spiegelsystem. Seine Idee, die Koma, den Astigmatismus und die Verzeichnung durch die Anordnung der Öffnungsblende in der Ebene des Krümmungsmittelpunktes, den Öffnungsfehler mittels einer asphärischen Korrektionsplatte zu beseitigen, wurde bereits bei den Fotoobjektiven behandelt (Abb. 6.107a). Dort ist auch das Maksutow-System angegeben, bei dem die Schmidt-Platte durch einen sphärischen Meniskus ersetzt wird (Abb. 6.107b).

6.5.8. Mikroobjektive

Mikroobjektive sind im allgemeinen kurzbrennweitige optische Systeme, die ein kleines Feld mit großer objektseitiger numerischer Apertur abbilden. Ausnahmen davon stellen nur die schwachen Mikroobjektive für kleine Abbildungsmaßstäbe dar.

Nach Abschnitt 6.2.3. sind die Objektive für endliche Bildweite (z. B. für die mechanische Tubuslänge 160 mm bzw. für die Objekt-Bild-Entfernung 192 mm) und die Objektive mit unendlicher Bildweite zu unterscheiden. Letztere können im Mikroskop nur mit zusätzlicher Tubuslinse verwendet werden.

Spezialausführungen gibt es für verschiedene Mikroskopierverfahren. In den Objektiven für die Polarisationsmikroskopie sind die Linsen besonders spannungsarm gefaßt. Objektive für das Phasenkontrastverfahren enthalten die Phasenplatte zur Ortsfrequenzfilterung im primären Bild.

Immersionsobjektive sind so korrigiert, daß die volle Bildleistung nur bei Anwendung der Ölimmersion erreicht wird. Da bereits das Deckglas, mit dem die mikroskopischen Präparate abgedeckt werden, Abbildungsfehler einführt, sind die stärkeren Objektive meistens für die standardisierte Deckglasdicke 0,17 mm korrigiert. Es gibt aber auch Objektive, die ohne abgedecktes Präparat zu benutzen sind. Objektive

mit Korrektionsfassung lassen sich auf Deckglasdicken zwischen 0,12 und 0,20 mm einstellen.

Die Normalfeldobjektive sind für den Bildfelddurchmesser 20 mm, die Großfeldobjektive für den Bildfelddurchmesser 28 mm berechnet.

Bei Mikroobjektiven sind

— der Öffnungsfehler und
— die Farbfehler zu korrigieren sowie
— die Sinusbedingung zu erfüllen.

Bei den Planobjektiven kommt die anastigmatische Korrektion hinzu.

Achromate sind Dichromate, deren Öffnungsfehler korrigiert ist und bei denen die Sinusbedingung erfüllt ist. Astigmatismus und Koma sind gering. Achromate haben Bildfeldwölbung und ein sekundäres Spektrum. Die Bildfeldwölbung ist bei visuellem Gebrauch wegen der Möglichkeit der Akkommodation nicht besonders störend.

Die Struktur der Achromate ist je nach der numerischen Apertur verschieden, weil naturgemäß der Aufwand mit der Apertur ansteigt. Abbildung 6.112 enthält einige Beispiele. Bei den stärkeren Objektiven wird oftmals die Amicische Frontlinse verwendet. Diese stellt eine dicke Plankonvexlinse dar, die nahezu aplanatisch ist.

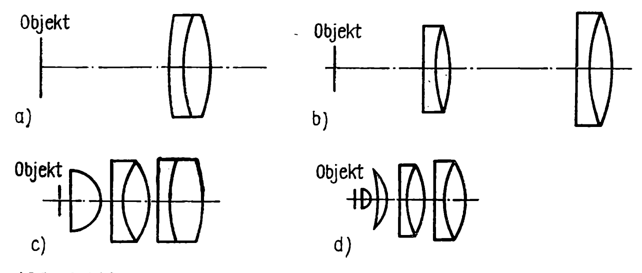


Abb. 6.112
Achromatische Mikroobjektive verschiedener Apertur

Apochromate haben gegenüber den Achromaten ein wesentlich verringertes sekundäres Spektrum (trichromatische Korrektion), und der Gauß-Fehler ist korrigiert.

Unkorrigiert ist die Bildfeldwölbung. Der Farbfehler des Hauptstrahls läßt sich ebenfalls schwierig beseitigen. Deshalb verwendet man Apochromate zusammen mit Kompensationsokularen, die den Farbfehler des Hauptstrahls der Objektive kompensieren.

Bereits Abbe fand durch Rechnungen und Experimente, daß eine wesentliche Verbesserung der Achromate durch die Korrektion des Gauß-Fehlers möglich ist. Man mußte dazu eine Fläche einführen, die den Öffnungsfehler unterkorrigiert, den Farblängsfehler aber überkorrigiert. Das erforderte den Einsatz von Gläsern, die wir als neue Gläser im früher behandelten Sinne anzusehen haben. Abbe standen anfangs diese Gläser nicht zur Verfügung, deshalb verwendete er Flüssigkeits-

menisken zwischen Linsen. Die Zusammenarbeit mit SCHOTT ermöglichte es, bereits 1884 die ersten Apochromate herauszubringen.

Zur apochromatischen Korrektion ist der Einsatz von Kristallen vorteilhaft (Flußspat, Lithiumfluorid, Thalliumfluorid). Heute stehen jedoch auch optische Gläser zur Verfügung, die die Kristalle ersetzen können (z. B. Berylliumgläser).

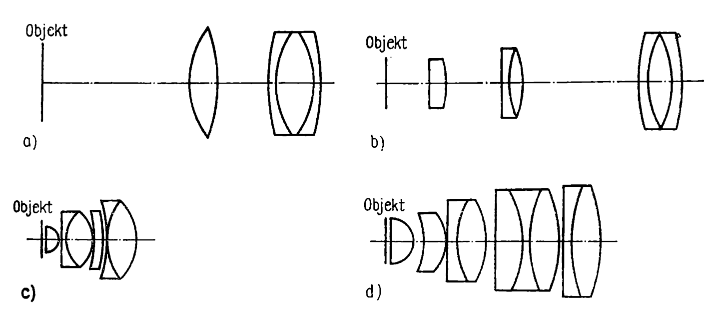


Abb. 6.113
Apochromatische Mikroobjektive verschiedener Apertur

In der Abb. 6.113 sind einige Schnittbilder von Apochromaten angegeben.

Halbapochromate sind Achromate mit vermindertem Gauß-Fehler. Das wird durch den Einsatz von Flußspat erreicht (Fluoritobjektive). Das sekundäre Spektrum ist größer als bei den Apochromaten. Der einfachere Aufbau kann jedoch zu kontrastreicheren Bildern führen.

Planachromate und Planapochromate sind Objektive mit geebnetem Bildfeld. Bei den Achromaten und Apochromaten ist das Bildfeld nach der Objektseite zu gewölbt. Das gekrümmte Bildfeld ist besonders für die Mikrofotografie ungünstig, weil entweder nur die Mitte oder nur der Rand scharf abgebildet wird.

Die Ebnung des Bildfeldes erfordert die Erfüllung der Petzval-Bedingung. Das gelang erstmals BOEGEHOLD 1938 bei Zeiss.

Für sehr kleinen Betrag des Abbildungsmaßstabes kann ein optisches System verwendet werden, das einem umgekehrten Teleobjektiv ähnelt. Sonst sind für die

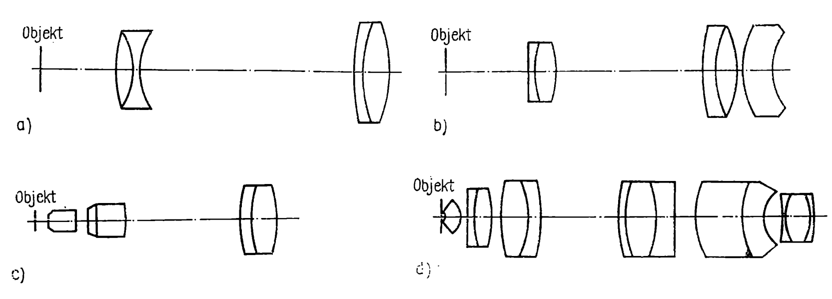


Abb. 6.114
Planobjektive verschiedener Apertur

Planobjektive dicke Menisken charakteristisch. Diese können bei positiver Brennweite eine negative Petzval-Summe haben, so daß sie besonders zur Korrektion der Bildfeldwölbung geeignet sind.

Die meisten Planobjektive müssen mit Plan-Kompensationsokularen zusammen benutzt werden. Es gibt aber auch Planobjektive mit korrigiertem Farbfehler des Hauptstrahls. Abbildung 6.114 enthält einige Beispiele für Planobjektive.

Monochromate sind Mikroobjektive, die nur für eine Wellenlänge korrigiert sind. Sie sind für das Arbeiten im Ultravioletten gedacht (z. B. Wellenlängen 275 nm oder 257 nm). Monochromate bestehen aus aplanatischen Menisken und einer Zerstreuungslinse. Als Werkstoff dient geschmolzener Quarz.

In der Tab. 6.16 sind für eine Auswahl an Mikroobjektiven die optischen Daten zusammengestellt.

Tabelle 6.16
Übersicht über eine Auswahl an Mikroobjektiven

Objektivtyp	$\|\beta'\|$	A	f'/mm	freier Objektabstand
Achromate	2,5	0,08	56,3	9,5
	8	0,20	18	9
	20	0,40	8,3	1,6
	40	0,65	4,4	0,55
	90	1,25	2	0,11
Apochromate	10	0,3	16,2	5
	20	0,65	8,3	0,7
	40	0,95	4,3	0,12
	60	1	2,9	0,22
	90	1,3	2	0,11
Planachromate	2,5	0,07	30,4	8,6
	10	0,25	14,7	5,1
	40	0,65	4,38	1
	100	1,25	1,72	0,03
Großfeldachromate	25	0,65		0,12
	40	0,65		0,22
	100	1,25		0,08
Großfeldapochromate	10	0,30		1,8
	25	0,65		0,25
	63	0,90		0,10
	100	1,32		0,09

6.5.9. Okulare

Die Mikroskop- und die Fernrohrokulare bilden das Zwischenbild wie Lupen ab. Im Normalfall befindet sich das Zwischenbild in der objektseitigen Brennebene des Okulars, das Endbild entsteht demnach im Unendlichen.

Die Austrittspupille des Objektivs ist die Eintrittspupille des Okulars. Diese liegt damit im allgemeinen weit vor dem Okular, so daß der Hauptstrahlenverlauf wenig vom telezentrischen Strahlenverlauf abweicht.

Als Kennzahlen werden die Normalvergrößerung $\Gamma' = 250/(f'/\text{mm})$ und die Feldzahl $2y_{\text{Ok}}/\text{mm}$ angegeben. Der halbe Bildwinkel w' und die Feldzahl sind durch

$$2y = 2f'_{\text{Ok}} \tan w'$$

bzw.

$$2\Gamma'_{\text{Ok}} \cdot y/\text{mm} = 500 \tan w' \tag{6.318}$$

miteinander verknüpft. Bei einem Feldwinkel $2w' = 36°$ ist noch keine zu starke Augenbewegung notwendig. Legt man diesen als maximalen Bildwinkel fest, dann gilt wegen $\tan 18° = 0{,}32$

$$2\Gamma'_{\text{Ok}} \cdot y/\text{mm} = 160. \tag{6.319}$$

Wegen des normalen Steckdurchmessers 23,2 mm muß die Feldzahl der schwachen Okulare (bis $\Gamma' \approx 8$) auf 20 mm begrenzt werden. Bei den stärkeren Okularen nimmt die Feldzahl mit der Vergrößerung ab. Bei Okularen mit erweitertem Feld beträgt der Steckdurchmesser 30 mm. Es wird

$$2\Gamma'_{\text{Ok}} \cdot y/\text{mm} = 200 \tag{6.320}$$

gewählt, so daß $2w' \approx 46°$ ist.

Die objektseitige Feldzahl des Mikroskops folgt aus

$$2y_{\text{Ob}} = \frac{2y}{|\beta'_{\text{Ob}}|} = \frac{2y\Gamma'_{\text{Ok}}}{|\Gamma'|}.$$

Sie beträgt also

$$2y_{\text{Ob}}/\text{mm} = \frac{160}{|\Gamma'|} \quad \text{bzw.} \quad 2y_{\text{Ob}}/\text{mm} = \frac{200}{|\Gamma'|}. \tag{6.321}$$

Im allgemeinen bilden also die Okulare ein großes Feld mit kleiner Öffnung ab. Daraus ergibt sich, daß vorrangig die Abbildungsfehler

— Farbfehler des Hauptstrahls,
— Astigmatismus und
— Verzeichnung

zu korrigieren sind. Es kann aber auch notwendig sein, die Bildfeldwölbung zu berücksichtigen (Planokulare). Sonderfälle sind z. B. die Kompensationsokulare und die Feldstecherokulare, bei denen ein Anteil an Verzeichnung vorgegeben wird, weil dies günstig für die Beobachtung bewegter Objekte ist.

Plankonvexlinse. Eine Plankonvexlinse eignet sich als Okular mit kleiner Vergrößerung und nicht zu großem Feld. Die Planfläche ist dem Auge zuzukehren, damit der Astigmatismus und die Verzeichnung klein sind.

Monozentrisches Okular (Abb. 6.115a). Ein Fernrohrokular aus drei miteinander verkitteten Linsen ist das monozentrische Okular. Es hat wie die Einzellinse nur zwei Glas-Luft-Flächen, so daß es reflexarm ist. Der Aufbau aus zwei Zerstreuungslinsen (Flintglas) und einer Sammellinse (Kronglas) ermöglicht die Korrektion des Astigmatismus für eine nicht zu große Feldzahl.

Ramsden-Okular. Bei kleinen und mittleren Vergrößerungen haben die Okulare relativ große Brennweiten. Die Entfernung vom Zwischenbild bis zu der Augenlinse ist so groß, daß sich die divergenten Hauptstrahlen weit von der optischen Achse entfernen. Das gilt besonders für große Felder. Die Okulare werden dann zweckmäßig aus einer Feldlinse und einer Augenlinse zusammengesetzt. Dabei verkürzt sich allerdings die Schnittweite der Austrittspupille.

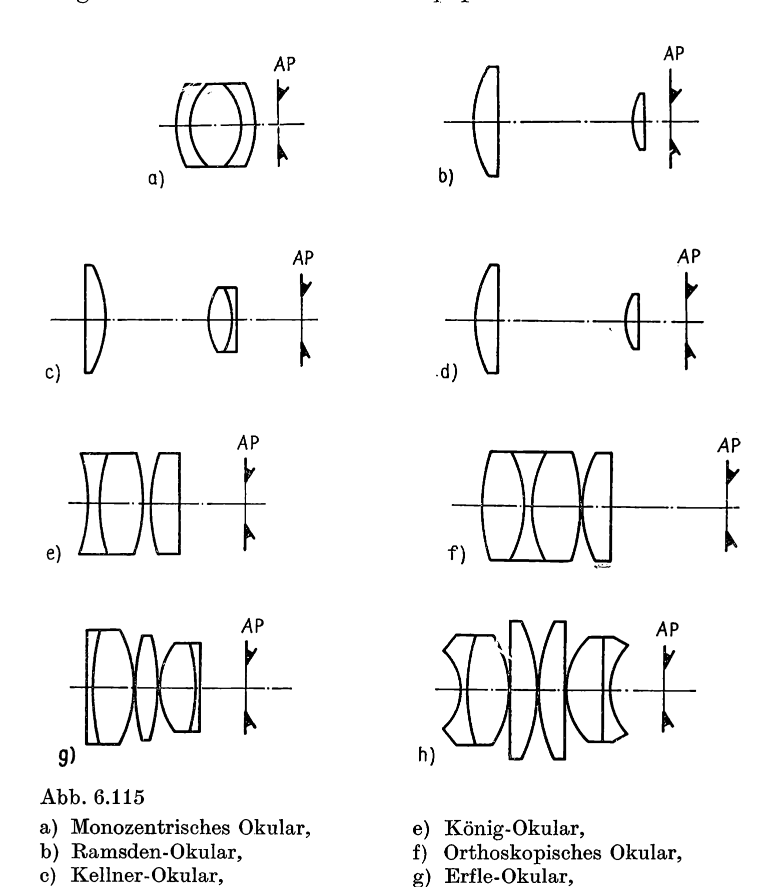


Abb. 6.115

a) Monozentrisches Okular,
b) Ramsden-Okular,
c) Kellner-Okular,
d) Huygenssches Okular,
e) König-Okular,
f) Orthoskopisches Okular,
g) Erfle-Okular,
h) Feldstecher-Okular

Beim Ramsden-Okular (Abb. 6.115b) steht die Feldlinse in der Zwischenbildebene. Feld- und Augenlinse haben dieselbe Brechzahl. Ihre Brennweiten sind gleich der Brennweite des Okulars. Es gilt

$$f'_F = f'_A = f' = e'. \tag{6.322}$$

Dadurch ist die Brennweite des Okulars für zwei Farben gleich und der Farbfehler des Hauptstrahls klein. Wegen der großen Entfernung der Eintrittspupille fällt

die Austrittspupille fast mit der Augenlinse zusammen. Das ist ein wesentlicher Nachteil des Ramsden-Okulars.

Ein weiterer Nachteil ist das Zusammenfallen von Zwischenbild und Feldlinse, wodurch Schmutz und Blasen in der Feldlinse im Bild zu sehen sind. Das Ramsden-Okular ist bis zu einem Feldwinkel von 25° korrigierbar, wobei jedoch die Verzeichnung nicht klein ist.

Kellner-Okular (Abb. 6.115c). Die Nachteile des Ramsden-Okulars lassen sich vermeiden, wenn die Augenlinse aus Sammellinse (Kronglas) und Zerstreuungslinse (Flintglas) zusammengesetzt wird. Es entsteht ein Kellner-Okular, bei dem die Zwischenbildebene vor der Feldlinse liegt und die Austrittspupille bei nicht zu starken Vergrößerungen dem Auge gut zugänglich ist.

Huygens-Okular (Abb. 6.115d). Ramsden- und Kellner-Okular haben den Vorteil, daß die Zwischenbildebene vor dem Okular liegt. Strichmarken und Teilungen lassen sich im Tubus anbringen und bleiben bei einem Okularwechsel erhalten. Wenn dieser Vorteil nicht benötigt wird, dann lassen sich die Nachteile des Ramsden-Okulars auch mit einer einfachen Feld- und Augenlinse aus gleichen Gläsern vermeiden. Das Zwischenbild muß zwischen Feld- und Augenlinse liegen. Bei dem so entstehenden Huygensschen Okular ist die Brennweite für zwei Farben gleich, wenn für den Linsenabstand

$$e' = \frac{f'_F + f'_A}{2} \tag{6.323}$$

gilt. Eine günstige Lage der Austrittspupille ergibt sich bei einem geeigneten Brennweitenverhältnis der beiden Linsen, z. B. bei $f'_F/f'_A = 1{,}5$.

König-Okular und orthoskopisches Okular. Bei stärkerer Vergrößerung ist die Brennweite der Okulare so klein, daß eine Feldlinse nicht erforderlich ist. Andererseits ist eine kleinere Baulänge notwendig, damit das Zwischenbild vor dem Okular liegt. Ein Okular dieser Art aus drei Linsen stellt das König-Okular dar (Abb. 6.115e).

Eine bessere Verzeichnungskorrektion ist mit dem vierlinsigen orthoskopischen Okular möglich (Abb. 6.115f).

Feldstecher-Okulare. Für Feldstecher werden Okulare mit großem Feldwinkel benötigt. Es ist dann günstig, bei der Korrektion auch die Bildfeldwölbung zu berücksichtigen. Zwei Beispiele sind das Erfle-Okular (Abb. 6.115g) und ein Feldstecher-Okular von Zeiss (Abb. 6.115h). Bei letzterem sind die dicken Menisken geeignet, die Bildfeldebnung zu erleichtern.

Literatur und Quellen

[1] PAUL, H.: Lasertheorie. Teil I. — Berlin: Akademie-Verlag 1969 (Reihe „Wissenschaftliche Taschenbücher“).
[2] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. V: Thermodynamik und Statistik. 3. Aufl. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1965.
[3] YOUNG, M.: Optics and Lasers. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1977 (Reihe „Springer Series in Optical Sciences“, Hrsg. D. L. MAC ADAM).
[4] ANDERS, H.: Dünne Schichten für die Optik. — Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH. 1965 (Reihe „Optik und Feinmechanik in Einzeldarstellungen“, Hrsg.: N. GÜNTHER).
[5] Handbuch der Physik. Hrsg.: S. FLÜGGE. Gruppe 5, Bd. XXIV: Grundlagen der Optik. — Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1956.
[6] KOGELNICK, H.: Laser Beams and Resonators. — Appl. Optics **5** (1966) Heft 10.
[7] JAHNKE; EMDE, F.: Tafeln höherer Funktionen. 5. Aufl. — Leipzig: BSB. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1960.
[8] CANDLER, C.: Modern Interferometers. — London: Hilger & Watt 1951.
[9] KÖNIG, A.; KÖHLER, H.: Die Fernrohre und Entfernungsmesser. 3. Aufl. — Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1959.
[10] HODAM, F.: Optische Anordnungen für Beleuchtungseinrichtungen. — X. Internat. Wiss. Kolloquium der TH Ilmenau 1965, Heft 6: Lichttechnik. — Ilmenau 1965, S. 111—118.
[11] HAFERKORN, H.: Geometrische Optik. In: Lehrbriefe für das Fernstudium. Hrsg.: Technische Hochschule Ilmenau 1965—1967 (nicht im Handel erhältlich).
[12] HAFERKORN, H.: Wellenoptik. In: Lehrbriefe für das Fernstudium. Hrsg.: Technische Hochschule Ilmenau 1965—1967 (nicht im Handel erhältlich).
[13] HAFERKORN, H.; EICHLER, W.: Optische Instrumente. In: Lehrbriefe für das Fernstudium. Hrsg.: Technische Hochschule Ilmenau 1969 (nicht im Handel erhältlich).
[14] GRIMSEHL, E.: Lehrbuch der Physik. Bd. 3: Optik. 16., völlig neu bearb. Auflage. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1978.
[15] FRANÇON, M.: Moderne Anwendungen der physikalischen Optik. Hrsg.: J. KLEBE. — Berlin: Akademie-Verlag 1971 (Übers. aus d. Engl.).
[16] BORN, M.; WOLF, E.: Principles of Optics. 4. Auflage. — Oxford: Pergamon Press 1970.
[17] FLÜGGE, J.: Praxis der geometrischen Optik. — Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1962.
[18] VINSON, J. F.: Optische Kohärenz. — Berlin: Akademie-Verlag 1971 (Reihe „Wissenschaftliche Taschenbücher“).

Bildquellen

Abb. 2.64, 2.65 nach [1];

Abb. 2.70 nach [3];

Abb. 5.50, 5.51, 5.52, 5.151, 5.152 nach [4];

Abb. 2.6, 5.44, 5.45, 5.46, 5.56 nach [5];

Abb. 6.84, 6.85, 6.86, 6.89 nach [10];

Abb. 1.1, 6.54 identisch mit den entsprechenden Abb. in [14];

Abb. 4.197a, 4.198 entnommen aus [15];

Abb. 4.173, 6.19 nach [16];

Abb. 4.111, 4.112, 5.16, 5.17 aus [11];

Abb. 2.73, 2.74, 2.75, 2.76, 2.88, 2.89, 2.90, 2.91, 2.92, 2.95, 2.96, 2.97, 2.101, 2.102, 2.105, 2.106, 2.107, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34, 5.36, 5.53, 5.54, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.43, 6.46, 6.47, 6.48 aus [12];

Abb. 6.71, 6.73, 6.74, 6.75, 6.76, 6.77, 6.78, 6.79, 6.80, 6.81 aus [13].

Sach- und Namenverzeichnis